Ф. А. Шолохович, Линейные динамические системы с управлением,
*Дифференц. уравнения*, 1972, том 8, номер 2, 300–308

ФЕВРАЛЬ 1972 г., ТОМ VIII, № 2

УДК 517.934:62.50

# ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С УПРАВЛЕНИЕМ

Ф. А. ШОЛОХОВИЧ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dp}{dt} = Ap + bu, \tag{1}$$

где $p$ и $b$ принадлежат банаховому пространству $B$, $A$ — линейный оператор из $B$ в $B$, $u(t)$ — скалярная функция из некоторого класса, называемая управлением. Через $\varphi(t, p, u)$ обозначим решение этого уравнения, соответствующее выбранному управлению $u(t)$, причем $\varphi(0, p, u) = p$.

Динамическую систему, описываемую уравнением (1), называют системой с управлением. Для оператора $A$, область определения $D(A)$ которого совпадает со всем пространством $B$, имеют смысл следующие определения.

Систему (1) называют управляемой за время $T$, если для любой точки $p_0 \in B$ существует такое управление $u_0(t)$, что $\varphi(T, p_0, u_0) = \theta$ (начальная точка $B$). Систему (1) называют $\varepsilon$-управляемой за время $T$, если для любой точки $p_0 \in B$ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое управление $u_0(t)$, что будет выполняться неравенство $\|\varphi(T, p_0, u_0)\| \leqslant \varepsilon$.

Вопрос об управляемости динамической системы (1), когда пространство $B$ конечномерно, хорошо изучен. Имеются также работы (например, [1, 2, 3, 4]), где при тех или иных предположениях изучается управляемость или $\varepsilon$-управляемость системы (1) в бесконечномерных пространствах. Оператор $A$ в работах [1, 2, 3] предполагается ограниченным.

Задачу об управляемости можно сформулировать и в терминах абстрактной теории динамических систем. Это особенно целесообразно для линейного случая тогда, когда $D(A)$ плотно в $B$, но $D(A) \neq B$. Мы ограничимся линейным случаем и в качестве управлений будем брать функции, с суммируемым квадратом на конечном промежутке.

Пусть в банаховом пространстве $B$ задана линейная динамическая система $f(t)p$ [5]. Укажем в порядке нарастающей общности несколько возможных определений линейной динамической системы с управлением (во всех определениях $0 \leqslant t < \infty$, $p \in B$, $u \in L_2[0, t]$)

$0_1$ $\quad \varphi(t, p, u) = f(t)p + \int\limits_0^t f(t-\tau)\,bu(\tau)\,d\tau$, где $b \in B$;

$0_2$ $\quad \varphi(t, p, u) = f(t)p + f(t)\int\limits_0^t h(\tau)\,u(\tau)\,d\tau$, где $h(\tau) \in B$ при каждом $\tau \in [0, t]$, сильно измерима ([6], стр. 86) и $\int\limits_0^t \|h(\tau)\|\,d\tau < \infty$;

$0_3$ $\quad \varphi(t, p, u) = f(t)p + \int\limits_0^t h(t, \tau)\,u(\tau)\,d\tau$, где $h(t, \tau) \in B$ при всех $t \geqslant 0$ и $\tau \in [0, t]$, непрерывно зависит от $t$ и сильно измерима при каждом $t > 0$ на промежутке $0 \leqslant \tau \leqslant t$, причем $\int\limits_0^t \|h(t, \tau)\|\,d\tau < \infty$;

$0_4$*) $\varphi(t, p, u) = f(t)p + f(t)\alpha(t)u$, где $\alpha(0)u = \theta$, а при $t > 0$ $\alpha(t)$-линейный ограниченный оператор, отображающий $L_2[0, t]$ в $B$ и удовлетворяющий условию.

1. Операторная функция $\alpha(t)$ сильно непрерывна в промежутке $[0, \infty)$**)

$0_5$ $\varphi(t, p, u) = f(t)p + g(t, u)$, где $g(0, u) = \theta$, а при $t > 0$ $g(t, u)$ отображает $L_2[0, t]$ в $B$ и удовлетворяет условиям.

1. При фиксированном $t > 0$ функция $g(t, u)$ непрерывна по $u$, т. е. $\|g(t, u_n) - g(t, u)\|_B \to 0$, если $\|u_n - u\|_{L_2} \to 0$.

2. При фиксированной $u(t) \in L_2[0, T]$ $g(t, u)$ непрерывна во всякой точке $t \in [0, T]$, т. е. $\|g(t_n, u) - g(t, u)\|_B \to 0$, если $t_n, t \in [0, T]$ и $t_n \to t$. Здесь $T > 0$ произвольно.

Чтобы приблизить определения $0_4$ и $0_5$ к определениям $0_1 - 0_3$ можно потребовать выполнения условий

$0_4$ 2. $\alpha(t_1 + t_2)u(\xi) = \alpha(t_1)u(\xi) + f(-t_1)\alpha(t_2)u(\xi + t_1)$;

$0_5$ 3. $g[t_1 + t_2, u(\xi)] = f(t_2)g[t_1, u(\xi)] + g[t_2, u(\xi + t_1)]$.

Здесь $t_1 \geqslant 0$; $t_2 \geqslant 0$, $u(\xi) \in L_2[0, t_1 + t_2]$.

В определениях $0_1 - 0_5$ $f(t)p$ может быть и линейной динамической полусистемой, т. е. линейные ограниченные операторы $f(t)$ определены при $t \geqslant 0$ и составляют полугруппу.

Для введенных динамических систем $0_1 - 0_5$ можно применять указанные выше определения управляемости и $\varepsilon$-управляемости.

В случае $0_5$ теоретически допустимо рассматривать $g(t, u)$ как функцию, которая при каждом $t \geqslant 0$ (или $-\infty < t < \infty$) отображает $L_2[0, \infty)$ (или $L_2(-\infty, \infty)$) в $B$. Укажем простой пример такой системы. Пусть $B = L_2(-\infty, \infty)$. Если $p = y(x) \in B$, то положим $f(t)p = y(x+t)$. Пусть $g(t, u) = tu(x + t)$, где $-\infty < t < \infty$, $u(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Легко проверяется выполнение необходимых аксиом и условий. Покажем, что наша система управляема за любое время $T \neq 0$. Возьмем произвольную точку $p_0 = y_0(x) \in B$. В качестве управления выберем функцию $u_0(x) = -\frac{1}{T}y_0(x)$. Тогда $\varphi(T, p_0, u_0) = f(T)p_0 + g(T, u_0) = y_0(x + T) - T\frac{1}{T}y_0(x + T) = 0$.

Лемма. *Для того чтобы система $\varphi(t, p, u) = f(t)p + g(t, u)$ (где $f(t)p$ — линейная динамическая система) была за время $T$ управляемой или $\varepsilon$-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы область значений преобразования $g(T, u)$ совпадала с пространством $B$ или была всюду плотна в $B$.*

Справедливость леммы проверяется легко. При доказательстве необходимости следует использовать возможность приведения в точку $\theta$ или ее $\varepsilon$-окрестность точки $-f(-T)p$, где $p$ — произвольно взята в пространстве $B$. Если же $f(t)p$ — полусистема, то динамическая система $\varphi(t, p, u) = f(t)p + g(t, u)$ управляема (или $\varepsilon$-управляема) за время $T$ тогда и только тогда, когда область значений преобразования $g(T, u)$ (или ее замыкание) охватывает область $R$ значений оператора $f(T)$.

Из леммы и свойств линейной динамической системы вытекает, что система $\varphi(t, p, u) = f(t)p + \int_0^t f(t-\tau)bu(\tau)\,d\tau$ управляема или $\varepsilon$-управляема тогда и только тогда, когда область значений $\int_0^t f(-\tau)bu(\tau)\,d\tau$ при все-

*) Окончательный вид определение $0_4$ приобрело после обсуждения его с Ю. М. Репиным.

**) Нам нет необходимости описывать здесь подробно смысл данного условия.

возможных $u(\tau) \in L_2[0, t]$ совпадает с пространством $B$ или всюду плотна в $B$.

Укажем пример системы $0_1$. В качестве линейной динамической системы возьмем систему, построенную в [5], стр. 249—251. Дадим ее краткое описание. Пусть $\alpha(x)$ — полуаддитивная функция (например, $\alpha(x) \equiv 0$ или $\alpha(x) = |x|$). Множество вещественных функций $y(x)$, для которых функция $\varphi(x) = y(x) \exp[-\alpha(x)]$ непрерывна в замкнутом промежутке $[-\infty, \infty]$, составляет банахово пространство $B$ нашей системы. Норма вводится равенством: если $p = y(x) \in B$, то $\|p\| = \sup\limits_x |y(x)| \exp[-\alpha(x)]$. Равенство $f(t)p = y(x+t)$ определяет движения в пространстве $B$.

Пусть теперь $\beta(x) \in B$ — произвольная фиксированная функция, $u(x) \in \in L_2[0, t]$. Положим

$$\varphi(t, p, u) = y(x+t) + \int_0^t \beta(x+t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Обозначим эту систему буквой $G$. При $\alpha(x) \equiv 0$ никаким выбором функции $\beta(x)$ нельзя сделать систему $G$ $\varepsilon$-управляемой. Действительно, предположим, что отобрана какая-нибудь функция $\beta(x) \in B$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \beta(x) = a$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \beta(x) = b$. Зафиксируем число $t > 0$ и возьмем произвольно функцию $u(\tau) \in L_2[0, t]$. Если обозначить $v = \int_0^t u(\tau)\, d\tau$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_0^t \beta(x-\tau)\, u(\tau)\, d\tau = av$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^t \beta(x-\tau)\, u(\tau)\, d\tau = bv$. Пусть $p_u = \int_0^t \beta(x-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$, $q = \gamma(x) \in B$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \gamma(x) = a_1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \gamma(x) = b_1$. Допустим, что $\|p_u - q\| < \sigma$. Тогда $|av - a_1| \leqslant \sigma$, $|bv - b_1| \leqslant \sigma$. Отсюда видно, что при $a = 0$ можно взять $\gamma(x)$ так, чтобы $a_1 \neq 0$ и ни при каком управлении $u$ нельзя будет обеспечить выполнение неравенства $\|p_u - q\| < \frac{|a_1|}{2}$. Такой же вывод справедлив и при $b = 0$. Поэтому можно рассмотреть лишь случай $a \neq 0$, $b \neq 0$. Выберем точку $q = \gamma(x)$ так, чтобы $a_1 = 4a$, $b_1 = b$, т. е. $\frac{a_1}{a} - \frac{b_1}{b} = 3$. Пусть $\sigma = \min\{|a|, |b|\}$ и нашлось такое управление $\bar{u}$, что $\|p_{\bar{u}} - q\| < \sigma$. Положим $\bar{v} = \int_0^t \bar{u}(\tau)\, d\tau$. Очевидно, $|a\bar{v} - a_1| \leqslant \sigma$, $|b\bar{v} - b_1| \leqslant \sigma$, откуда $\left|\bar{v} - \frac{a_1}{a}\right| \leqslant 1$ и $\left|\bar{v} - \frac{b_1}{b}\right| \leqslant 1$, что невозможно для одного и того же числа $\bar{v}$.

В упомянутых выше работах [1, 2, 3] основную роль играет совокупность $E$ векторов

$$b,\ Ab,\ A^2b,\ \ldots,\ A^nb,\ \ldots \tag{3}$$

и линейная оболочка $L(E)$ этой совокупности. В доказательствах используется сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n b, \tag{4}$$

вытекающая из ограниченности оператора $A$. Если оператор $A$ неограничен и при любом натуральном $n$ $b \in D(A^n)$ (через $D(A^n)$ обозначена область определения оператора $A^n$), то ряд (4) имеет смысл и, как мы покажем сейчас на примере, может сходиться хотя бы в ограниченном промежутке.

Обратимся снова к системе $G$. Роль оператора $A$ системы (1) играет инфинитезимальный оператор линейной динамической системы $f(t)\,p = y(x+t)$, т. е. неограниченный оператор дифференцирования. $Ap = y'(x)$, $A^2p = y''(x)$, $\ldots$, $A^np = y^{(n)}(x)$, $\ldots$ Мы выберем $b \in D(A^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и покажем, что ряд (4) будет сходиться в некотором промежутке к $f(t)\,b$. В системе $G$ при $\alpha(x) = |x|$ можно было бы в качестве точки $b$ взять многочлен и ряд (4) превратился бы в конечную сумму. Но этот тривиальный случай мало интересен. В нашем примере множество $E$ будет бесконечномерным.

Пусть $b = y(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Известно, что $A^nb = y^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \times$ $\times \sin[(n+1)\operatorname{arcctg} x]$ и ряд (4) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arcctg} x]. \tag{5}$$

Этот ряд равномерно сходится на промежутке $(-\infty, \infty)$, если зафиксировать любое $t$, $|t| < 1$. При $|t| \geqslant 1$ ряд расходится хотя бы при $x = 0$. Мы покажем, что ряд (5) сходится по норме пространства $B$ к функции $y(x+t) = \dfrac{1}{1+(x+t)^2}$. Действительно, этот ряд можно рассматривать как разложение Тейлора функции $y(x+t)$ в окрестности точки $x$. Оценим дополнительный член $r_m$ формулы Тейлора

$$r_m = \frac{y^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}\, t^{m+1}, \quad \text{где} \quad c = x + \zeta t \quad (0 < \zeta < 1),$$

$$|r_m| = \frac{1}{(1+c^2)^{\frac{m}{2}+1}}\, |\sin[(m+2)\operatorname{arcctg} c]| \cdot |t|^{m+1} \leqslant |t|^{m+1}.$$

Очевидно,

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{1+(x+t)^2} - \sum_{n=0}^{m} \frac{t^n}{n!}\, y^{(n)}(x) \right\| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sup_{x} |r_m(x+t)| \exp[-|x|] \leqslant \lim_{m\to\infty} |t|^{m+1} = 0.$$

Доказано, что $\lim\limits_{m\to\infty} \left\| f(t)\,b - \sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{t^n}{n!} A^nb \right\| = 0$ при $|t| < 1$.

В этом примере линейная оболочка $L(E)$ бесконечномерна, что хорошо видно, если в выражении для $n$-й производной положить $\operatorname{arcctg} x = z$. Тогда $y^{(n)}(\operatorname{ctg} z) = (-1)^n n! \sin^{n+1} z \sin(n+1)z$. Правая часть преобразуется в тригонометрический многочлен порядка $2(n+1)$, поэтому в промежутке $(0, \pi)$ линейно независимы функции $y^{(n)}(\operatorname{ctg} z)$, а, следовательно, функции $y^{(n)}(x)$ линейно независимы в промежутке $(-\infty, \infty)$.

Т е о р е м а. *Пусть $A$ — инфинитезимальный оператор линейной динамической полусистемы $f(t)\,p$, $t \geqslant 0$, $p \in B$ и $b \in D(A^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

*Если при* $0 \leqslant t < T_1$ ряд (4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n b$ *сходится к* $f(t)\, b$, *то динамическая система* $\varphi(t, p, u) = f(t)\, p + \int_0^t f(t-\tau)\, bu(\tau)\, d\tau$ $\varepsilon$-*управляема за время* $T \in (0, T_1)$ *тогда и только тогда, когда линейная оболочка* $L(E)$ *векторов* $E = (b, Ab, A^2 b, \ldots, A^n b, \ldots)$ *плотна в области* $R$ *значений оператора* $f(T)$.

Необходимость. Пусть $q_0 \in R$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, а $p_0 \in B$ такова, что $f(T)\, p_0 = -q_0$. Найдется такое управление $u_0(t)$, что $\| \varphi(T, p_0, u_0) \| \leqslant \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$$\left\| q_0 - \int_0^T f(T-\tau)\, bu(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

На промежутке $[0, T]$ ряд (4) сходится равномерно. Поэтому существует такое число $m$, что

$$\left\| \int_0^T f(T-\tau)\, bu_0(\tau)\, d\tau - \sum_{n=0}^{m} \int_0^T \frac{(T-\tau)^n}{n!} A^n bu_0(\tau)\, d\tau \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^T \left( \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(T-\tau)^n}{n!} A^n bu_0(\tau) \right) d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(T-\tau)^n}{n!} A^n b \right\| |u_0(\tau)|\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этого и неравенства (6) следует, что $\left\| q_0 - \sum_{n=0}^{m} A^n b \int_0^T \frac{(T-\tau)^n}{n!} \times \right.$ $\left. \times\, u_0(\tau)\, d\tau \right\| < \varepsilon$. Вместе с необходимостью мы доказали возможность почленного интегрирования ряда (4) в промежутке $[0, T]$, $0 < T < T_1$.

Достаточность. Используем подход, предложенный в работе [2] и развитый в [3]. Мы приведем доказательство целиком, хотя в ряде мест оно не отличается от рассуждений в [3]. Это целесообразно потому, что в статье [3] изложение предельно сжатое и в текст вкрались отдельные опечатки.

Пусть $p_0 \in B$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, $T \in (0, T_1)$. Найдем вначале такие числа $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$, чтобы

$$\left\| f(T)\, p_0 + \sum_{s=0}^{N} \xi_s A^s b \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Рассмотрим ([7], стр. 54) семейство функций $F_{mn}(\tau) = \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \times$ $\times \exp\left[ -m \frac{(\tau - T + \omega_n)^2}{2} \right]$, зависящее от двух параметров $m$ и $n$, причем $0 < \omega_n < T$ и $\omega_n \to 0$ при $n \to \infty$. При фиксированном $n$ и $m = 1, 2, \ldots$ получается дельта-образная последовательность, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} F_{mn}(\tau) = \delta(\tau - T + \omega_n)$. Введем функцию $u_{mn}(\tau) = \sum\limits_{s=0}^{N} (-1)^s \xi_s \dfrac{d^s F_{mn}(\tau)}{d\tau^s}$. Покажем, что за искомое управление $u_0(\tau)$ можно взять функцию $u_{mn}(\tau)$ при некоторых значениях $m$ и $n$. Вычислим $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_0^T \dfrac{(T-\tau)^k}{k!} u_{mn}(\tau)\, d\tau$. Для этого возьмем функцию $\varphi_n(x)$ следующим образом. Пусть $0 < \eta_1 < T - \omega_n < \eta_2 < T$,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{(T-x)^k}{k!}, & \eta_1 \leqslant x \leqslant \eta_2, \\ 0, & x \geqslant T. \end{cases}$$

В промежутках $(0, \eta_1)$ и $(\eta_2, T)$ $\varphi_n(x)$ определим так, чтобы она обладала на числовой оси производными всех порядков. Очевидно,

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_0^T \varphi_n(\tau)\, u_{mn}(\tau)\, d\tau = \sum_{s=0}^{N} (-1)^s \xi_s \int\limits_0^T \delta^{(s)}(\tau - T + \omega_n)\, \varphi_n(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{s\leqslant k} \xi_s \frac{\omega_n^{k-s}}{(k-s)!}.$$

Вместе с тем

$$\lim_{m\to\infty} \left[ \int\limits_0^T \frac{(T-\tau)^k}{k!} u_{mn}(\tau)\, d\tau - \int\limits_0^T \varphi_n(\tau)\, u_{mn}(\tau)\, d\tau \right] = 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_0^T \dfrac{(T-\tau)^k}{k!} u_{mn}(\tau)\, d\tau = \sum\limits_{s\leqslant k} \xi_s \dfrac{\omega_n^{k-s}}{(k-s)!}$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_0^T \left( \sum_{k=0}^{N} A^k b \frac{(T-\tau)^k}{k!} u_{mn}(\tau) \right) d\tau = \sum_{k=0}^{N} A^k b \sum_{s\leqslant k} \xi_s \frac{\omega_n^{k-s}}{(k-s)!} =$$

$$= \sum_{s=0}^{N} \xi_s A^s b + \sum_{k=1}^{N} A^k b \sum_{s<k} \frac{\omega_n^{k-s}}{(k-s)!}.$$

Обозначим последнее выражение $r_n$. Поскольку $\omega_n \to 0$ и в каждом слагаемом второго члена $r_n$ степень $\omega_n$ не меньше единицы, можно указать такое число $n_0$, что при $n > n_0$ будет $\left\| \sum\limits_{s=0}^{N} \xi_s A^s b - r_n \right\| < \dfrac{\varepsilon}{8}$. Зафиксировав любое $\bar{n} > n_0$, найдем такое число $m_0$, чтобы при $m > m_0$ имело место неравенство

$$\left\| \int_0^T \left( \sum_{k=0}^{N} A^k b \frac{(T-\tau)^k}{k!} u_{m\bar{n}}(\tau) \right) d\tau - r_{\bar{n}} \right\| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Тогда при $m > m_0$

$$\left\| \int_0^T \left( \sum_{k=0}^{N} A^k b \frac{(T-\tau)^k}{k!} u_{m\bar{n}}(\tau) \right) d\tau - \sum_{s=0}^{N} \xi_s A^s b \right\| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{8}$$

Обратимся теперь к оценке величины $\int_0^T \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b \frac{(T-\tau)^k}{k!} u_{mn}(\tau) \right) d\tau$.

Мы применим некоторые конструкции теории обобщенных функций и известные факты этой теории к случаю, когда роль «основного пространства» $K$ играет множество абстрактных финитных функций $\varphi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ со значениями в банаховом пространстве $B$, имеющих сильные производные ([6], стр. 72) всех порядков. Роль обобщенных функций будут играть линейные непрерывные операторы, отображающие $K$ в $B$. Некоторые из них имеют вид $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$, где $g(\tau)$ — локально интегрируемая функция. Соответствие $\varphi(t) \to \varphi(0)$ можно назвать $\delta$-оператором и условно записывать в виде $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(0)$. Если $\{g_m(\tau)\}$ — дельта-образная последовательность, то

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \int g_m(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \varphi(0) \right\| = 0.$$

Можно и дальше проводить аналогию с обычной теорией.

Пусть снова $0 < \eta_1 < T - \omega_n < \eta_2 < T$ и функция

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \theta, & x \leqslant 0 \\ \sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b \dfrac{(T-x)^k}{k!}, & \eta_1 \leqslant x \leqslant \eta_2 \\ \theta, & x \geqslant T \end{cases}$$

имеет производные всех порядков. Очевидно,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \varphi_n(\tau) u_{mn}(\tau)\,d\tau = \int_0^T \left[ \varphi_n(\tau) \sum_{s=0}^{N} (-1)^s \xi_s \delta^{(s)}(\tau - T + \omega_n) \right] d\tau =$$

$$= \sum_{s=0}^{N} \xi_s \varphi_n^{(s)}(T-\omega_n) = \sum_{s=0}^{N} \xi_s \sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b \frac{\omega_n^{k-s}}{(k-s)!}.$$

Здесь все показатели степени $k - s \geqslant 1$. С другой стороны,

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \int_0^T \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b \frac{(T-\tau)^k}{k!} u_{mn}(\tau) \right) d\tau - \int_0^T \varphi_n(\tau) u_{mn}(\tau)\,d\tau \right\| = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b\,\frac{(T-\tau)^k}{k!}\,u_{mn}(\tau)\,d\tau = \sum_{s=0}^{N}\xi_s \sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b\,\frac{\omega_n^{k-s}}{(k-s)!}\,.\right.$$

Обозначим $w_s(t) = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} A^k b\,\dfrac{t^{k-s}}{(k-s)!}$. Ряд $w_s(t)$ сходится в промежутке $[0, T]$, так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k b\,\dfrac{t^k}{k!}$ можно почленно дифференцировать в промежутке $(-T_1, T_1)$ любое число раз. Сумма ряда $w_s(t)$ есть функция непрерывная, причем $w_s(0)=\theta$. Поэтому существует такой номер $n_0'$, что при $n > n_0'$ будет выполняться неравенство $\|w_s(\omega_n)\| < (8N|\xi_s|)^{-1}\varepsilon$ для всех тех значений $s$ от 0 до $N$, для которых $\xi_s \neq 0$. Тогда при $n > n_0'$ будет $\left\|\sum\limits_{s=0}^{N}\xi_s \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} A^k b\,\dfrac{\omega_n^{k-s}}{(k-s)!}\right\| < \dfrac{\varepsilon}{8}$. Зафиксировав $\bar n > n_0'$, найдем такое число $m_0'$, чтобы при $m > m_0'$ было

$$\left\|\int_0^T \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b\,\frac{(T-\tau)^k}{k!}\,u_{m\bar n}(\tau)\,d\tau - \sum_{s=0}^{N}\xi_s \sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b\,\frac{\omega_{\bar n}^{k-s}}{(k-s)!}\right.\right\| < \frac{\varepsilon}{8}$$

и, следовательно,

$$\left\|\int_0^T \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b\,\frac{(T-\tau)^k}{k!}\,u_{m\bar n}(\tau)\,d\tau\right.\right\| < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{9}$$

Будем считать теперь, что $\bar n > \max\{n_0, n_0'\}$, числа $m_0$ и $m_0'$ найдены при $n=\bar n$, $\bar m > \max\{m_0, m_0'\}$ и $u_0(t) = u_{\bar m\bar n}(t)$. Получим

$$\left\|\sum_{s=0}^{N}\xi_s A^s b - \int_0^T f(T-\tau)\,b u_0(\tau)\,d\tau\right\| \leqslant \left\|\sum_{s=0}^{N}\xi_s A^s b - \right.$$
$$\left. - \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{N} A^k b\,\frac{(T-\tau)^k}{k!}\,u_0(\tau)\right)d\tau\right\| +$$
$$+ \left\|\int_0^T \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} A^k b\,\frac{(T-\tau)^k}{k!}\,u_0(\tau)\right)d\tau\right\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(см. (8) и (9)). Сопоставляя с (7), получаем

$$\left\|f(T)\,p_0 + \int_0^T f(T-\tau)\,b u_0(\tau)\,d\tau\right\| \leqslant \left\|f(T)\,p_0 + \sum_{s=0}^{N}\xi_s A^s b\right\| +$$
$$+ \left\|\sum_{s=0}^{N}\xi_s A^s b - \int_0^T f(T-\tau)\,b u_0(\tau)\,d\tau\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следствие. *Если* $f(t)p$ — *линейная динамическая система и выполняются остальные условия теоремы, то система* $\varphi(t, p, u) = f(t)p + f(t)\int_0^t f(-\tau)bu(\tau)d\tau$ $\varepsilon$-*управляема за время* $T \in (0, T_1)$ *тогда и только тогда, когда линейная оболочка* $L(E)$ *векторов* $E = (b, Ab, \ldots, A^n b, \ldots)$ *плотна в пространстве* $B$.

## Литература


1. Шолохович Ф. А. Дифференц. уравнения, **3**, № 3, 1967.
2. Красовский Н. Н., Репин Ю. М. ПММ, **31**, вып. 3, 1967.
3. Куржанский А. Б. Дифференц. уравнения, **5**, № 9, 1969.
4. Fattorini H. O. On complete controlability of linear systems. Journal of Differential Eguations, **3**, 391—402, 1967.
5. Шолохович Ф. А. Изв. вузов, Математика, № 1, 249—257, 1957.
6. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, 1962.
7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, 1959.


*Поступила в редакцию*
*6 июля 1970 г.*

*Уральский государственный университет*
*им. А. М. Горького*