S. N. Naboko, Nontangential boundary values of operator R-functions in a half-plane,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 5, 197–222

С. Н. Набоко

НЕТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ R-ФУНКЦИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

В работе изучается граничное поведение аналитических в верхней полуплоскости оператор-функций, имеющих неотрицательную мнимую часть. Подробно рассмотрен случай ядернозначных о.-ф. Исследованы классы функций, у которых граничные значения п. в. являются ядерными операторами.

Статья посвящена изучению граничного поведения аналитических в верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$ оператор-функций (о.-ф.) $T(\lambda)$, принимающих значения в классе ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H и имеющих неотрицательную мнимую часть. По аналогии со скалярным случаем $(\dim H = 1)$ такие функции называются (операторными) R-функциями [1]. Для скалярных аналитических в $\mathbf{C}_+$ функций $f(\lambda)$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ классическая проблема существования нетангенциальных граничных значений у функции f подробно исследована. Функция $f(k), k \in \mathbf{R}$, называется нетангенциальным граничным значением, если для п. в. $k \in \mathbf{R}$ по мере Лебега существует предел $\lim\limits_{\lambda \to k} f(\lambda) = f(k)$, когда λ стремится к k, оставаясь внутри произвольного углового сектора в $\mathbf{C}_+$, некасательного к вещественной оси. Простые примеры показывают, что для этого требуется наложить на функцию f некоторые ограничения. Например, достаточным является ее ограниченность: $\sup\limits_{\operatorname{Im}\lambda > 0} |f(\lambda)| < \infty$ (теорема Фату). Другим достаточным условием служит принадлежность f к классу R-функций, т. е. положительность ее мнимой части. При этом функция f в $\mathbf{C}_+$ восстанавливается по граничным значениям $f(k)$ с помощью интегральной формулы Коши. Известны и более общие условия: принадлежность f т. н. классу Неванлинны (см., например, [2]). Эти результаты о скалярных функциях легко можно перенести на случай матричнозначных аналитических

Ключевые слова: R-функции, классы Мацаева, ядерные операторы, граничные значения оператор-функций.

функций в $\mathbf{C}_+$. Однако их обобщение на случай, когда значения $f(\lambda)$ являются операторами в гильбертовом пространстве, уже не является простым. Здесь справедлива важная в приложениях теорема Б. Секефальви-Надя о существовании у произвольной ограниченной по норме $(\sup\limits_{\operatorname{Im}\lambda>0} \| T(\lambda) \| < \infty)$, аналитической о.-ф. $T(\lambda)$ п. в. на $\mathbf{R}$ нетангенциальных граничных значений $T(k)$, $k \in \mathbf{R}$ в сильном смысле. Последнее означает, что предельный переход для операторов в определении нетангенциальных граничных значений понимается в сильном смысле и, следовательно, $T(k)$ будут для п. в. $k \in \mathbf{R}$ ограниченными операторами в H. Большой интерес представляет изучение аналогичного вопроса для операторных R-функций $T(\lambda)$. Проиллюстрируем появление таких функций в спектральной теории характерными примерами. Так, R-функциями являются резольвенты $(A-\lambda)^{-1}$ самосопряженных операторов A (а также и резольвенты операторов, сопряженных к максимальным диссипативным операторам). Далее, в задаче теории возмущений для пары самосопряженных операторов $\{A, A+V\}$, $V \geqslant 0$, $V \in B(H)$, R-функция появляется в виде „окаймленной" резольвенты. Именно вычисление резольвенты „возмущенного" оператора $(A+V)$ (т. е. решение уравнения $(A+V-\lambda)u = h$, $u \in H$, $h \in H$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$) немедленно приводит к равенству $u = -(A+\lambda)^{-1} Vu + (A-\lambda)^{-1} h$, откуда $(I + V^{1/2}(A-\lambda)^{-1} V^{1/2}) \cdot (V^{1/2} u) = V^{1/2}(A-\lambda)^{-1} h$. Таким образом, исследование $(A+V-\lambda)^{-1}$ можно редуцировать к изучению операторной R-функции $(I + V^{1/2}(A-\lambda)^{-1} V^{1/2})$. В итоге спектральный анализ оператора $(A+V)$ можно свести к исследованию граничного поведения о.-ф. $V^{1/2}(A-\lambda)^{-1} V^{1/2}$. Здесь важной является задача исследования свойств граничных значений $V^{1/2}(A-k-i0)^{-1} V^{1/2}$, $k \in \mathbf{R}$, в зависимости от принадлежности „возмущения" V различным операторным классам. Как правило, речь будет идти о классах Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$. Напомним [3], что класс $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$, состоит из компактных операторов T в H, s-числа которых удовлетворяют условию $\| T \|_{\mathfrak{S}_p} \overset{\text{def}}{=} (\sum\limits_k s_k^p(T))^{1/p} < \infty$. Разумеется, $\| T \|_{\mathfrak{S}_p}$ представляет собой норму лишь при $p \geqslant 1$.

Постановка основных вопросов, изучаемых в статье, такова. Пусть значение операторной R-функции $T(\lambda)$ в некоторой точке[1] (например, при $\lambda = i$) из $\mathbf{C}_+$ принадлежит данному классу операторов $\mathfrak{S}$. Можно ли сделать вывод о наличии нетангенциальных граничных значений п. в. на вещественной оси и в каком классе операторов нетангенциальные пределы существуют? Последнее связано с возможным „ухудшением" класса при переходе к граничным значениям (см. ниже). Такая формулировка вопросов естественным образом появляется в ходе анализа различных задач теории возмущений самосопряженных (и несамосопряженных) операторов и теории рассеяния [3–8]. Более того, постановку вопроса при $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$ и один из первых результатов (см. также [9]) о наличии граничных значений в классе Гильберта–Шмидта $\mathfrak{S}_2$ у ядернозначных операторных R-функций можно найти в работе [4], где этот факт (в применении к „окаймленной" резольвенте самосопряженного оператора) послужил основой для построения ядерного варианта абстрактной теории рассеяния. В статье [8] построение волновых операторов и доказательство их полноты в несамосопряженном случае сведены к анализу граничного поведения некоторых операторных R-функций. Далее, вопросы подобного рода возникают в спектральном анализе

[1] Для рассматриваемых ниже операторных классов $\mathfrak{S}$ этот факт не будет зависеть от выбора точки (см. § 1).

при обращении к определителям операторных функций, в частности характеристических функций несамосопряженных операторов (см., например, [2, 10]), и при вычислении операторного следа (формула следов). Они также тесно связаны с теорией вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве [11], исследованием сингулярного спектра самосопряженных операторов [12], теоремами единственности для операторных R-функций [13], изучением преобразования Гильберта в классах векторнозначных функций на $\mathbf{R}$ [14–20] и теорией мартингалов [21]. Отметим также ранние работы, в которых получены результаты о граничном поведении аналитических вектор-функций со значениями в банаховом пространстве [2, 9, 22, 23], обобщающие хорошо известные теоремы для скалярного (и матричного) случая.

§ 1. Классы операторных R-функций. Основные факты и обозначения

Введем некоторые обозначения. Произвольная операторная R-функция имеет вид (см., например, [24–26])

$$T(\lambda) = A + B\lambda + V^{1/2}(I + \lambda\mathcal{L})(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}V^{1/2}\,|_H, \tag{1.1}$$

где $A = A^*$, $B \geqslant 0$, $A, B \in B(H)$, а $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, $V = V^* \geqslant 0$ – операторы во вспомогательном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \supset H$, причем $V|_{\mathcal{H} \ominus H} = 0$, $V \in B(\mathcal{H})$. Формула (1.1) представляет собой обобщение как теоремы Б. Секефальви-Надя о дилатации [2], так и теоремы Рисса–Герглотца [1] об интегральном представлении скалярных R-функций. В дальнейшем операцию сужения оператора на подпространство H в формуле (1.1) мы будем опускать, надеясь, что это не приведет к недоразумениям. Будем предполагать, что операторный класс $\mathfrak{S}$, в котором принимает значения $T(\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$, инвариантен относительно линейных операций, операции сопряжения и обладает свойством монотонности (т. е. из условий $A \in \mathfrak{S}$, $A \geqslant 0$, $0 \leqslant B \leqslant A$, $B \in B(H)$ вытекает включение $B \in \mathfrak{S}$). Тогда ввиду тождества $T(i) = A + i(B + V)$ из принадлежности $T(i)$ классу $\mathfrak{S}$ следует, что $A, B, V \in \mathfrak{S}$ и, значит, $T(\lambda) \in \mathfrak{S}$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Множество всех $\mathfrak{S}$-значных операторных R-функций будем обозначать символом $R(\mathfrak{S})$. Так как

$$T(\lambda) = A + (B + V)\lambda + (1 + \lambda^2)V^{1/2}(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}V^{1/2}, \tag{1.2}$$

то изучение граничного поведения произвольной функции из $R(\mathfrak{S})$ может быть сведено к функциям „специального вида”

$$V^{1/2}(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}V^{1/2}, \quad V|_H \in \mathfrak{S}, \alpha \overset{\text{def}}{=} V^{1/2}, \tag{1.3}$$

которые образуют подмножество $R_0(\mathfrak{S}) \subset R(\mathfrak{S})$. Легко дать и инвариантное описание класса $R_0(\mathfrak{S})$, вполне аналогичное определению скалярного класса R_0 [1]. Для этого надо на функции из $R(\mathfrak{S})$ наложить ограничение $w\text{-}\lim\limits_{\tau \to +\infty} T(i\tau) = 0$, а также одно из следующих эквивалентных условий [12]:

1) $\int\limits_{\mathbf{R}} \operatorname{Im} T(k + i\epsilon)\,dk \in \mathfrak{S}$, $\epsilon > 0$;

2) $\sup\limits_{\tau > 0} \tau \,\|\operatorname{Im} T(i\tau)\|_{\mathfrak{S}_p} < \infty$ при $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$;

3) $\operatorname{tr} T(\lambda) \in R_0$ при $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$.

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с классом $R_0(\mathfrak{S})$, поскольку, с одной стороны, это не уменьшает общности, а с другой – позволяет сформулировать результаты, справедливые лишь для класса $R_0(\mathfrak{S})$ (их обобщение на случай произвольной функции из $R(\mathfrak{S})$ будет носить „локальный" характер). Кроме того, именно операторные функции из $R_0(\mathfrak{S})$ наиболее естественно появляются в задачах теории возмущений для пары самосопряженных операторов $\{\mathcal{L}, \mathcal{L} + V\}$. Некоторое удобство рассмотрения случая общей о.-ф. из $R(\mathfrak{S})$, которое позволяет иметь дело с относительно компактными возмущениями, легко компенсируется с помощью следующей простой процедуры. Вместо о.-ф. $V^{1/2}(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} V^{1/2}$ можно изучать разность

$$a(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} a - a(\mathcal{L} - i)^{-1} a \equiv (\lambda - i)\,(a \times$$

$$\times\, (|\mathcal{L} - i|)^{1/2} \operatorname{sign}(\mathcal{L} - i))\,(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}\,((|\mathcal{L} - i|)^{1/2} a),$$

требуя лишь включения $a(\mathcal{L} - i)^{-1} a \in \mathfrak{S}$. Отметим, что все рассмотрения для операторных R-функций можно перенести на о.-ф. более общего вида $T(\lambda) = \beta(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} \alpha$, где $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ – оператор в $\mathcal{H}$, а α, β – ограниченные операторы в $\mathcal{H}$, используя известное тождество [4]:

$$2i\beta(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}\alpha \equiv (\alpha - i\beta^*)^*(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}(\alpha - i\beta^*) +$$

$$+\, i(\alpha + \beta^*)^*(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}(\alpha + \beta^*) - (1 + i)\alpha^*(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}\alpha -$$

$$-\,(1 + i)(\beta^*)^*(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}\beta^*,$$

которое сводит $T(\lambda)$ к четырем R-функциям. Остается отметить, что в случае $\beta = \alpha^*$ мнимая часть $\operatorname{Im} T(\lambda)$ неотрицательна в $\mathbf{C}_+$ и рассмотрение $T(\lambda)$ вполне аналогично ситуации (и легко к ней сводится), когда $\alpha = \beta \geqslant 0$.

Приведем несколько теорем из работы [25], где изучается вопрос о граничных значениях о.-ф. из классов $R_0(\mathfrak{S}_p)$, $0 < p < \infty$. В первую очередь укажем, что при $p > 1$ граничных значений (даже радиальных) может не быть в следующем смысле.[2]

Теорема. *Пусть $\mathfrak{S}$ – произвольный симметрично-нормированный идеал, $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}_1$. Тогда существуют самосопряженные операторы A и a, $a \geqslant 0$, в гильбертовом пространстве H такие, что $a^2 \in \mathfrak{S}$ и „граничные значения" $T(k + i0)$ о.-ф. $T(\lambda)$,*

$$T(\lambda) \overset{\text{def}}{=} a(A - \lambda)^{-1} a, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0 \quad (\Leftrightarrow T(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}))$$

являются неограниченными операторами в H при п. в. k, $k \in \mathbf{R}$. „Граничные значения" понимаются в следующем смысле: для фиксированного плотного множества векторов φ, $\varphi \in H$, существует предел

$$(T(k + i0)\varphi, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \to +0} (T(k + i\epsilon)\varphi, \varphi).$$

[2] Эта теорема по содержанию тесно связана с утверждением теоремы Вейля–фон Неймана о преобразовании спектра при неядерных возмущениях [5].

В отличие от случая $p > 1$ граничные значения о.-ф. из $R_0(\mathfrak{S}_p)$ при $p < 1$ существуют, причем в том же классе $\mathfrak{S}_p$. Приводимая ниже теорема (операторный аналог теоремы Колмогорова о классах H_p [27]) для операторных R-функций в единичном круге может быть легко перенесена на случай полуплоскости с помощью дробно-линейной замены аргумента.

Т е о р е м а. *Пусть $T(z)$ – аналитическая в круге $|z| < 1$ оператор-функция, $\operatorname{Im} T(z) \geqslant 0$, причем $T(0) \in \mathfrak{S}_p$, $0 < p < 1$. Тогда существуют для п. в. θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, нетангенциальные граничные значения[3] $T(e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, в классе $\mathfrak{S}_p$, при этом нетангенциальный предел понимается в классе $\mathfrak{S}_p$. Кроме того,*

$$a^{1/p} \int_0^{2\pi} \| T(e^{i\theta}) \|^p_{\mathfrak{S}_p} \, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} \| T^p(e^{i\theta}) \|_{\mathfrak{S}_1} \, d\theta \leqslant C_p \, \| T(0) \|^p_{\mathfrak{S}_p},$$

где константа C_p зависит лишь от p, $C_p = O(1/(1-p))$, $0 < p < 1$, а a – абсолютная постоянная.

В более сложном для изучения случае $p = 1$ в работе [25] доказано существование для произвольной о.-ф. T из $R_0(\mathfrak{S}_1)$ п. в. нетангенциальных граничных значений в норме $\mathfrak{S}_p$ при произвольном $p > 1$, причем для граничных значений $T(k)$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbf{R}} \| T(k) \|^p_{\mathfrak{S}_p} \, |\eta(k)|^p \, dk \leqslant C_p \, \| V \|_{\mathfrak{S}_1}, \tag{1.4}$$

где $T(\lambda) = V^{1/2} (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} V^{1/2}$, $V \in \mathfrak{S}_1$, а весовая функция η ($\eta(k) \neq 0$ п. в. $k \in \mathbf{R}$) является граничным значением сжимающей в $\mathbf{C}_+$ скалярной аналитической функции

$$\eta(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \det \left((I + S(\lambda))/2 \right).$$

Здесь $S(\lambda) \overset{\text{def}}{=} (I + i V^{1/2} (\mathcal{L} - iV/2 - \lambda)^{-1} V^{1/2})|_H$ – сжимающая в $\mathbf{C}_+$ оператор-функция (характеристическая функция [2] максимального диссипативного оператора $\mathcal{L} + iV/2$ в $\mathcal{H}$).

В то же время граничные значения у о.-ф. из $R_0(\mathfrak{S}_1)$ не могут принадлежать классу „лучшему", чем $\mathfrak{S}_\Omega$. Напомним, что класс Мацаева $\mathfrak{S}_\omega$ – это симметрично-нормированный идеал [3], состоящий из компактных операторов, удовлетворяющих условию $\| T \|_{\mathfrak{S}_\omega} \overset{\text{def}}{=} \sum_n s_n(T)/n < \infty$. Сопряженный к нему, симметрично-нормированный идеал $\mathfrak{S}_\Omega$ задается условием

[3] Будем говорить, что о.-ф. $T(\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$, принимает в точке $k \in \mathbf{R}$ нетангенциальное граничное значение $T(k)$ в классе $\mathfrak{S}$, если для любого сектора $\Gamma^h_a(k) \overset{\text{det}}{=} \{\lambda \in \mathbf{C}_+ : |\operatorname{Re}\lambda - k| \leqslant a \operatorname{Im}\lambda,\ \operatorname{Im}\lambda \leqslant h\}$, $a > 0$, функция $T(\lambda)$ имеет предел $T(k)$ в классе $\mathfrak{S}$, когда $\lambda \to k$, $\lambda \in \Gamma^h_a(k)$. Аналогично можно определить понятие нетангенциальной ограниченности в точке $k \in \mathbf{R}$, если $\mathfrak{S}$ представляет собой (квази)нормированное пространство: $\sup_{\lambda \in \Gamma^b_a(k)} \| T(\lambda) \|_{\mathfrak{S}} < \infty$ для любых $a, h > 0$.

$$\| T \|_{\mathfrak{S}_\Omega} = \sup_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} s_k(T)\right) / \left(\sum_{k=1}^{n} 1/k\right) < \infty.$$

При этом [3]

$$\| T \|_{\mathfrak{S}_\Omega} = \sup_{\substack{B \in \mathfrak{S}_{\omega_p} \\ \| B \|_{\mathfrak{S}_\omega} \leqslant 1}} |\operatorname{tr}(TB)|.$$

В работе [25] для производной последовательности $\{c_n\}$, удовлетворяющей условиям $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $c_n > 0$, построен пример о.-ф. T, $T \in R_0$ $(\mathfrak{S}_1)$ $(T(\lambda) \equiv \equiv V^{1/2} (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} V^{1/2}$, $V \in \mathfrak{S}_1)$ такой, что для п. в. $k \in \mathbf{R}$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k(T(k))}{c_n \cdot \ln n} = \infty.$$

Напомним, что $T(k) \overset{\text{def}}{=} V^{1/2} (\mathcal{L} - k - i0)^{-1} V^{1/2} \in \bigcap_{p>1} \mathfrak{S}_p$ для п. в. $k \in \mathbf{R}$, согласно приведенным выше утверждениям.

В настоящей статье более подробно изучается граничное поведение ядернозначных о.-ф. (частично эти результаты были анонсированы в [25]), а также получены достаточные условия на „возмущение" V, гарантирующие существование нетангенциальных граничных пределов п. в. на $\mathbf{R}$ в ядерной норме. В последнем случае достаточное условие имеет вид $V \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$, т. е. оператор V представляет собой произведение ядерного оператора и оператора из класса Мацаева $\mathfrak{S}_\omega$. Построенные контрпримеры позволяют утверждать, что это условие весьма близко к необходимому. В частности, ядерный класс здесь ($V \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$) нельзя заменить никаким другим симметрично-нормированным идеалом. Подробно изучена связь этих результатов с известными фактами о вольтерровых операторах, в частности с теоремами М. Г. Крейна о наличии асимптотики s-чисел вольтеррового оператора с ядерной мнимой частью.

§ 2. Оценки усредненной функции распределения для граничных значений ядернозначных операторных R-функций

В этом параграфе приведено доказательство основной теоремы, описывающей граничное поведение о.-ф. из класса $R_0(\mathfrak{S}_1)$. Эта теорема является прямым аналогом известной оценки М. Г. Крейна для s-чисел вольтерровых операторов с ядерной мнимой частью [3] (подробнее об этом см. в § 6). В дальнейшем она будет использована для получения более точных (чем существование граничных пределов в $\mathfrak{S}_p$-норме п. в. для произвольного $p > 1$) результатов о граничных пределах таких функций в различных операторных классах. Приводимое ниже доказательство основано на простой лемме об аккретивных операторах. Содержание этой леммы близко к теореме 9.1 из [3], доказательство которой основано на тонких теоремах теории функции.[4]

[4] Отметим, что из оценки (2.1) легко вытекает и оценка М. Г. Крейна для диссипативных вольтерровых операторах с ядерной мнимой компонентой [3]. Впрочем, получающееся на этом пути доказательство весьма близко к ходу рассуждений в работе [28].

Лемма. *Пусть* $F \in B(H)$, $f \equiv \operatorname{Re} F \geqslant 0$, $f \in \mathfrak{S}_1$, $\tilde{f} \equiv \operatorname{Im} F \in \mathfrak{S}_2$, $\mu > 0$. *Тогда*

$$\operatorname{tr}\left\{ \tilde{f}^2 (\tilde{f}^2 + \mu^2)^{-1} \right\} \leqslant \operatorname{tr}\left\{ \operatorname{Re} (F (F + \mu)^{-1}) \right\} + \| f \|_{\mathfrak{S}_1} / \mu. \tag{2.1}$$

Доказательство. В силу тождества

$$\operatorname{Re} \, [F \, (F + \mu)^{-1}] = (F^* + \mu)^{-1} \, [\mu \operatorname{Re} F + F^* F] \, (F + \mu)^{-1}$$

и условий $F \in \mathfrak{S}_2$, $f \in \mathfrak{S}_1$, имеем $\operatorname{Re} F \, (F + \mu)^{-1} \in \mathfrak{S}_1$. Далее, благодаря однородности достаточно доказать оценку (2.1) при $\mu = 1$. Используя оценку для аккретивных ($\operatorname{Re} F \geqslant 0$) операторов $\| (F + I)^{-1} \| \leqslant 1$ и тождество Гильберта для резольвент, получаем

$$\operatorname{tr} \tilde{f}^2 \, (\tilde{f}^2 + I)^{-1} = \operatorname{tr} \operatorname{Re} \, (i\tilde{f} \, (i\tilde{f} + I)^{-1}) =$$

$$= \operatorname{tr} \, (\operatorname{Re} \, (i\tilde{f} \, (F + I)^{-1}) + \operatorname{Re} \, (i\tilde{f} \, (I + i\tilde{f})^{-1} f \, (F + I)^{-1})) =$$

$$= \operatorname{tr} \, (\operatorname{Re} \, (F \, (F + I)^{-1}) - \operatorname{Re} \, (f \, (F + I)^{-1}) + \operatorname{Re} \, (i\tilde{f} \, (I + i\tilde{f})^{-1} f \times$$

$$\times (F + I)^{-1})) = \operatorname{tr} \, (\operatorname{Re} \, (F \, (F + I)^{-1}) - \operatorname{Re} \, ((I + i\tilde{f})^{-1} f \times$$

$$\times (F + I)^{-1})) \leqslant \operatorname{tr} \operatorname{Re} \, (F \, (F + I)^{-1}) + \| \operatorname{Re} \, ((I + i\tilde{f})^{-1} \times$$

$$\times f \, (F + I)^{-1}) \|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \operatorname{tr} \operatorname{Re} \, (F \, (F + I)^{-1}) + \| f \|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Лемма доказана. Аналогично доказывается и более общий факт

$$\| \tilde{f}^2 (\tilde{f}^2 + \mu^2)^{-1} \|_{\mathfrak{S}} \leqslant \| \operatorname{Re} \, (F \, (F + \mu)^{-1}) \|_{\mathfrak{S}} + \| f \|_{\mathfrak{S}} / \mu$$

при $f \in \mathfrak{S}$, $f \geqslant 0$ и $\tilde{f}^2 \in \mathfrak{S}$, $F = f + i\tilde{f}$, $\mu > 0$, $\mathfrak{S}$ – симметрично-нормированный идеал.

Пусть $T \in \mathfrak{S}_\infty$, тогда $N_\mu(T)$, как обычно [3], это количество s-чисел оператора T, не меньших, чем μ, $\mu \geqslant 0$. Следующая теорема является аналогом теоремы Колмогорова [27] о слабом типе преобразования Гильберта на $\mathbf{R}$, переходя в последнюю при $\dim H = 1$, а также оценки М. Г. Крейна для вольтерровых операторов с ядерной мнимой компонентой [3].

Теорема 1. *Пусть* $T(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}_1)$ (*т. е.* $T(\lambda) = a(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} a \,|_H$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $a^2 \in \mathfrak{S}_1$, *см.* (1.3), *где* $\mathcal{L}$ *и* a – *самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H} \supset H$). *Тогда*

$$\sup_{\mu > 0} \int_{\mathbf{R}} \mu N_\mu \, (T(k)) \, dk \leqslant c_0 \, \| a^2 \|_{\mathfrak{S}_1}, \tag{2.2}$$

где c_0 – *абсолютная постоянная, а* $T(k)$ – *граничные значения* $T(\lambda)$ *на* $\mathbf{R}$, *существующие п. в., согласно* (1.4).

Доказательство теоремы, приводимое ниже, в сущности весьма близко к доказательству Карлесона скалярной теоремы Колмогорова [27] и основано на интегральной теореме Коши. Положим $F(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} -i\,T(\lambda)$, $\operatorname{Re} F(\lambda) \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Согласно тождеству Гильберта,

$$F(\lambda)(I+F(\lambda))^{-1} = -i\alpha(\mathcal{L}-\lambda)^{-1}\alpha(I-i\alpha\times$$

$$\times(\mathcal{L}-\lambda)^{-1}\alpha)^{-1} = -i\alpha(\mathcal{L}-i\alpha^2-\lambda)^{-1}\alpha.$$

Действительно,

$$\alpha(\mathcal{L}-i\alpha^2-\lambda)^{-1}\alpha(I-i\alpha(\mathcal{L}-\lambda)^{-1}\alpha) =$$

$$= \alpha(\mathcal{L}-i\alpha^2-\lambda)^{-1}\alpha+\alpha(\mathcal{L}-i\alpha^2-\lambda)^{-1}(-i\alpha^2)(\mathcal{L}-\lambda)^{-1}\alpha =$$

$$= \alpha(\mathcal{L}-\lambda)^{-1}\alpha.$$

Поскольку оператор $\mathcal{L}+i\alpha^2 = (\mathcal{L}-i\alpha^2)^*$ является максимальным диссипативным оператором в $\mathcal{H}$ [2], то, согласно теореме Б. Секефальви-Надя о дилатациях [2], существует самосопряженный оператор $\tilde{\mathcal{L}}$ в более широком гильбертовом пространстве $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ такой, что

$$(\mathcal{L}-i\alpha^2-\lambda)^{-1} = P(\tilde{\mathcal{L}}-\lambda)^{-1}|_{\mathcal{H}}, \ \mathrm{Im}\,\lambda > 0,$$

где P — ортогональный проектор на $\mathcal{H}$ в $\tilde{\mathcal{H}}$. Следовательно,

$$\alpha(\mathcal{L}-i\alpha^2-\lambda)^{-1}\alpha = \alpha P(\tilde{\mathcal{L}}-\lambda)^{-1}P\alpha \equiv \alpha(\tilde{\mathcal{L}}-\lambda)^{-1}\alpha|_H.$$

В последнем равенстве предполагалось, что оператор α продолжен нулем на подпространство $\tilde{\mathcal{H}} \ominus H$. Прямое вычисление с использованием спектральной теоремы для самосопряженного оператора $\tilde{\mathcal{L}}$ (см. [25]) приводит к тождеству ($\epsilon > 0$)

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{Re}\,[F(k+i\epsilon)(F(k+i\epsilon)+I)^{-1}]\,dk =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \mathrm{Im}(\alpha(\tilde{\mathcal{L}}-k-i\epsilon)^{-1}\alpha)dk \equiv \pi\alpha^2.$$

После интегрирования неравенства (2.1) по переменной k ($F \to F(k+i\epsilon)$, $\epsilon > 0$, $k \in \mathbf{R}$) получаем

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{tr}\left\{(\mathrm{Re}\,T(k+i\epsilon))^2((\mathrm{Re}\,T(k+i\epsilon))^2+I)^{-1}\right\}dk \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{tr}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{Re}\,[F(k+i\epsilon)(I+F(k+i\epsilon))^{-1}]\,dk +$$

$$+ \mathrm{tr}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{Im}\,T(k+i\epsilon)\,dk = 2\pi\,\mathrm{tr}\,\alpha^2,$$

или, после замены $T \to T/\mu$, $\mu > 0$,

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{tr}\left\{(\mathrm{Re}\,T(k+i\epsilon))^2((\mathrm{Re}\,T(k+i\epsilon))^2+\mu^2 I)^{-1}\right\}dk \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\,\|\alpha^2\|_{\mathfrak{S}_1}/\mu.$$

Следовательно,

$$\sup_{\epsilon>0} \int_{\mathbf{R}} d k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu s_n^2(\operatorname{Re} T(k+i\epsilon))}{s_n^2(\operatorname{Re} T(k+i\epsilon))+\mu^2} \leqslant 2\pi \|a^2\|_{\mathfrak{S}_1},$$

а значит,

$$\sup_{\epsilon>0} \int_{\mathbf{R}} d k \;\; \mu N_\mu(\operatorname{Re} T(k+i\epsilon)) \leqslant 2 \times 2\pi \|a^2\|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Пользуясь утверждением о существовании для п. в. $k \in \mathbf{R}$ радиальных пределов $\operatorname{Re} T(k)$ в норме $\mathfrak{S}_p$, $p>1$, и теоремой Фату о предельном переходе, получаем после стремления $\epsilon \to +0$

$$\int_{\mathbf{R}} d k \;\; \mu N_\mu(\operatorname{Re} T(k)) \leqslant 4\pi \|a^2\|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Наконец, оценку (2.2) с $c_0 \leqslant 10\pi$ получаем после учета неравенства

$$\int_{\mathbf{R}} d k \;\; \mu N_\mu(\operatorname{Im} T(k)) \leqslant \int_{\mathbf{R}} d k \;\|\operatorname{Im} T(k)\|_{\mathfrak{S}_1} =$$

$$= \operatorname{tr} \int_{\mathbf{R}} d k \;\operatorname{Im} T(k) = \pi \operatorname{tr} a^2.$$

§ 3. Об асимптотике усредненной функции распределения s-чисел граничных значений функций из класса $R_0(\mathfrak{S}_1)$

Следствием теоремы 1 является утверждение о существовании предела интегралов в левой части выражения (2.2), которое является аналогом (см. § 6) факта о существовании асимптотики s-чисел ($s_n \sim \mathrm{const}/n$, $n \to \infty$) у вольтерровых операторов с ядерной мнимой компонентой [3].

Теорема 2. *Пусть* $T(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}_1)$, *т. е.* $T(\lambda) = a(\mathcal{L}-\lambda)^{-1}a|_H$ *(см. (3)), тогда существует предел*

$$\lim_{\mu \to +0} \int_{\mathbf{R}} \mu N_\mu(T(k))\, d k = 2\|a^2\|_{\mathfrak{S}_1}, \tag{3.1}$$

где $T(k)$ *– граничные значения* $T(\lambda)$ *на* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что [11] ($\mu_1, \mu_2 > 0$)

$$N_{\mu_1+\mu_2}(A+B) \leqslant N_{\mu_1}(A) + N_{\mu_2}(B);\; A, B \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Тогда при произвольном ϵ, $0<\epsilon<1$,

$$\begin{aligned} -N_{\epsilon\mu}(B) + N_{(1+\epsilon)\mu}(A) &\leqslant N_\mu(A+B) \leqslant \\ &\leqslant N_{(1-\epsilon)\mu}(A) + N_{\epsilon\mu}(B). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Разложим $T(\lambda)$ в сумму двух о.-ф. из $R_0(\mathfrak{S}_1)$:

$$T_1(\lambda) \overset{\text{def}}{=} a(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} P_L a,$$

$$T_2(\lambda) \overset{\text{def}}{=} a(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} (I - P_L) a, \ \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

где P_L – спектральный проектор самосопряженного оператора $\mathcal{L}$, отвечающий интервалу спектра $[-L, L]$, $L > 0$. Тогда, согласно неравенству (3.2),

$$-\int_{\mathbf{R}} \mu N_{\epsilon\mu}(T_2(k))\, dk + \mu \int_{\mathbf{R}} N_{(1+\epsilon)\mu}(T_1(k))\, dk \leqslant$$

$$\leqslant \mu \int_{\mathbf{R}} N_\mu(T(k))\, dk \leqslant \mu \int_{\mathbf{R}} N_{\mu(1-\epsilon)}(T_1(k))\, dk +$$

$$+ \mu \int_{\mathbf{R}} N_{\epsilon\mu}(T_2(k))\, dk, \tag{3.3}$$

где по теореме 1

$$\mu \int_{\mathbf{R}} N_{\epsilon\mu}(T_2(k))\, dk \leqslant (c_0/\epsilon)\, \|a(I - P_L)a\|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Последнее неравенство имеет место, поскольку теорема 1 справедлива и при (формально) более общей записи R-функции из $R_0(\mathfrak{S}_1): T(\lambda) = a^*(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} a$, где $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, a – операторы в $\mathcal{H}$, $a \in \mathfrak{S}_2$, с заменой $\|a^2\|_{\mathfrak{S}_1}$ в формуле (2.2) на $\|a^* a\|_{\mathfrak{S}_1}$. В этом легко убедиться, либо повторяя доказательство теоремы 1, либо с помощью простого сведения к случаю $a^* = a$ (при этом приходится изменить и самосопряженный оператор $\mathcal{L}$, снова расширяя пространство $\mathcal{H}$). Наконец, нужное „обобщение" теоремы 1 видно и из того факта, что

$$\tau \operatorname{Im} T_2(i\tau) \xrightarrow[\tau \to +\infty]{\mathfrak{S}_1} a(I - P_L)a.$$

Поскольку $\|a(I - P_L)a\|_{\mathfrak{S}_1} \xrightarrow[L \to \infty]{} 0$, то достаточно доказать существование предела в теореме 2 лишь для о.-ф. $T_1(\lambda)$, т. е. для ограниченных операторов $\mathcal{L}$. Действительно, пусть $\eta > 0$ – произвольно малое число. Выберем ϵ удовлетворяющим неравенствам $c_0 \|a^2\|_{\mathfrak{S}_1} \times \epsilon(1 - \epsilon)^{-1} < \eta$, $0 < \epsilon < 1/2$. После этого, при фиксированном ϵ, найдем столь большое значение L, что $c_0 \|a(I - P_L)a\|_{\mathfrak{S}_1}/\epsilon < \eta$. В силу предполагаемого существования предела (3.1) для о.-ф. T_1 потребуем, чтобы величина μ была столь малой, что

$$|\mu \int_{\mathbf{R}} N_\mu(T_1(k))\, dk - \mu' \int_{\mathbf{R}} N_{\mu'}(T_1(k))\, dk| < \eta$$

при $0 < \mu', \mu < 2\delta$ при некотором $\delta > 0$. Окончательно, исходя из неравенства (3.3), легко получаем, что

$$|\lambda \int_{\mathbf{R}} N_\lambda(T(k))\, dk - \lambda' \int_{\mathbf{R}} N_{\lambda'}(T(k))\, dk| < 7\eta$$

при $0 < \lambda, \lambda' < \delta$. Кроме того, из этих же соображений вытекает, что

$$\lim_{\mu \to 0} \int_{\mathbf{R}} \mu N_\mu(T(k))\, dk = \lim_{L \to \infty} (\lim_{\mu \to 0} \int_{\mathbf{R}} \mu N_\mu(T_1(k))\, dk).$$

Переходим теперь к доказательству существования предела для о.-ф. T_1 при фиксированном L. Пусть P_n – последовательность ортопроекторов на собственные подпространства, соответствующие первым n собственным значениям (с учетом кратности) оператора $a \geqslant 0$. Тогда ($Q_n \overset{\text{def}}{=} I - P_n$)

$$T_1(\lambda) \equiv a P_n (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} P_L P_n a + a Q_n (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} P_L Q_n a +$$
$$+ a Q_n (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} P_L P_n a + a P_n (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} P_L Q_n a. \qquad (3.4)$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют и здесь оценивать каждое из четырех слагаемых „по отдельности". Вклад от второго слагаемого оценивается величиной ($\lambda = k + i\epsilon$)

$$\mu \int_{\mathbf{R}} N_\mu (a Q_n (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} P_L Q_n a)\, dk \leqslant c_0 \, \| a Q_n P_L Q_n a \|_{\mathfrak{S}_1},$$

которая может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно большого n. Третье и четвертое слагаемые оцениваются одинаково. Здесь, в силу конечномерности операторов, $N_\mu (a Q_n \times (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} P_L P_n a) \leqslant n$, $\mu > 0$. Поэтому при подсчете предела при $\mu \to 0$ достаточно оценивать вклад в интеграл по $\mathbf{R}$ лишь от участка $\mathbf{R} \setminus [-2L, 2L]$. Имеем

$$\mu \int_{|k| > 2L} N_\mu (a Q_n (\mathcal{L} - k - i0)^{-1} P_L P_n a)\, dk \leqslant$$
$$\leqslant \mu \int_{|k| > 2L} N_{\mu/2} (a Q_n P_L P_n a / k)\, dk +$$
$$+ \mu \int_{|k| > 2L} N_{\mu/2} (a Q_n (\mathcal{L} - k - i0)^{-1} \mathcal{L} P_L k^{-1} P_n a)\, dk \leqslant$$
$$\leqslant 4 \int_0^\infty N_u (a Q_n P_L P_n a)\, du + \mu \cdot n \cdot \operatorname{mes} \Big\{ k \in \mathbf{R} \setminus$$
$$\setminus [-2L, 2L] : \| a Q_n (\mathcal{L} - k - i0)^{-1} \mathcal{L} P_L k^{-1} P_n a \| \geqslant \mu/2 \Big\} \leqslant$$
$$\leqslant 4 \| a Q_n P_L P_n a \|_{\mathfrak{S}_1} + \mu \cdot n \cdot \operatorname{mes} \Big\{ k \in \mathbf{R} \setminus [-2L, 2L] : \| a Q_n \| \times$$
$$\times \| \mathcal{L} P_L \| \cdot \| P_n a \| \geqslant (\mu/2) |k| (|k| - L) \Big\} \leqslant$$
$$\leqslant 4 \| a \|_{\mathfrak{S}_2} \times \| a Q_n \|_{\mathfrak{S}_2} + \mu n 4 (\| a Q_n \| \times \| \mathcal{L} P_L \| \times$$
$$\times \| P_n a \| / \mu)^{1/2} \leqslant 4 \| a \|_{\mathfrak{S}_2} \| a Q_n \|_{\mathfrak{S}_2} +$$
$$+ \mu^{1/2} n 4 (\| a \| L \| a Q_n \|)^{1/2}.$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства может быть сделано малым, если n достаточно велико, а второе (уже при фиксированном n) – если мала величина μ. Наконец, займемся первым слагаемым в формуле (3.4)

$$a P_n (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} P_L P_n a \equiv a P_n P_L (-\lambda)^{-1} P_n a +$$
$$+ a P_n (\mathcal{L} - \lambda)^{-1} (P_L \mathcal{L}) \lambda^{-1} P_n a .$$

Снова оценим отдельно вклад от второго слагаемого в последнем выражении

$$\mu \int_{|k| \geq 2L} \mathrm{d}k\, N_\mu (a P_n (\mathcal{L} - k - i\,0)^{-1} (P_L \mathcal{L}) k^{-1} P_n a) \leqslant$$
$$\leqslant \mu^{1/2} n 4 \|a\| L^{1/2},$$

что может быть сделано сколь угодно малым при $\mu \to 0$ и любом (фиксированном) значении n. Вклад же от первого слагаемого уже легко подсчитывается непосредственно

$$\mu \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}k\, N_\mu (a P_n P_L k^{-1} P_n a) = 2 \int_{\mathbf{R}_+} \mathrm{d}u\, N_1 (a P_n P_L P_n a u^{-1}) =$$
$$= 2 \int_0^\infty \mathrm{d}u\, N_u (a P_n P_L P_n a) = 2 \|a P_n P_L P_n a\|_{\mathfrak{S}_1} .$$

Следовательно,

$$\lim_{\mu \to +0} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}k\, \mu N_\mu (a P_n (\mathcal{L} - k - i\,0)^{-1} P_L P_n a) =$$
$$= 2 \|a P_n P_L P_n a\|_{\mathfrak{S}_1} .$$

Приведенные выше оценки позволяют утверждать, что существует

$$\lim_{\mu \to +0} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}k\, \mu N_\mu (a (\mathcal{L} - k - i\,0)^{-1} a) = 2 \|a^2\|_{\mathfrak{S}_1} = 2 \operatorname{tr} a^2 .$$

Последнее утверждение и является аналогом факта о существовании асимптотики спектра вещественной части диссипативных вольтерровых операторов T, $\operatorname{Im} T \in \mathfrak{S}_1$ $(\mu n_+ (\mu, \operatorname{Im} T) \underset{\mu \to 0}{\longrightarrow} 0)$,

$$\lim_{\mu \to +0} \mu n_\pm (\mu, \operatorname{Re} T) = \operatorname{tr} (\operatorname{Im} T) / \pi ,$$

где $n_{\underset{(-)}{+}} (\mu, A)$ — функция распределения положительных (отрицательных) собственных чисел $A = A^*$ [3]. Анализ доказательства теоремы 2 легко приводит к чуть более точному утверждению

$$\mu \int_{\mathbf{R}} n_{\underset{(-)}{+}} (\mu, \operatorname{Re} T (k))\, \mathrm{d}k \underset{\mu \to +0}{\longrightarrow} \operatorname{tr} a^2 ,$$

причем расщепление $\operatorname{Re} T(k)$ на положительную (отрицательную) компоненты непосредственно связано здесь (при $\mu \to 0$) с отрицательной (положительной) полуосями по переменной k. Последнее очевидно связано, с тем фактом, что в ходе доказательства теоремы 2 о.-ф. $T(k)$ в пределе $(\mu \to 0)$ заменялась на „аппроксимирующую" $a P_n P_L P_n a / (-k)$.

Более детальный анализ связи между теоремами 1, 2 и теорией вольтерровых операторов проведен в § 6, где указанная связь используется для нахождения доказательства этих теорем.

§ 4. Теоремы о существовании нетангенциальных граничных пределов для оператор-функций из класса $R_0(\mathfrak{S}_1)$

В этом параграфе на основании теоремы 1 будут получены утверждения о существовании нетангенциальных граничных пределов у о.-ф. вида

$$T(\lambda) = \alpha(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} \alpha|_H,$$

$$\operatorname{Im} \lambda > 0, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^*, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \alpha^2 \in \mathfrak{S}_1. \tag{4.1}$$

Отметим, что в этом случае без ограничения общности можно было бы полагать $T(\lambda)$ сжимающей: $\|T(\lambda)\| \leqslant 1$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Действительно, имеет место тождество [25]

$$\alpha(\mathcal{L} - \lambda)^{-1}\alpha = 2\,[\det((I + S(\lambda))/2)]^{-1}\, V(\lambda)\, U(\lambda),$$

где
$$V(\lambda) \overset{\text{def}}{=} ((I + S(\lambda))/2)^{-1} \det((I + S(\lambda))/2),$$

$$U(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \alpha(\mathcal{L} - i\alpha^2/2 - \lambda)^{-1}\alpha/2,$$

$$S(\lambda) \overset{\text{def}}{=} I + i\alpha(\mathcal{L} - i\alpha^2/2 - \lambda)^{-1}\alpha.$$

Здесь непосредственной проверкой легко установить, что все три о.-ф. $U(\lambda)$, $S(\lambda)$, $V(\lambda)$ будут сжимающими [25] при $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Поскольку у сжимающих аналитических о.-ф. в $\mathbf{C}_+$, как известно [2], п. в. на $\mathbf{R}$ существуют нетангенциальные граничные пределы в сильном смысле, то достаточно доказать существование таких пределов (уже в подходящем операторном классе $\mathfrak{S}$) у о.-ф. $U(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}_1)$.

Теорема 3. *Пусть $T(\lambda)$ имеет вид* (4.1), *а $\beta(t)$ – монотонно убывающая неотрицательная суммируемая функция на $\mathbf{R}_+$. Тогда для граничных значений $T(k)$ на $\mathbf{R}$ справедлива оценка*

$$\int_{\mathbf{R}} dk \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T(k))\, \beta(|\ln s_n(T(k))|) \leqslant$$

$$\leqslant c_0\, \|\alpha^2\|_{\mathfrak{S}_1}\, 2\,(\beta(0) + \int_0^{\infty} \beta(t)\, dt), \tag{4.2}$$

где $s_n(T)$ – s-числа оператора T, а α^2, как и ранее, равняется $\mathfrak{S}_1 - \lim\limits_{\tau\to+\infty} \tau \operatorname{Im} T(i\tau)$ (см. (4.1)).

Доказательство теоремы легко получить из неравенства (2.2) с помощью интегрирования по переменной μ. Действительно, полагая вначале $\beta(|t|) \in C^1(\mathbf{R})$, а $\operatorname{rang}\alpha < \infty$, имеем

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}k \sum_n s_n (T(k))\, \beta(|\ln s_n (T(k))|) =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}k \Big(\int_0^\infty \mu\beta\,(|\ln\mu|)\,(-dN_\mu(T(k)))\Big) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}k \int_\epsilon^\infty \mu\,\beta\,(|\ln\mu|)\,(-dN_\mu(T(k))) =$$

$$= \lim_{\epsilon\to+0} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}k\,(\mu\beta\,(|\ln\mu|)\,(-N_\mu(T(k)))\,|_\epsilon^\infty +$$

$$+ \int_\epsilon^\infty N_\mu\,(T(k))\,(\beta\,(|\ln\mu|) + \operatorname{sign}\,(\mu-1) \times$$

$$\times\ \beta'(|\ln\mu|)\,\mathrm{d}\mu) \leqslant \int_0^\infty \mathrm{d}\mu\ (\beta\,(|\ln\mu|) + |\beta'(|\ln\mu|)|)/\mu \times$$

$$\times\ (\mu \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}k\,N_\mu\,(T(k))) \leqslant c_0\,\|\alpha^2\|_{\mathfrak{S}_1} \int_{\mathbf{R}} (\beta\,(|u|) +$$

$$+ |\beta'(|u|)|)\,\mathrm{d}u = 2c_0\,\|\alpha^2\|_{\mathfrak{S}_1}\ (\beta\,(0) + \int_0^\infty \beta\,(u)\,\mathrm{d}u).$$

Общий случай $T(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}_1)$ можно получить с помощью замыкания неравенства (4.2). Так, используя подходящую систему конечномерных ортопроекторов $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} I$, заменим $T(\lambda)$ на $P_n T(\lambda) P_n$, а затем по теореме Фату перейдем к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (4.2). Аналогично можно поступить и с функцией β, применив подходящие C^1-аппроксимации (монотонные) в метрике L_1.

Отметим, что это утверждение эквивалентно теореме 1 в классе сжимающих о.-ф. из $R_0(\mathfrak{S}_1)$. Достаточно взять $\beta(t) \overset{\text{def}}{=} \mu e^t (e^{2t} + \mu^2)^{-1}$, $t \geqslant 0$, $\mu \leqslant 1$. Следствием теоремы 3 будет, разумеется, сходимость ряда $\sum_n s_n\,(T(k))\,\beta(|\ln s_n\,(T\,(k))|) < \infty$ для п. в. $k \in \mathbf{R}$ при условии $\beta \in L_1$, $\beta \downarrow 0$, $\beta\,(0) < \infty$. Для оправдания факта существования нетангенциальных граничных пределов в подходящих классах $\mathfrak{S}$ здесь удобно обратиться к гармоническим функциям в круге. Пусть $T(z) \equiv U(z) + i\,V(z)$, аналитическая функция, $T(0) \in \mathfrak{S}_1$, $U(z) \geqslant 0$, $|z| < 1$ (т. е. $i\,T(z)$ – R-функция в круге). Построим новую аналитическую операторную функцию в круге $\varphi\,(T(z)) \overset{\text{def}}{=} T(z)\,\varphi_0(T(z))$, $|z| < 1$, где

$$\varphi_0(T) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty ((T+t)^{-1} - It^{-1})\,\psi\,(t)\,\mathrm{d}t,\ T \in B(H),\ \operatorname{Re} T \geqslant 0. \qquad (4.3)$$

Предполагается, что скалярная функция ψ подчинена условию

$$\int_0^\infty \frac{|\psi\,(t)|}{t}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Легко проверить, что функции от аккретивных операторов, определенные формулой (4.3), удовлетворяют неравенству ($\operatorname{Re} T_{1,2} \geqslant 0$):

$$\| \varphi(T_1) - \varphi(T_2) \|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant 2 \| T_1 - T_2 \|_{\mathfrak{S}_1} \int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t} dt. \qquad (4.4)$$

Согласно интегральной теореме Коши для аналитических функций ($z \equiv \equiv r \exp(i\theta)$, $0 < r < 1$, $\theta \in [0, 2\pi)$)

$$1/2\pi \int_0^{2\pi} \varphi(iV(re^{i\theta}))\, d\theta = \varphi(T(0)) -$$

$$- 1/2\pi \int_0^{2\pi} [\varphi(T(re^{i\theta})) - \varphi(iV(re^{i\theta}))]\, d\theta,$$

откуда, после применения оценки (4.4), получаем

$$| 1/2\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \varphi(iV(re^{i\theta}))\, d\theta | \leqslant \| T(0) \|_{\mathfrak{S}_1} 4 \int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t} dt. \qquad (4.5)$$

Следовательно,

$$| 1/2\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \varphi(T(re^{i\theta}))\, d\theta | \leqslant$$

$$\leqslant | 1/2\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \varphi(iV(re^{i\theta}))\, d\theta | +$$

$$+ | 1/2\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{tr} (\varphi(T(re^{i\theta})) - \varphi(iV(re^{i\theta})))\, d\theta | \leqslant$$

$$\leqslant \| T(0) \|_{\mathfrak{S}_1} \int_0^\infty \frac{|\psi(t)|}{t} dt\, (4+2).$$

В итоге гармоническая (неотрицательная при $\psi \geqslant 0$) скалярная функция в круге $\operatorname{tr} \operatorname{Re} \varphi(T(z))$ принадлежит классу h^1 [29], а значит, с нетангенциально ограничена п. в. на единичной окружности. Благодаря оценке

$$| \operatorname{tr} \operatorname{Re} \varphi(iV(re^{i\theta})) | \leqslant | \operatorname{tr} \operatorname{Re} \varphi(T(re^{i\theta})) | +$$

$$+ \| U(re^{i\theta}) \|_{\mathfrak{S}_1} 2 \int_0^\infty |\psi(t)| / t\, dt,$$

то же самое справедливо и для функции $\operatorname{tr} \operatorname{Re} \varphi(iV(re^{i\theta}))$ (ясно, что $\| U(re^{i\theta}) \|_{\mathfrak{S}_1} = \operatorname{tr} U(z) \in h^1$). Пусть функция β удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда, выбирая $\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(|\ln t|)$, получим неравенство ($s_n \stackrel{\text{def}}{=} s_n(iV(re^{i\theta}))$):

$$\operatorname{tr} \operatorname{Re} \varphi(iV(re^{i\theta})) \geqslant c_0 \Big(\sum_{s_n \leqslant 1/2} s_n \beta(\ln 1/s_n) +$$

$$+ \sum_{s_n \geqslant 2} s_n \beta(\ln s_n) + \sum_{1/2 < s_n < 2} s_n \beta(\ln 2) \Big),$$

где c_0 — абсолютная постоянная. В итоге выражение

$$\sum_n s_n(iV(z))\,\beta(|\ln s_n(iV(z))|),$$

а вместе с ним ($\operatorname{tr} U(z) \in h^1$) и выражение

$$\sum_n s_n(T(z))\,\beta(|\ln s_n(T(z))|) \tag{4.6}$$

будет нетангенциально ограничено п. в. на единичной окружности.

Замечание. Выбирая $\psi(t)$ в неравенстве (4.5) в виде $\psi(t) = t$, $0 < t \leqslant \mu$, и $\psi(t) = 0$, $t > \mu$ $(\mu > 0)$, аналогично предыдущему получаем

$$4\,\|T(0)\|_{\mathfrak{S}_1}\mu \geqslant 1/2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \sum_n \int_0^{\mu} \frac{s_n^2\, t}{s_n^2 + t^2}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant 1/2\pi \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{s_n \geqslant \mu} 1/2 \int_0^{\mu^2} \frac{s_n^2\,du}{s_n^2 + u} \geqslant$$

$$\geqslant (1/8\pi)\,\mu^2 \int_0^{2\pi} d\theta\, N_\mu(V(re^{i\theta})).$$

Откуда, после учета вещественной компоненты $T(z)$, имеем

$$\sup_{0<r<1} \mu \int_0^{2\pi} d\theta\, N_\mu(T(re^{i\theta})) \leqslant 2\pi\,\|T(0)\|_{\mathfrak{S}_1}(2 \times 4^2 + 2),$$

что и является аналогом теоремы 1 для случая круга.

После пересчета в $\mathbf{C}_+$ в формуле (4.6) получим следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть $T \in R_0(\mathfrak{S}_1)$ (или $R(\mathfrak{S}_1)$), тогда выражение*

$$\sum_n s_n(T(\lambda))\,\beta(|\ln s_n(T(\lambda))|)$$

будет нетангенциально ограничено п. в. на $\mathbf{R}$ для произвольной функции $\beta \in L_1(\mathbf{R}_+)$, $\beta \downarrow 0$, $\beta(0) < \infty$. Иная формулировка этого утверждения: для произвольной функции $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}_+$, такой, что $\varphi(x)/x \downarrow 0$, $x \to +0$, и $\sum_n \varphi(\frac{1}{n}) < \infty$ п. в. на $\mathbf{R}$ будет нетангенциально ограничено выражение $\sum_n \varphi(s_n(T(\lambda)))$ и для граничных значений $\sum_n \varphi(s_n(T(k))) < \infty$ для п. в. $k \in \mathbf{R}$.

Теорема 4 позволяет полностью решить вопрос о существовании нетангенциальных граничных пределов в операторных классах $\mathfrak{S}_\pi$. Напомним, что с.-н. идеал $\mathfrak{S}_\pi$ ($\pi = \{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\pi_n \downarrow 0$) состоит [3] из компактных операторов T, для которых

$$\|T\|_{\mathfrak{S}_\pi} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\,\pi_n < \infty.$$

Теорема 5. *Для существования у произвольной функции из* $R_0(\mathfrak{S}_1)$ *п. в. на* $\mathbf{R}$ *нетангенциальных граничных пределов в классе* $\mathfrak{S}_\pi$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum_n \pi_n/n < \infty$.

Доказательство. (Достаточность). Воспользуемся простой оценкой ($\beta \downarrow 0$, $\beta \in L_1(\mathbf{R}_+)$, $\beta(0) < \infty$, $\sup_{\operatorname{Im}\lambda > 0} \|T(\lambda)\| \leqslant 1$)

$$\sum_n s_n(T(\lambda))\,\beta(\ln n) \leqslant \sum_{n:\, s_n(T(\lambda)) > 1/n} s_n(T(\lambda)) \times$$

$$\times\ \beta(\ln 1/s_n(T(\lambda))) + \sum_n \frac{1}{n}\beta(\ln n),$$

где первое слагаемое в правой части нетангенциально ограничено п. в. на $\mathbf{R}$, а сумма $\sum_n \beta(\ln n)/n < \infty$ в силу условий $\beta \in L_1$, $\beta \downarrow 0$. Выберем $\pi_n \overset{\text{def}}{=} \beta(\ln n)$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда сумма $\sum_n s_n(T(\lambda))\,\pi_n$ будет нетангенциально ограничена п.в. на $\mathbf{R}$. Отсюда уже вытекает, что нетангенциальные пределы, которые существуют п. в. на $\mathbf{R}$ в норме $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$ [25], в действительности достигаются в классе $\mathfrak{S}_{\hat{\pi}}$. Здесь $\hat{\pi} = \{\hat{\pi}_n\}$ – произвольная монотонная последовательность такая, что $\hat{\pi}_n/\pi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ сколь угодно медленно.

Заметим, что условия $\pi_n \downarrow 0$, $\sum \pi_n/n < \infty$ эквивалентны условиям $\beta \downarrow 0$, $\beta \in L_1(\mathbf{R}_+)$ при подходящем определении функции β (по заданной последовательности π_n) между точками $\ln n$, $n = 1, 2, \ldots$ с сохранением монотонности. Наконец, наличие $\mathfrak{S}_\pi - \lim T(\lambda)$ при $\lambda \to k$ нетангенциально для п. в. $k \in \mathbf{R}$ уже в произвольном классе $\mathfrak{S}_\pi$ с условием $\sum_n \pi_n/n < \infty$ следует из элементарного факта: для каждой последовательности $\pi_n \downarrow 0$, $\sum_n \pi_n/n < \infty$ существует последовательность $c_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$, такая, что $\pi_n c_n \downarrow 0$ и $\sum_n \pi_n c_n/n < \infty$.

(Необходимость). Пусть набор $\{\pi_n\}$ таков, что $\pi_n \downarrow 0$, $\sum_n \pi_n/n = \infty$. Воспользуемся тем фактом, что для каждой последовательности натуральных чисел $\{N_i\}_{i=1}^\infty$ и последовательности γ_i, $\gamma_i \geqslant 0$, $\sum_i \gamma_i < \infty$ с условием $\sum_i N_i \gamma_i < \infty$, существует (см. [25]) операторная R-функция $T(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}_1)$, для которой для п. в. $k \in (0, 1)$ последовательность $\{s_n(T(k))\}_{n=1}^\infty$ мажорирует сверху набор чисел $\bigcup_{i=1}^\infty (\bigcup_{k=1}^{N_i} (\gamma_i N_i/k))$ (после соответствующей перестановки для достижения монотонности). Именно

$$T(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^\infty \gamma_i \sum_{k=1}^{N_i} P_{i,k}\left(\frac{k}{N_i} - \lambda\right)^{-1}, \ \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

где $P_{i,k}$ ($k = 1, \ldots, N_i$, $i = 1, 2, \ldots$) – система взаимно ортогональных ортопроекторов в H ранга 1. С учетом элементарных свойств перестановок последовательностей [30] имеем ($M_i \overset{\text{def}}{=} N_1 + \ldots + N_i$)

$$\sum_k \pi_k s_k (T(\not{k})) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=M_{i-1}+1}^{M_i} \pi_k \frac{\gamma_i N_i}{k - M_{i-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_i N_i) \sum_{k=M_{i-1}+1}^{M_i} \pi_k / k.$$

Выберем $N_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ так, чтобы

$$\sum_{k=M_{i-1}+1}^{M_i} \pi_k / k \geqslant i^2, \ i = 1, 2, \ldots$$

Последнее всегда возможно, поскольку $\sum_k \pi_k / k = \infty$. Остается положить $\gamma_i \overset{\text{def}}{=} 1/(i^2 N_i)$, $i \in \mathbf{N}$, откуда ($\not{k} \in (0,1)$)

$$\sum_n \pi_n s_n (T(\not{k})) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} 1/i^2 \times i^2 = \infty,$$

хотя $\sum_i \gamma_i N_i = \sum_i 1/i^2 < \infty$. Таким образом, граничные значения не принадлежат классу $\mathfrak{S}_\pi$ при п. в. $\not{k} \in (0, 1)$.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании граничных пределов в с.-н. идеалах $\mathfrak{S}_\Pi$ [3], сопряженных к идеалам $\mathfrak{S}_\pi$:

$$\mathfrak{S}_\Pi = \left\{ T \in \mathfrak{S}_\infty : \|T\|_{\mathfrak{S}_\Pi} \overset{\text{def}}{=} \sup_n \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k(T)}{\sum_{k=1}^{n} \pi_k} < \infty \right\}.$$

Уточняя сказанное в § 1, отметим без доказательства следующий факт: из наличия для п. в. $\not{k} \in \mathbf{R}$ граничных значений, принадлежащих идеалу $\mathfrak{S}_\Pi$, у произвольной функции из $R_0(\mathfrak{S}_1)$ следует, что $\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi_k / \ln n > 0$. Таким образом, $\mathfrak{S}_\Pi$ заведомо включает в себя $\mathfrak{S}_\Omega$-идеал, сопряженный к идеалу Мацаева. С другой стороны, простым следствием теоремы 5 будет следующее утверждение:

Теорема 6. *Пусть* $T(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}_1)$, *последовательность* B_n ($B_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$) *такова, что* $\sum_n 1/(nB_n) < \infty$, *тогда:*

1) *нетангенциальные граничные пределы* $T(\lambda)$ *существуют при п. в.* $\not{k} \in \mathbf{R}$ *в норме* $\sup_n (\sum_{k=1}^{n} s_k(T))/B_n$;

2) *для произвольной последовательности* $a_n \geqslant 0$, $\sum_n a_n < \infty$ $(T(\not{k}) \equiv \equiv T(\not{k} + i0))$,

$$\sum_{n\geqslant 2} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} s_k (T(\not{k}))\right) / \ln n < \infty \text{ для п. в. } \not{k} \in \mathbf{R};$$

3) *для п. в.* $k \in \mathbf{R}$

$$\varliminf_{n\to\infty} n s_n (T(k)) = \varliminf_{\lambda\to+0} \lambda N_\lambda (T(k)) = 0,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} s_k (T(k))\right)/\ln n = 0.$$

Доказательство. Свойство 1) вытекает из теоремы 5. Действительно,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} s_k (T(k))\right)/B_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} s_k (T(k))/B_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} s_k (T(k))/B_k,$$

поэтому, выбирая $\pi_k = 1/B_k$ в утверждении теоремы 5, получаем нужный результат. Отметим, что условию $\sum_n 1/nB_n < \infty$ удовлетворяет последовательность $B_n \stackrel{\text{def}}{=} \ln n (\ln \ln n)^{1+\epsilon}$, $\epsilon > 0$. Сравнивая этот факт с приведенным выше утверждением о классе $\mathfrak{S}_\Omega$, отметим, что из условия $\sum_n 1/nB_n < \infty$ и монотонности B_n не вытекает, вообще говоря, оценки, лучшей, чем $1/B_n = o(1/\ln n)$, $n \to \infty$. Вопрос о принадлежности граничных значений для п. в. $k \in \mathbf{R}$ классу $\mathfrak{S}_\Omega$ (гипотеза М. Ш. Бирмана) пока является открытым.

Утверждение 2) также легко следует из теоремы 5, достаточно положить $\pi_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} a_k/\ln k$, $n = 2, 3, \ldots$ Первое из предложений 3) можно вывести из формулы (2.2):

$$\int_{\mathbf{R}} \varliminf_{\mu\to 0} \mu N_\mu (T(k))\, dk \leqslant \varliminf_{\mu\to 0} \int_{\mathbf{R}} \mu N_\mu (T(k)) \times$$

$$\times\, dk \leqslant c_0 \|a^2\|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Отсюда вытекает конечность $\varliminf_{\mu\to+0} \mu N_\mu (T(k))$ для п. в. $k \in \mathbf{R}$. Для доказательства, что этот предел равен 0, остается воспользоваться факторизацией оператора $a \in \mathfrak{S}_2$ $(T(\lambda) = a(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} a$, $\operatorname{Im}\lambda > 0)$ в виде произведения $a = a_1 a_2$, где $a_1 \in \mathfrak{S}_2$ и $a_2 \in \mathfrak{S}_\infty$, $a_1 \geqslant 0$, что, разумеется, всегда возможно. Далее, выбирая β в формуле (4.2), равной $\beta(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $0 \leqslant t \leqslant \ln n$, $\beta(t) = 0$, $t > \ln n$, получим в силу монотонности β при произвольном L, $0 < L < \infty$ (предполагаем для простоты $\sup_{\operatorname{Im}\lambda>0} \|T(\lambda)\| \leqslant 1$, что не ограничивает общности):

$$(\ln n + 1) \times \text{const} \geqslant$$

$$\geqslant \int_{|k|\leqslant L} dk \sum_{k:\, s_k(T(k)) > 1/k} s_k (T(k))\, \beta\left(\ln \frac{1}{s_k(T(k))}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{|k|\leqslant L} \sum_{k=1}^{\infty} s_k (T(k))\, \beta(\ln k) - \int_{|k|\leqslant L} \sum_{k=1}^{\infty} \beta(\ln k)/k\, dk \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{|k|\leqslant L} \sum_{k=1}^{n} s_k (T(k))\, dk \leqslant (\text{const} + 2L)(1 + \ln n).$$

Следовательно,

$$\int_{|k|\leqslant L} \varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k(T(k))}{\ln n}\, dk \leqslant (\mathrm{const} + 2L) < \infty,$$

откуда и вытекает требуемое утверждение, что $\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k(T(k))/\ln n < \infty$ для п. в. $k \in \mathbf{R}$. Наконец, обращение в ноль этого предела снова получается после использования факторизации $a = a_1 a_2$, $a_1 \in \mathfrak{S}_2$, $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \in \mathfrak{S}_\infty$, рассмотренной выше, и стандартных оценок для s-чисел произведения операторов [3].

§ 5. Об условиях существования ядерных нетангенциальных граничных значений операторных R-функций

Рассмотрим теперь условия на оператор a, гарантирующие наличие у R-функции $T(\lambda)$ нетангенциальных граничных пределов в ядерной норме, что является важным для работы с определителями возмущения [3] в теории операторов. Из результатов предыдущего параграфа следует, что для справедливости этого факта недостаточно принадлежности $T(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}_1)$, т. е. $a^2 \in \mathfrak{S}_1$ (см. теорему 5). Будем говорить, что оператор $T \in \mathfrak{S}^{(1)} \times \mathfrak{S}^{(2)}$ ($\mathfrak{S}^{(1),(2)}$ – два с.-н. идеала), если T можно представить в виде произведения двух операторов $T = T_1 \times T_2$, где $T_1 \in \mathfrak{S}^{(1)}$, $T_2 \in \mathfrak{S}^{(2)}$. Ниже особый интерес будет представлять случай $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$, где $\mathfrak{S}_\omega$ – класс Мацаева. Здесь нетрудно показать, что s-числа оператора $T \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$ удовлетворяют условию $\sum_n s_n^{1/2}(T)/(n)^{1/2} < \infty$. Если дополнительно $s_n(T)\, n$ монотонно стремится к 0, начиная с некоторого номера n (заметим, что стремление $s_n(T)\, n$ к 0 следует из сходимости ряда $\sum_n s_n^{1/2}(T)/\sqrt{n} < \infty$), то, как легко проверить, оператор $T \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$.[5]

Теорема 7. *Пусть* $T(\lambda) = a(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} a|_H$, *где* $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, $a \geqslant 0$ – *операторы в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H} \supset H$, $a|_{\mathcal{H}\ominus H} = 0$, *и* $a^2 \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$ *(т. е. является произведением ядерного оператора и оператора из класса Мацаева* $\mathfrak{S}_\omega$*). Тогда у* $T(\lambda)$ *п. в. на* $\mathbf{R}$ *существуют нетангенциальные граничные пределы в ядерной норме. С другой стороны, существуют операторные R-функции указанного вида, удовлетворяющие условию* $a^2 \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}_\omega$, *где* $\mathfrak{S}$ – *произвольный с.-н. идеал,* $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}_1$, *граничные значения у которых не принадлежат классу* $\mathfrak{S}_1$ *для п. в.* $k \in \mathbf{R}$.

---

[5] В [25] при переформулировке условия $T \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$ ошибочно пропущено это свойство монотонности. Отметим, что можно построить пример операторной R-функции с условием $\sum_n s_n^{1/2}(a^2)/\sqrt{n} < \infty$ (откуда, разумеется, $a^2 \in \mathfrak{S}_1$), однако $T(k) \notin \mathfrak{S}_1$ для п. в. $k \in \mathbf{R}$. Критерием принадлежности $T \in \mathfrak{S}_\infty$ классу $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$ является выполнение оценки: $s_n(T) = O(a_n \beta_n)$, $n \to \infty$, где $\sum_n |a_n| < \infty$ и $\beta_n \downarrow 0$, $\sum_n \beta_n/n < \infty$. Легко показать, что $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$ образует квазинормированное пространство.

Замечание. Из теоремы 7 сразу же (см. (1.2)) вытекает следующее (формально) более общее утверждение. У произвольной операторной R-функции в полуплоскости $T(\lambda)$, удовлетворяющей условию $T(i) \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$, п. в. на $\mathbf{R}$ существуют нетангенциальные граничные пределы в ядерной норме. Однако более слабое условие $T(i) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}_\omega$ (где $\mathfrak{S}$ – с.-н. идеал, $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}_1$) уже не может гарантировать принадлежности граничных значений $T(k) \in \mathfrak{S}_1$ для п. в. $k \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Пусть $a^2 \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\omega$, тогда, как легко показать, используя простейшие оценки s-чисел [3], можно факторизовать оператор a в виде $a = a_1 a_2$, где $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $a_1^2 \in \mathfrak{S}_1$, $a_2^2 \in \mathfrak{S}_\omega$ и операторы a_1 и a_2 коммутируют. Имеем

$$T(\lambda) = a_2 (a_1 (\mathcal{L} - a)^{-1} a_1) a_2 \stackrel{\text{def}}{=} a_2 T_1(\lambda) a_2, \ \operatorname{Im} \lambda > 0.$$

Согласно неравенству Хорна [3],

$$\| T(\lambda) \|_{\mathfrak{S}_1} = \sum_n s_n (a_2 T_1(\lambda) a_2) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_n s_n^2 (a_2)\, s_n (T_1(\lambda)) = \sum_n \pi_n s_n (T_1(\lambda)),$$

где $\pi_n \stackrel{\text{def}}{=} 2 s_n(a_2^2)$, $\pi_n \downarrow 0$, $\sum \pi_n / n_n < \infty$. Из теоремы 5 вытекает нетангенциальная ограниченность $T(\lambda)$ п. в. на $\mathbf{R}$ в ядерной норме. Для оправдания наличия нетангенциальных граничных пределов п. в. на $\mathbf{R}$ в ядерной норме теперь достаточно использовать факторизацию оператора $a_2 = a_3 a_4$, $a_3 \geqslant 0$, $a_4 \geqslant 0$, $a_3^2 \in \mathfrak{S}_\omega$, $a_4 \in \mathfrak{S}_\infty$, которая, разумеется, возможна.

При построении контрпримера идеал $\mathfrak{S}$ можно заменить на с.-н. идеал $\mathfrak{S}_\pi$, $\pi_n \downarrow 0$. Последнее имеет место, поскольку для каждого с.-н. идеала $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}_1$ существует идеал $\mathfrak{S}_\pi$, $\pi_n \downarrow 0$, такой, что $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{S}_\pi \supset \mathfrak{S}_1$ [25, 30]. Снова, как и в теореме 5, определим $T(\lambda)$ формулой

$$T(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \sum_{k=1}^{N_i} P_{i,k} (k/N_i - \lambda)^{-1}, \ \operatorname{Im} \lambda > 0,$$

где $P_{i,k}$ – система взаимно ортогональных ортопроекторов ранга 1. Последовательность $\gamma_i > 0$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{N_i\}$ будут выбраны позднее. Здесь набор чисел $\{\gamma_i\}$, где каждое число γ_i повторено N_i раз, и будет последовательностью собственных значений положительного оператора a^2 в представлении (1.3). Как и в статье [25] получим для п. в. $k \in (0, 1)$ оценку ядерной нормы граничных значений: $\sum_n s_n(T(k)) \geqslant \geqslant \sum_i \gamma_i N_i \ln N_i$. Положим $\gamma_i \stackrel{\text{def}}{=} 1/(i N_i \ln N_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда, представляя γ_i в виде произведения $\gamma_i = (1/i^2 \ln N_i) \times (i/N_i)$, получим, что $a^2 \in \mathfrak{S}_\pi \times \mathfrak{S}_\omega$ при выполнении следующих условий:

$$1) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2 \ln N_i} \ln \frac{N_1 + \ldots + N_i}{N_1 + \ldots + N_{i-1}} < \infty \ (\Leftrightarrow \ a_2^2 \in \mathfrak{S}_\omega), \tag{5.1}$$

2) последовательность $(i/N_i) \downarrow 0$, $i \to \infty$, и $(M_i \stackrel{\text{def}}{=} N_1 + \ldots + N_i)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \left(\sum_{k=M_{i-1}+1}^{M_i} \pi_k\right)/N_i < \infty.$$

В то же время граничные значения $T(\not{k})$ не будут принадлежать классу $\mathfrak{S}_1$ для $\not{k} \in (0,1)$, поскольку $\sum_i \gamma_i N_i \ln N_i \equiv \sum_i 1/i = \infty$. Монотонное убывание i/N_i обеспечивается условием $N_{i+1} \geqslant 2N_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Первый ряд из условий (5.1) сходится, так как он мажорируется рядом $\sum_i 1/i^2 < \infty$. Наконец, сходимость второго ряда (см. (5.1)) гарантируется условием $\pi_{M_i} \leqslant 1/i^3$, $i = 1, 2, \ldots$ В итоге на последовательность $N_i \uparrow \infty$, $i \to \infty$, наложены два ограничения: $N_{i+1} \geqslant 2N_i$ и $\pi_{(N_1+\ldots+N_i)} \leqslant 1/i^2$, $i = 1, 2, \ldots$ Так как $\pi_n \downarrow 0$, $n \to \infty$, то этим двум условиям можно удовлетворить одновременно, заставляя N_i расти (при $i \to \infty$) достаточно быстро. Переход от интервала $\not{k} \in (0,1)$ ко всей оси $\mathbf{R}$ можно провести так же, как и в [25].

З а м е ч а н и е. Аналогично доказывается следующий факт, близкий к утверждениям теоремы 7. Именно для произвольной последовательности $c_n \downarrow 0$, $n \to \infty$ (сколь угодно медленно), существует операторная R-функция вида (1.3) с $a^2 \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_\pi$, где $\pi = \{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\pi_n = c_n/n$, $n \in \mathbf{N}$, у которой граничные значения для п. в. $\not{k} \in (0,1)$ не принадлежат классу $\mathfrak{S}_1$.

Близким по содержанию к предыдущей теореме является приводимый ниже факт. Заметим, что для оператора $T \in \mathfrak{S}_\Omega$ [3] $\|T\|_{\mathfrak{S}_\Omega} = \sup_{G \in \mathfrak{S}_\omega} \|GT\|_{\mathfrak{S}_1} / \|G\|_{\mathfrak{S}_\omega}$, поэтому его можно интерпретировать как „принадлежность" $T(k)$ ($T(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}_1)$) классу $\mathfrak{S}_\Omega$ „в среднем".

Т е о р е м а 8. *Пусть $T(\lambda) \in R_0(\mathfrak{S}_1)$, тогда существует монотонно возрастающая последовательность измеримых множеств E_n, $\bigcup_n E_n = \mathbf{R}$, таких, что*

$$\sup_{G \in \mathfrak{S}_\omega} \int_{E_n} d\not{k} \frac{\|GT(\not{k})\|_{\mathfrak{S}_1}}{\|G\|_{\mathfrak{S}_\omega}} < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для оправдания этого факта воспользуемся теоремой 3. Ввиду принадлежности $T(\not{k})$ классу $\mathfrak{S}_2$ для п. в. $\not{k} \in \mathbf{R}$ нетрудно выбрать последовательность E_n с указанными свойствами такую, что $\sup_{\not{k} \in E_n} \|T(\not{k})\|_{\mathfrak{S}_2} \leqslant c_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ Как и при доказательстве теоремы 5,

$$\|GT(\not{k})\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \sum_n s_n(G)\, s_n(T(\not{k})) \equiv \sum_n s_n(T(\not{k}))\, \beta(\ln n),$$

где $\beta(t)$ по построению – некоторая монотонно убывающая функция такая, что $\beta(\ln n) \overset{\text{def}}{=} s_n(G)$, $n = 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что

$$\|\beta\|_{L_1(\mathbf{R}_+)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \beta(\ln n)(\ln(n+1) - \ln n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum s_n(G) \frac{1}{n} \equiv \|G\|_{\mathfrak{S}_\omega}.$$

Поэтому, предполагая $\sup\limits_{k\in\mathbb{R}} \|T(k)\| \leqslant 1$, что не ограничивает общности, получим

$$\int\limits_{E_n} \|GT(k)\|_{\mathfrak{S}_1}\, dk \leqslant \int\limits_{E_n} dk\, \Sigma\, s_n(T(k))\, \beta(\ln n) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{E_n} dk\, \Big(\sum_{n:\, s_n(T(k))>1/n} s_n(T(k))\beta\Big(\ln \frac{1}{s_n(T(k))}\Big) +$$

$$+ \sum_n \frac{1}{n}\beta(\ln n)\Big) \leqslant \Big(\int\limits_{E_n} dk \sum_n s_n(T(k)) \times$$

$$\times\, \beta(\ln 1/s_n(T(k)))\Big) + \operatorname{mes} E_n \times \|G\|_{\mathfrak{S}_\omega}\Big).$$

Согласно теореме 3 (пусть $\operatorname{mes} E_n < \infty$), для общего случая $\sup\limits_{k\in E_n} \|T(k)\| \leqslant$ $\leqslant c_n$ имеем

$$\int\limits_{E_n} dk\, \|GT(k)\|_{\mathfrak{S}_1} / (\|G\|_{\mathfrak{S}_\omega} c_n) \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} E_n + 2c_0(\|a^2\|_{\mathfrak{S}_1}/c_n) \times (\|G\| + \|G\|_{\mathfrak{S}_\omega})/\|G\|_{\mathfrak{S}_\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} E_n + 4c_0 \cdot \|a^2\|_{\mathfrak{S}_1}/c_n,$$

что и дает требуемую оценку.

§ 6. Связь с теорией вольтерровых операторов. Операторное преобразование Рисса–Титчмарша

В заключение кратко рассмотрим связь теорем 1, 2 с теорией вольтерровых операторов, о которой говорилось ранее. Для этого воспользуемся установленной В. И. Мацаевым связью вольтерровых операторов с преобразованием Рисса–Титчмарша (а тем самым и с преобразованием Гильберта) [11], являющимся дискретным аналогом преобразования Гильберта. Для случая операторных R-функций следует рассмотреть операторный аналог преобразования Рисса–Титчмарша (оно действует уже в классе последовательностей ядерных операторов) и убедиться, что операторный вариант не доставляет новых осложнений. Преобразование Рисса–Титчмарша возникает, например, следующим образом. Пусть $\delta > 0$ – малый параметр. В оператор-функции $T(\lambda) = a(\mathcal{L} - \lambda)^{-1} a \in$ $\in R_0(\mathfrak{S}_1)$ (см. (1.3)) произведем „дискретизацию" спектра оператора $\mathcal{L}$. Именно совершим замену

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}_\delta \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\delta\, E[n\delta, (n+1)\delta),$$

$\|\mathcal{L} - \mathcal{L}_\delta\| \leqslant \delta$, $P_n \overset{\text{def}}{=} E[n\delta, (n+1)\delta)$ – спектральный проектор оператора $\mathcal{L}$, отвечающий интервалу $[n\delta, (n+1)\delta)$. Тогда

$$T_\delta(\lambda) \overset{\text{def}}{=} a(\mathcal{L}_\delta - \lambda)^{-1} a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n\delta - \lambda)^{-1} a P_n a.$$

Дальнейшая дискретизация по переменной $k \in \mathbf{R}$ $(\lambda = k + i0)$ с шагом δ $(k = \delta\,(m + 1/2),\, m \in \mathbf{Z})$ дает

$$a(\mathcal{L}_\delta - (m + 1/2)\,\delta)^{-1} a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta^{-1} (n - m - 1/2)^{-1} a P_n a.$$

После того как масштабный множитель δ^{-1} (связанный с мерой Лебега на $\mathbf{R}$) будет убран, появляется операторное преобразование Рисса–Титчмарша $l_1(\mathbf{Z}; \mathfrak{S}_1) \to l_\infty(\mathbf{Z}; \mathfrak{S}_1)$:

$$\left\{\xi_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty},\ \xi_n \in \mathfrak{S}_1(H),\ \sum_n \|\xi_n\|_{\mathfrak{S}_1} < \infty \to$$

$$\to \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n + m + 1/2)^{-1} \xi_n\right\}_{m=-\infty}^{\infty}.$$

Здесь проведена замена $m \to -m - 1$, чтобы получить стандартный вид. Следуя [11], введем оператор F в L_2 $((0,1); H)$, где H – гильбертово пространство, в котором действует о.-ф. $T(\lambda)$:

$$(Ff)(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 \mathcal{H}(t - s) f(s)\,\mathrm{d}s,\ f \in L_2\ ((0,1); H).$$

Здесь

$$\mathcal{H}(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp\left\{2\pi n t i\right\},\ t \in [-1, 1],$$

$$\int_{-1}^{1} \|\mathcal{H}(t)\|_{\mathfrak{S}_1}\,\mathrm{d}t \leqslant 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\xi_n\|_{\mathfrak{S}_1} < \infty,$$

$$\|F\| \leqslant \int_{-1}^{1} \|\mathcal{H}(t)\|_{\mathfrak{S}_1}\,\mathrm{d}t < \infty,\ F \in \mathfrak{S}_\infty.$$

Положим $G \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re} A$, где A –вольтерров оператор в L_2 $((0,1); H)$:

$$(Af)(t) \overset{\text{def}}{=} 2i \int_t^1 \mathcal{H}(t - s) f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Пусть $\xi_k \geqslant 0$ и $\left\{e_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{\infty}$, полные ортонормированные системы собственных векторов операторов ξ_k, $k \in \mathbf{Z}$: $\xi_k e_j^{(k)} = \lambda_j^{(k)} e_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots,$ $k \in \mathbf{Z}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{(k)} = \operatorname{tr} \xi_k$. Тогда, как и в скалярном случае [11], легко проверяется, что полной ортонормированной системой собственных векторов оператора G будет набор $\tilde{e}_j^{(k)} \times \exp(-(2k + 1)\pi t i)$, $j = 1, 2, \ldots, k \in \mathbf{Z}$:

$$G\,(e^{-(2k+1)\pi t i} \times \tilde{e}_j^{(k)}) = \left(1/\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_l}{l + k + \frac{1}{2}}\right) e^{-(2k+1)\pi t i} \times \tilde{e}_j^{(k)},$$

где $\tilde{e}_j^{(k)}$ – о. н. система собственных векторов эрмитового в H оператора $\eta_k \overset{\text{def}}{=} {}^1/_\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \xi_l (l+k+{}^1/_2)^{-1}$. В то же время о. н. системой собственных векторов оператора F будет набор $e_j^{(k)} \times \exp(2k\pi t i)$:

$$F e^{2k\pi t i} \times e_j^{(k)} = \lambda_j^{(k)} e^{2k\pi t i} \times e_j^{(k)}, \; j = 1, 2, \dots, \; k \in \mathbf{Z}.$$

Имеем $$\operatorname{tr} F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{(k)} = \sum_k \operatorname{tr} \xi_k, \; F \in \mathfrak{S}_1, \; F = \operatorname{Im} A,$$

при условии $\xi_k \geqslant 0$, $\sum_k \operatorname{tr} \xi_k < \infty$, поэтому

$$\mu\delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_\mu (T_\delta (\delta (k + {}^1/_2))) =$$

$$= \mu\delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_\mu \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} ({}^1/_\delta (k+n+{}^1/_2))\, \xi_n\Big) \equiv$$

$$\equiv \mu\delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_{(\mu\delta/\pi)} (\eta_k) = \pi ({}^{\mu\delta}/_\pi) N_{\mu\delta/\pi}(G) \leqslant \pi ({}^2/\pi) \operatorname{tr} F =$$

$$= 2 \sum_k \operatorname{tr} \xi_k = 2 \sum_k \operatorname{tr} (a P_k a) = 2 \, \| a^2 \|_{\mathfrak{S}_1},$$

где в последнем неравенстве была использована оценка М. Г. Крейна [11], связывающая эрмитовы компоненты вольтерровых операторов. Теперь для получения оценки (2.2) нужно в последнем неравенстве перейти к пределу $\delta \to 0$, проверить, что различие T и T_δ при этом несущественно, а также дополнительно учесть $\operatorname{Im} T(\hbar)$, что несложно.

Попутно видно, что утверждение теоремы 2 является аналогом факта существования асимптотики спектра вещественной части вольтерровых операторов с ядерной мнимой компонентой. Действительно,

$$\lim_{\mu \to +0} \mu\delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_\mu (T_\delta (\delta (k + {}^1/_2))) =$$

$$= \lim_{\mu \to +0} \pi \mu N_\mu (G) = 2 \, \| a^2 \|_{\mathfrak{S}_1}.$$

Таким образом, аналогом факта об асимптотике спектра вольтерровых операторов с ядерной мнимой частью в простейшем случае $\dim H = 1$ (см. [11]) является следующее простое утверждение:

$$\lim_{\lambda \to +0} \lambda \operatorname{mes} \left\{ \hbar \in \mathbf{R} : (\pm) \hat{\varphi}(\hbar) > \lambda \right\} = \Big| \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\, dt \Big|,$$

где $\hat{\varphi}(\hbar) = \mathrm{V.p.} \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) (t - \hbar)^{-1} dt$ – преобразование Гильберта вещественной функции $\varphi \in L_1(\mathbf{R})$.

Автор благодарит М. Ш. Бирмана за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

[1] *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, *1968.*

[2] *Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, *1970.*

[3] *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, *1965.*

[4] *Бирман М. Ш., Энтина С. Б.* Стационарный подход в абстрактной теории рассеяния // Изв. АН СССР. Сер. мат. *1967.* Т. 31, № 2. С. 401–430.

[5] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, *1972.*

[6] *Фаддеев Л. Д.* О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова АН СССР. *1964.* Т. 73. С. 292–313.

[7] *Набоко С. Н.* Функциональная модель теории возмущений и ее приложения в теории рассеяния // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова АН СССР. *1980.* Т. 147. С. 86–114.

[8] *Набоко С. Н.* Об условиях существования волновых операторов в несамосопряженном случае // Проблемы мат. физ., ЛГУ. *1987.* Вып. 12. С. 132–155.

[9] *Asano K.* Notes on Hilbert transforms of vector valued functions in the complex plane and their boundary values // Publ. on the Res. Inst. for Math. Sci. Ser. B. *1967.* N 13. P. 572–577.

[10] *Веселов В. Ф., Набоко С. Н.* Определитель характеристической функции и сингулярный спектр несамосопряженного оператора // Мат. сб. *1986.* Т. 129 (171), № 1. С. 20–29.

[11] *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, *1967.*

[12] *Naboko S. N.* Uniqueness theorems for operator-valued functions with positive imaginary part, and the singular spectrum in the selfadjoint Friedrichs model // Arkiv for Matem. *1987.* Vol. 25, N 1. P. 115–140.

[13] *Набоко С. Н.* О структуре корней оператор-функций с положительной мнимой частью в классах $\mathfrak{S}_p$ // ДАН СССР. *1987.* Т. 295, № 3. С. 538–541.

[14] *Gutierrez J. A., Lacey H. E.* On the Hilbert transform for Banach valued functions // Lect. Notes in Math., Springer. *1982.* Vol. 939. P. 73–80.

[15] *Schwartz J.* A remark on inequalities of Calderon-Zygmund type for vector-valued functions // Comm. on pure and appl. math. *1961.* Vol. 14, N 4. P. 785–799.

[16] *Бухвалов А. В.* Непрерывность операторов в пространствах вектор-функций; приложения к теории базисов // Зап. науч. семин.ЛОМИ им. В. А. Стеклова. *1987.* Т. 157. С. 5–22.

[17] *Burkholder D. L.* A geometrical condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions // Proc. Conf. Harmonic Analysis in Honor of Antony Zygmund, Chicago, 1981, Wadsworth, Belmont. *1983.* P. 270–286.

[18] *Bourgain J., Davis W. J.* Martingale transforms and complex uniform convexity // Trans. Math. Soc. *1986.* Vol. 294, N 2. P. 501–516.

[19] *Bourgain J.* Vector valued singular integrals and the H^1-BMO duality // Israel Semin. Geom. Aspects Funct. Anal., S. I. *1984.* P. XVI. I–XVI. 23.

[20] *Rubio de Francia J. L.* Fourier series and Hilbert transforms with values in VMD Banach spaces // Studia Math. *1985.* Vol. 81, N 1. P. 95–105.

[21] *Burkholder D. L.* Martingale transforms and the geometry of Banach spaces // Lect. Notes Math. *1981.* Vol. 860. P. 35–50.

[22] *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, *1973.*

[23] *Ryan R.* Boundary values of analytic vector valued functions // Proc. Nederl. Acad. van Wetenchappen. Ser. A. *1962.* Vol. 65, N 5. P. 558–572.

[24] *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.: Наука, *1969.*

[25] *Набоко С. Н.* О граничных значениях аналитических оператор-функций с положительной мнимой частью // Зап. науч. семин. ЛОМИ им. В. А. Стеклова. *1987.* Т. 157. С. 55–69.

[26] *Цекановский Э. Р., Шмульян Ю. Л.* Вопросы теории расширения неограниченных операторов в оснащенных гильбертовых пространствах // ВИНИТИ. Итоги науки и тех. Мат. ан. *1977.* Т. 14. С. 59–100.

[27] *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, *1984.*

[28] *Ротфельд С. Ю.* Асимптотика спектра абстрактных интегральных операторов // Тр. М.М.О. *1977.* Т. 34. С. 105–128.

[29] *Duren P.* Theory of H^p-spaces. Acad. Press, *1970.*

[30] *Крейн М. Г., Петунин Ю. Н., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, *1978.*

Ленинградский государственный университет
199034, Ленинград, Университетская наб., 7/9

Поступило 13 марта 1989 г.