Ю. П. Размыслов, Тождества со следом полных матричных алгебр над полем характеристики нуль,
Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974, том 38, выпуск 4, 723–756

https://www.mathnet.ru/im1989

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТОМ 38, № 4, 1974

УДК 519.4

Ю. П. РАЗМЫСЛОВ

ТОЖДЕСТВА СО СЛЕДОМ ПОЛНЫХ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

В работе рассматриваются тождества со следом, выполняющиеся в полной матричной алгебре порядка n. Для случая поля нулевой характеристики доказывается, что все тождества со следом являются следствиями одного тождества со следом, вытекающего из теоремы Гамильтона — Кэли.

Настоящую работу следует рассматривать как попытку найти подход к задаче нахождения тождеств полной матричной алгебры порядка n. Как показывают статьи автора ([1]) и ([2]), нахождение тождеств матричной алгебры второго порядка тесно связано с нахождением лиевых тождеств алгебры Ли $\mathrm{sl}(2, K)$, а нахождение таких специфических тождеств, которые связаны с наличием полиномов Капланского, т. е. полиномов, принимающих на матричной алгебре порядка n значения, равные скалярным матрицам, причем не все нулевые, связано с существованием полиномов, не являющихся тождествами и принимающих значения, равные нулю на $\mathrm{sl}(n, K)$. Исходя из этого, кажется правдоподобным, что решение задачи о тождествах алгебры Ли $\mathrm{sl}(n, K)$ и нахождения полиномов, обращающихся в нуль на $\mathrm{sl}(n, K)$, должно помочь при нахождении тождеств полной матричной алгебры. С другой стороны, даже беглое сравнение § 4 настоящей работы с решением задачи отыскания неприводимых представлений полной линейной группы $\mathrm{GL}(V)$ n-мерного линейного пространства V в тензорном произведении $\otimes V^m$ ([3]) наводит на мысль, что и здесь есть какая-то загадочная связь с тождествами матричной алгебры.

Автор надеется, что выяснение этих связей приблизит решение задачи о тождествах матричной алгебры порядка n.

В настоящей работе находятся все тождества со следом для матричной алгебры над полем характеристики нуль. Интуитивно понятно, что такое тождество со следом: например, для матричной алгебры первого порядка выражение $y - \mathrm{Sp}(y)$ обращается в нуль при подстановке вместо y любой матрицы; то же верно, если в выражение

$$y^2 - y\,\mathrm{Sp}(y) + \frac{1}{2}(\mathrm{Sp}(y))^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(y^2)$$

вместо y подставить любую матрицу второго порядка. Точное определение тождеств со следом, а также понятий обобщенного полинома и вербального идеала будут даны в § 2.

Материал в статье расположен следующим образом.

В § 1 строится полином Капланского и показывается, что $\mathrm{Sp}(y)$ можно выразить в виде отношения двух полиномов Капланского. Это дает возможность получать из каждого тождества со следом обычное тождество матричной алгебры. Кроме того, в этом параграфе строится тождество со следом, которое соответствует теореме Гамильтона — Кэли, и показывается, как из него следует теорема Амицура о минимальном тождестве матричной алгебры.

Основным в работе (точная формулировка результата приведена в § 2) является доказательство того факта, что, по сути дела, кроме только что упомянутого тождества со следом, никаких других не существует. Этому посвящены §§ 3—5.

В § 3 строится некоторая вспомогательная алгебра, при помощи которой на множестве полилинейных обобщенных полиномов степени l от переменных $x_1, \ldots, x_l$ вводится операция, относительно которой это множество превращается в групповую алгебру симметрической группы, действующей на множестве из $l+1$ элемента. Кроме того, для этого множества полилинейных обобщенных полиномов строится билинейная симметрическая форма, ассоциативная относительно введенной операции. Аннулятор этой формы в случае характеристики основного поля, равной нулю, есть в точности все полилинейные тождества со следом степени l.

Таким образом, в множестве всех полилинейных обобщенных полиномов степени l от $x_1, \ldots, x_l$ ($l=1, 2, \ldots$) тождества со следом образуют двусторонние идеалы относительно введенной операции. Оказывается, что вербальные идеалы такие, что для любого натурального числа l множество полилинейных обобщенных полиномов степени l от переменных $x_1, \ldots, x_l$ из этого вербального идеала образует одновременно двусторонний идеал относительно упомянутой выше операции, допускают явное описание на языке таблиц Юнга ([4]). Это описание дается в § 4, где, в частности, доказывается, что всякая возрастающая цепочка этих вербальных идеалов обрывается.

В § 5 на основании результатов § 4 доказывается, что все тождества со следом полной матричной алгебры порядка n над полем характеристики нуль являются следствием тождества со следом, соответствующего теореме Гамильтона — Кэли. Здесь же в виде следствий 1, 2 дается новая эквивалентная формулировка задачи нахождения всех тождеств матричной алгебры порядка n, показывающая, по существу, что для ее решения нужно преодолеть чисто технические трудности. В конце параграфа на основании § 4 дается простое доказательство того, что тождество $(p-1)$-энгелевости не влечет тождества нильпотентности $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ ($k=1, 2, \ldots$), если поле имеет характеристику $p>3$. Одновременно это доказательство показывает, что полилинейные тождества со следом матричной алгебры над полем характеристики $p>0$ нельзя задать аннулятором билинейной формы, упомянутой выше.

Мы будем применять следующие обозначения: M_n — полная матричная алгебра порядка n над полем K, S_l — группа всех подстановок на множестве из l элементов. Через $s(f)$, где $s \in S_l$, $f(x_1, \ldots, x_l)$ — полилинейный полином степени l, мы обозначаем полином $f(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(l)})$, наконец, через $f|_{\substack{x_1=a_1 \\ \cdots \\ x_l=a_l}}$ обозначается выражение, получающееся подстановкой в полином $f(x_1, \ldots, x_l)$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_l$ элементов $a_1, \ldots, a_l$.

Автор искренне признателен А. Л. Шмелькину за внимание к работе.

§ 1. Полиномы Капланского. Полином Гамильтона — Кэли

Цель этого параграфа — убедить читателя на некоторых примерах в полезности изучения тождеств со следом матричной алгебры M_n. Точное определение тождества со следом будет дано в § 2. Для понимания этого параграфа читателю вполне достаточно мыслить тождество со следом как некоторое выражение, в запись которого входит формальная функция след Sp и некоторые переменные и которое обращается в нуль при замене переменных произвольными матрицами из M_n.

Мы начнем изложение материала с простой, но играющей важную роль в этой статье леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $e_1, \ldots, e_{n^2}$—произвольный базис полной матричной алгебры M_n над произвольным полем, а $e_1^*, \ldots, e_{n^2}^*$—дуальный базис относительно билинейной формы, заданной следом $(x, y) = \mathrm{Sp}(xy)$; тогда для любого элемента $a \in M_n$ справедливо равенство*

$$\sum_{t=1}^{n^2} e_t a e_t^* = \mathrm{Sp}(a) \cdot \mathbf{1}, \tag{1}$$

где $\mathbf{1}$ *обозначает единичную матрицу.*

Доказательство. Читатель немедленно проверит, что равенство (1) справедливо в том частном случае, когда за базис $e_1, \ldots, e_{n^2}$ взят базис, состоящий из матричных единиц e_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$. Поэтому нам достаточно проверить, что элемент в левой части равенства (1) не зависит от выбора базиса $e_1, \ldots, e_{n^2}$. Пусть $e_1', \ldots, e_{n^2}'$ — другой базис, причем $e_i' = \sum_{j=1}^{n^2} c_{ji} e_j$, тогда хорошо известно, что $e_i^* = \sum_{j=1}^{n^2} c_{ij} e_j'^*$. Используя эти два равенства, получаем:

$$\sum_{t=1}^{n^2} e_t' a e_t'^* = \sum_{t=1}^{n^2} \sum_{j=1}^{n^2} c_{jt} e_j a e_t'^* = \sum_{j=1}^{n^2} e_j a \left(\sum_{t=1}^{n^2} c_{jt} e_t'^* \right) = \sum_{j=1}^{n^2} e_j a e_j^*,$$

что и показывает независимость элемента в левой части равенства (1) от выбора базиса. Лемма доказана.

В качестве первого приложения этой леммы построим для матричной алгебры M_n над полем K полином Капланского, т. е. полином, не являющийся тождеством M_n и принимающий на M_n значения, равные скалярным матрицам.

В соответствии с обозначениями работы ([2]) обозначим через A_i линейное преобразование, действующее на подпространстве линейного пространства всех некоммутативных полиномов, которое порождено одночленами степени 1 относительно каждой из встречающихся в этом одночлене переменных; по определению, $A_i(ax_ib)=bx_ia$ для каждого такого одночлена.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

$$d=\sum_{s\in S_{n^2}}(-1)^{\varepsilon(s)}y_1x_{s(1)}y_2x_{s(2)}\dots y_{n^2}x_{s(n^2)}y_{n^2+1},$$

где сумма берется по всем подстановкам s *на множестве* $(1,\dots,n^2)$, $\varepsilon(s)=0,1$ *в зависимости от четности подстановки* s; *тогда полином*

$$c=\sum_{i=1}^{n^2}x_iy_0\{(A_id)|_{x_i=1}\}$$

является полиномом Капланского алгебры M_n.

Доказательство. Пусть $e_1,\dots,e_{n^2}$ — базис в M_n, $\mathcal{F}$ — поле частных кольца многочленов от коммутативных переменных $x_i^{(j)}$, $y_i^{(j)}$, $j=1,\dots$ $\dots,n^2$, $i=0,1,2,\dots$, над полем K. Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что если в полиноме c положить

$$x_i=\sum_{j=1}^{n^2}x_i^{(j)}e_j,\qquad y_i=\sum_{j=1}^{n^2}y_i^{(j)}e_j,$$

то получившееся выражение будет равно ненулевой скалярной матрице. Мы докажем больше, а именно, что при такой замене переменных в $\mathcal{F}\otimes_K M_n$ имеет место равенство

$$c=\mathrm{Sp}\,(y_0)\cdot\mathrm{Sp}\,(d)\cdot\mathbf{1}. \tag{2}$$

Для доказательства этого равенства научимся сначала вычислять след. Пусть $u=ax_ib$ — слово степени 1 по каждой встречающейся в нем переменной, тогда, в силу хорошо известного свойства следа $\mathrm{Sp}(AB)=$ $=\mathrm{Sp}(BA)$, имеем:

$$\mathrm{Sp}\,(ax_ib)=\mathrm{Sp}\,(x_iba),$$

или, в соответствии с введенным выше определением оператора A_i,

$$\mathrm{Sp}\,(x_j\,(A_iu)|_{x_i=1})=\mathrm{Sp}\,(u\,|_{x_i=x_j}). \tag{3}$$

Рассмотрим элементы $x_1,\dots,x_{n^2}$ и $(A_id)|_{x_i=1}$ $(i=1,\dots,n^2)$. Очевидно, что $x_1,\dots,x_{n^2}$ образуют базис матричной алгебры $\mathcal{F}\otimes_K M_n$ над полем $\mathcal{F}$; кроме того, в соответствии с (3)

$$\mathrm{Sp}\,(x_j\,(A_i\,d)|_{x_i=1})=\mathrm{Sp}\,(d\,|_{x_i=x_j}).$$

Но полином d устроен таким образом, что он обращается в нуль, если в него вместо x_i подставить x_j при любом $j=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n^2$. Значит, элементы $(A_i d)|_{x_i=1} (i=1, \ldots, n^2)$ образуют с точностью до множителя $\mathrm{Sp}(d)$ базис, дуальный к x_i $(i=1, \ldots, n^2)$ относительно билинейной формы, заданной следом, и равенство (2) является прямым следствием леммы 1. Остается проверить, что правая часть равенства (2) не равна нулю. Ясно, что $\mathrm{Sp}(y_0)\neq 0$. Надо проверить, что $\mathrm{Sp}(d)\neq 0$. Так как элементы $x_i=\sum_{j=1}^{n^2} x_i^{(j)}e_j$, $y_i=\sum_{j=1}^{n^2} y_i^{(j)}e_j$ «общего вида» для алгебры M_n, то достаточно проверить, что $\mathrm{Sp}(d)\neq 0$ при некоторой подстановке вместо x_i, y_i матричных единиц e_{st}. Положим

$$x_{i+n(j-1)} = e_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n), \quad y_1 = e_{11}, \quad y_{n^2+1} = e_{n1},$$

а при $t=2, \ldots, n^2$ положим

$$y_t = e_{kl}, \quad \text{если} \quad x_{t-1} = e_{rk}, \quad x_t = e_{ls}.$$

При такой подстановке в полиноме d только одночлен $y_1x_1y_2x_2\ldots$ $\ldots y_{n^2}x_{n^2}y_{n^2+1}=e_{11}$ не обратится в нуль и, следовательно, $\mathrm{Sp}(d)=1$. Теорема доказана.

Начиная с этого момента, мы будем считать, что основное поле K, над которым рассматривается матричная алгебра M_n, имеет характеристику, равную нулю, хотя для некоторых из последующих результатов это несущественно.

В ходе доказательства теоремы 1 мы получили равенство (2). Подставим в обе части этого равенства $y_0=1$, тогда, учитывая, что $\mathrm{Sp}(1)=n$ в M_n, получим равенство

$$c|_{y_0=1} = n\,\mathrm{Sp}(d)\cdot 1,$$

благодаря которому (2) можно переписать следующим образом:

$$c = \frac{1}{n}\,\mathrm{Sp}(y_0)\{c|_{y_0=1}\}. \tag{4}$$

В этом равенстве c и $c|_{y_0=1}$ — полиномы Капланского, и оно справедливо при подстановке вместо переменных любых матриц из M_n. Это равенство не является тождеством в обычном смысле, так как в него входит след. Однако оно указывает на возможность получения обычного тождества алгебры M_n из выражений вида

$$\sum \alpha_{a_0,a_1,\ldots,a_t} a_0\,\mathrm{Sp}(a_1)\ldots\mathrm{Sp}(a_t) = 0, \tag{$*$}$$

где $a_0, \ldots, a_t$ — слова от переменных $x_1, x_2, \ldots$. Для этого нужно выражение $(*)$ умножить на достаточно большую степень полинома $c|_{y_0=1}$ и применить (4), чтобы избавиться от следов.

Перейдем теперь к построению тождества со следом, относительно которого в §§ 3—5 будет доказано, что все остальные тождества со следом алгебры M_n являются его следствиями.

Важный пример. Теорема Гамильтона — Кэли утверждает, что характеристический полином произвольной матрицы y обращается в нуль при подстановке в него y, т. е. $\{\mathrm{Det}(\lambda\cdot 1 - y)\}|_{\lambda=y}=0$. Но

$$\mathrm{Det}(\lambda\cdot 1 - y) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\lambda^{n-i},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические корни матрицы y, а σ_i — элементарные симметрические функции. Хорошо известно, что в случае поля характеристики нуль каждое $\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ может быть выражено через полиномы от $\lambda_1^k + \ldots + \lambda_n^k = \mathrm{Sp}(y^k)$, где $k=1, 2, \ldots, n$. Следовательно,

$$\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = g_i(\mathrm{Sp}(y), \ldots, \mathrm{Sp}(y^n)) \tag{5}$$

и теорема Гамильтона — Кэли дает некоторое тождество со следом:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i g_i(\mathrm{Sp}(y), \ldots, \mathrm{Sp}(y^n))\, y^{n-i} = 0.$$

Левую часть этого равенства мы будем называть полиномом Гамильтона — Кэли и обозначать через $f_n(y)$. Можно привести рекуррентную формулу для вычисления полинома Гамильтона — Кэли для матричной алгебры M_n:

$$f_1 = y - \mathrm{Sp}(y), \quad f_n = f_{n-1}\cdot y - \frac{1}{n}\mathrm{Sp}(f_{n-1}\cdot y).$$

Нам эти формулы не понадобятся, для наших целей достаточно знать, что полином Гамильтона — Кэли имеет вид

$$_n(y) = y^n + \sum_{\substack{r_0+\ldots+r_t=n\\ r_1^2+\ldots+r_t^2\neq 0}} \alpha_{r_0,r_1,\ldots,r_t} y^{r_0}\mathrm{Sp}(y^{r_1})\ldots\mathrm{Sp}(y^{r_t})$$

для некоторых рациональных коэффициентов, зависящих только от n, а это можно усмотреть из сравнения степеней обеих частей равенства (5).

Мы закончим этот параграф доказательством теоремы Амицура о том, что в M_n выполняется стандартное тождество степени $2n$:

$$P_{2n} = \sum_{s\in S_{2n}}(-1)^{\varepsilon(s)}x_{s(1)}\ldots x_{s(2n)}.$$

Сначала покажем, каким образом тождество P_{2n} можно получить из тождества y^n. Полная линеаризация тождества y^n дает тождество

$\sum_{s\in S_n} x_{s(1)}\dots x_{s(n)}$, которое обозначим через $g(x_1, \dots, x_n)$. Подстановка в это тождество коммутаторов $x_i = [x_{2i-1}, x_{2i}]$, $i=1, \dots, n$, с последующей кососимметризацией получившегося выражения дает равенство

$$\sum_{s\in S_{2n}} (-1)^{\varepsilon(s)} s\,(g|_{\substack{x_1=[x_1,x_2]\\ \dots\dots\\ x_n=[x_{2n-1},x_{2n}]}}) = \beta P_{2n},$$

и можно проверить, что число $\beta\neq 0$. Это показывает, что P_{2n} есть следствие тождества y^n. Дословно это же рассуждение проходит для того, чтобы получить тождество P_{2n} из тождества Гамильтона — Кэли f_n, если заметить, что

$$\sum_{s\in S_{2n}} (-1)^{\varepsilon(s)} s\,\{(a_0 \operatorname{Sp}(a_1)\,\dots\,\operatorname{Sp}(a_t))|_{\substack{x_1=[x_1,x_2]\\ \dots\dots\\ x_n=[x_{2n-1},x_{2n}]}}\} = 0,$$

где $a_0, \dots, a_t$ — слова от $x_1, \dots, x_n$, причем слово $a_0a_1\dots a_t$ имеет степень 1 по каждой переменной $x_i (i=1, \dots, n)$. Действительно, если длина слова a_i равна $r_i(i=1, \dots, t)$, то сумму в левой части равенства можно разбить на такие слагаемые, которые с точностью до замены переменных равны $P_{2r_0}\operatorname{Sp}(P_{2r_1})\dots\operatorname{Sp}(P_{2r_t})$. Но так как $\operatorname{Sp}(AB)=\operatorname{Sp}(BA)$ для любых матриц A, $B\in M_n$, то $\operatorname{Sp}(P_{2m})=0$ для любого натурального числа m. Отсюда заключаем, что в результате указанного процесса получения P_{2n} из f_n ненулевые члены получаются только из y^n. В силу сказанного выше это и доказывает теорему Амицура.

§ 2. Алгебра обобщенных полиномов. Основные понятия

В этом параграфе мы займемся формализацией задачи о тождествах со следом матричной алгебры M_n и сформулируем точно основной результат статьи. Для этого будет построена алгебра обобщенных полиномов, которая будет играть для тождеств со следом ту же роль, какую алгебра некоммутативных полиномов играет для обычных тождеств.

Для построения этой алгебры необходимы переменные $x_1, x_2, x_3, \dots$ и формальная функция след $\operatorname{Sp}(\quad)$. Сначала мы построим некоторую вспомогательную полугруппу, которую обозначим через G_0. Элементы G_0 определяем индуктивно:

1) всякое непустое слово конечной длины от переменных $x_1, x_2, \dots$ — элемент из G_0;

2) если A и B — элементы из G_0, то и AB — элемент из G_0;

3) если a — непустое слово и A, B — элементы из G_0, то $\operatorname{Sp}(AaB)$, $\operatorname{Sp}(aB)$, $\operatorname{Sp}(Aa)$ — элементы из G_0.

Пункт 2) этого определения задает операцию умножения из G_0 как приписывание к элементу A элемента B, относительно которой G_0 превращается в полугруппу. Читателю следует обратить особое внимание на пункт 3), в силу которого выражения вида $\mathrm{Sp}(\mathrm{Sp}(\ldots))$ не являются элементами из G_0.

Пусть G — полугруппа, получающаяся как фактор-полугруппа G_0 по следующей конгруэнции:

$$\mathrm{Sp}(A)B = B\,\mathrm{Sp}(A), \tag{6}$$

$$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA), \tag{7}$$

$$\mathrm{Sp}(A\,\mathrm{Sp}(B)) = \mathrm{Sp}(A)\,\mathrm{Sp}(B) \tag{8}$$

для любых $A, B \in G_0$ таких, что все выражения, встречающиеся в (6)—(8), определены. В силу соотношений (6)—(8) ясно, что G, как полугруппа, порождается элементами вида a, $\mathrm{Sp}(b)$, где a и b — произвольные непустые слова, и, следовательно, любой элемент из G имеет вид

$$a_0\,\mathrm{Sp}(a_1)\,\ldots\,\mathrm{Sp}(a_t), \tag{9}$$

где a_i — слова, причем $a_1, \ldots, a_t$ — не пустые слова. Представление элементов полугруппы G, очевидно, неоднозначно, однако эту неоднозначность легко преодолеть, если в качестве представителя класса конгруэнтных элементов вида (9) взять такой элемент, чтобы слово $a_0a_1\ldots a_t$ было максимальным в смысле лексиграфической упорядоченности.

Алгеброй обобщенных полиномов над полем K мы будем называть полугрупповую алгебру над полем K полугруппы G, элементы G — обобщенными одночленами, а элементы алгебры — обобщенными полиномами. Для обозначения этой алгебры будет применяться буква $\mathcal{G}$. Для каждого обобщенного одночлена можно естественно определить его степень относительно переменной x_i как число раз, которое x_i встречается в записи одночлена. Таким образом, всякому обобщенному одночлену от $x_1, \ldots, x_l$ можно поставить в соответствие набор чисел $(r_1, \ldots, r_l)$, где r_i равно степени этого одночлена относительно x_i. Этот набор чисел мы будем называть типом обобщенного одночлена, а обобщенный полином, равный линейной комбинации обобщенных одночленов одного типа $(r_1, \ldots, r_l)$, будем называть однородным обобщенным полиномом типа $(r_1, \ldots, r_l)$; например,

$$x_1x_2 + x_2\,\mathrm{Sp}(x_1) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(x_2x_1)$$

— однородный обобщенный полином типа (1,1), а полином x_1+x_2 не является однородным. Однородный обобщенный полином $f(x_1, \ldots, x_l)$ типа $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{l\ \text{раз}})$ мы будем называть полилинейным обобщенным полиномом степени l.

Положим по определению

$$\mathrm{Sp}\Big(\sum \alpha_{a_0,a_1,\ldots,a_t}a_0\,\mathrm{Sp}(a_1)\,\ldots\,\mathrm{Sp}(a_t)\Big) = \\ = \sum \alpha_{a_0,a_1,\ldots,a_t}\,\mathrm{Sp}(a_0)\,\mathrm{Sp}(a_1)\,\ldots\,\mathrm{Sp}(a_t), \tag{10}$$

когда правая часть определена. Нетрудно видеть, что правая часть (10) определена тогда и только тогда, когда все слова a_0 не пустые.

Для любого обобщенного полинома $g(x_1, \ldots, x_l) \in \mathcal{G}$ и любых матриц $B_1, \ldots, B_l \in M_n$ можно построить выражение $g(B_1, \ldots, B_l)$, в котором $\mathrm{Sp}(B)$ интерпретируется как скалярная матрица, у которой на главной диагонали стоит элемент поля K, равный следу матрицы B. При такой интерпретации равенства (6)—(8), (10) выражают хорошо известные свойства функции Sp.

Определение 1. Обобщенный полином $g(x_1, \ldots, x_l) \in \mathcal{G}$ называется *тождеством со следом матричной алгебры* M_n, если $g(B_1, \ldots, B_l) = 0$ для любых матриц $B_1, \ldots, B_l \in M_n$.

Заметим, что понятие тождества алгебры M_n естественным образом согласовано с определением 1, так как подалгебра, порожденная $x_1, x_2, \ldots$ в алгебре обобщенных полиномов $\mathcal{G}$, является свободной ассоциативной алгеброй.

Ясно, что множество тождеств со следом для M_n образует двусторонний идеал в $\mathcal{G}$. Более того, если $g(x_1, \ldots, x_l)$ — тождество со следом для M_n и обобщенные полиномы $h_1, \ldots, h_l$ имеют вид такой же, как выражение, стоящее под знаком следа в левой части выражения (10), причем все a_0 — непустые слова, то $g(h_1, \ldots, h_l)$ тоже является тождеством со следом для алгебры M_n.

Определение 2. Двусторонний идеал I в алгебре обобщенных полиномов $\mathcal{G}$ называется *вербальным идеалом*, если для любых обобщенных полиномов $h_1, \ldots, h_l \in \mathcal{G}$, имеющих вид

$$\sum \alpha_{a_0, a_1, \ldots, a_t} a_0 \, \mathrm{Sp}(a_1) \ldots \mathrm{Sp}(a_t),$$

где все слова a_0 непустые (для слов $a_1, \ldots, a_t$ это следует из определения алгебры $\mathcal{G}$), из того, что $g(x_1, \ldots, x_l) \in I$ следует, что $g(h_1, \ldots, h_l) \in I$ для любого обобщенного полинома g.

В силу этого определения и сказанного выше множество тождеств со следом образует вербальный идеал в $\mathcal{G}$.

Определение 3. Обобщенный полином g называется *следствием обобщенных полиномов* $g_1, \ldots, g_l$, если вербальный идеал, порожденный $g_1, \ldots, g_l$ (т. е. наименьший вербальный идеал, содержащий $g_1, \ldots, g_l$), содержит и g. Два множества обобщенных полиномов называются *эквивалентными*, если вербальные идеалы, порожденные каждым из этих множеств, совпадают.

Точно так же, как для обычных тождеств алгебры M_n, можно поставить задачу о нахождении всех тождеств со следом алгебры M_n, в частности, вопрос о существовании такого конечного множества тождеств со следом алгебры M_n, чтобы все остальные тождества со следом являлись бы их следствием. Ответ на эти вопросы дает следующая

ТЕОРЕМА 2. *Все тождества со следом полной матричной алгебры M_n над полем характеристики нуль являются следствиями тождества Гамильтона — Кэли $\mathfrak{f}_n$.*

Эта теорема означает, что всякое тождество со следом алгебры M_n лежит в вербальном идеале, порожденном f_n.

Из соотношений (6)—(8) видно, что всякий вербальный идеал порождается своими полилинейными обобщенными полиномами, поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно проверить, что все полилинейные тождества со следом следуют из f_n.

Обозначим через T_l множество обобщенных полилинейных полиномов от переменных $x_1, \ldots, x_l$ типа $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{l \text{ раз}})$.

ЛЕММА 2. *Размерность линейного пространства T_l равна* $(l+1)!$

Доказательство. В силу определения алгебры обобщенных полиномов нам достаточно доказать, что в полугруппе G $(l+1)!$ полилинейных обобщенных одночленов от $x_1, \ldots, x_l$. Как отмечалось выше, каждый элемент из $G \cap T_l$ однозначно представим в виде

$$a_0 \operatorname{Sp}(a_1) \ldots \operatorname{Sp}(a_t), \tag{11}$$

где $a_1, \ldots, a_t$ — непустые слова, причем полилинейное слово $a_0 a_1 \ldots a_t > > b_0 b_1 \ldots b_t$ в смысле лексикографической упорядоченности, если $b_0 \operatorname{Sp}(b_1) \ldots \operatorname{Sp}(b_t)$ конгруэнтно $a_0 \operatorname{Sp}(a_1) \ldots \operatorname{Sp}(a_t)$ относительно (6)—(8). Пусть a_0 — непустое слово, тогда количество обобщенных одночленов вида $x_i a_0' \operatorname{Sp}(a_1) \ldots \operatorname{Sp}(a_t)$ (x_i фиксировано) из индуктивных соображений равно $l!$ и, следовательно, общее число обобщенных одночленов вида (11), где a_0 — непустое слово, равно $l(l!)$. Если же a_0 — пустое слово, то $a_1 = x_l a_1'$ и число таких обобщенных одночленов совпадает с числом обобщенных одночленов $a_1' \operatorname{Sp}(a_2) \ldots \operatorname{Sp}(a_t)$, которое равно по индукции $l!$. Следовательно, общее число элементов вида (11) равно $(l+1)!$.

Лемма доказана.

§ 3. Вспомогательная алгебра и билинейная форма

В этом параграфе мы сведем задачу нахождения полилинейных тождеств со следом степени l к задаче классификации двусторонних идеалов групповой алгебры $K[S_{l+1}]$ симметрической группы S_{l+1}.

I. Алгебра $\mathcal{G}_n$. Пусть M_n — полная матричная алгебра порядка n над комплексным полем C, σ — антиизоморфизм алгебры M_n, являющийся композицией транспонирования матрицы и комплексного сопряжения, $e_1, \ldots, e_{n^2}$ — ортонормированный базис алгебры M_n относительно билинейной формы $(x, y) = \operatorname{Sp}(xy)$ и $\sigma(e_i) = e_i$ (в качестве первых n векторов можно взять матричные единицы e_{ii}, а за остальные можно взять, например, $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_{kl} + e_{lk})$, $\sqrt{\frac{-1}{2}}(e_{kl} - e_{lk})$, $k > l$). Пусть $\mathcal{F}$ — коммутативная алгебра над полем C с образующими $x_i^{(j)}$, $j = 1, \ldots, n^2$, $i = 1, 2, \ldots$, и определяющими соотношениями

$$x_i^{(j)} x_i^{(t)} x_i^{(k)} = 0, \quad x_i^{(j)} x_i^{(t)} = \delta_{jt} (x_i^{(1)})^2. \tag{12}$$

Обозначим через $\tilde{M}_n$ матричную алгебру над кольцом $\mathscr{F}-\mathscr{F}\otimes_C M_n$ и рассмотрим в ней подалгебру $\mathscr{G}_n$, порожденную всеми элементами вида

$$\bar{x}_i=\sum_{j=1}^{n^2} x_i^{(j)}e_j,\qquad \mathrm{Sp}\,(\bar{x}_{i_1}\bar{x}_{i_2}\,\dots\,\bar{x}_{i_k}).$$

Здесь и в дальнейшем через $\mathrm{Sp}(B)$ мы обозначаем скалярную матрицу, у которой на диагонали стоит элемент, равный следу.

Отметим свойства алгебры $\mathscr{G}_n$.

1°. Рассмотрим элемент $\bar{x}_i a\bar{x}_i$, где a — произвольный элемент алгебры $\tilde{M}_n$. В силу леммы 1 и соотношений (12) получаем:

$$\bar{x}_i a\bar{x}_i=(x_i^{(1)})^2\sum_{j=1}^{n^2} e_jae_j=(x_i^{(1)})^2\,\mathrm{Sp}\,(a).$$

Если $a=\mathbf{1}$, то

$$\bar{x}_i^2=n\,(x_i^{(1)})^2\cdot\mathbf{1}$$

и, следовательно,

$$\bar{x}_i a\bar{x}_i=\frac{\bar{x}_i^2}{n}\,\mathrm{Sp}\,(a),\qquad \bar{x}_i\bar{x}_i=n\cdot\frac{\bar{x}_i^2}{n}\tag{13}$$

для любого элемента $a\in\mathscr{G}_n$. Из равенства (13) находим:

$$[\bar{x}_i^2,\bar{x}_j]=0,\qquad [\bar{x}_i a\bar{x}_i,\bar{x}_j]=0,\qquad \bar{x}_i ab\bar{x}_i=\bar{x}_i ba\bar{x}_i.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\bar{x}_i\bar{x}_j\bar{x}_i\bar{x}_j=\frac{\bar{x}_i^2}{n}\,\mathrm{Sp}\,(\bar{x}_j)\,\bar{x}_j=\frac{\bar{x}_i^2}{n}\,(x_j^{(1)}+\,\dots+x_j^{(n)})\,\bar{x}_j=\frac{\bar{x}_i^2}{n}\,(x_j^{(1)})^2=\frac{\bar{x}_i^2}{n}\,\frac{\bar{x}_j^2}{n}.$$

Из этих равенств получаем:

$$\bar{x}_i\bar{x}_ja\bar{x}_i\bar{x}_j=\bar{x}_ia\bar{x}_j\bar{x}_i\bar{x}_j=\bar{x}_i\bar{x}_j\bar{x}_i\bar{x}_ja=\frac{\bar{x}_i^2}{n}\,\frac{\bar{x}_j^2}{n}\,a.$$

С другой стороны, из (13) следует, что

$$\bar{x}_i\bar{x}_ja\bar{x}_i\bar{x}_j=\frac{\bar{x}_i^2}{n}\,\mathrm{Sp}\,(\bar{x}_ja)\,\bar{x}_j.$$

Сравнение двух последних равенств с учетом того, что $\dfrac{\bar{x}_i^2}{n}$ — ненулевая скалярная матрица, показывает, что для любого $a\in\mathscr{G}_n$

$$\mathrm{Sp}\,(\bar{x}_ja)\,\bar{x}_j=\frac{\bar{x}_j^2}{n}\,a.\tag{14}$$

В силу вышесказанного, очевидны следующие равенства:

$$[\bar{x}_i^2,\bar{x}_j]=0,\qquad \mathrm{Sp}\,(\bar{x}_i^2a)=\bar{x}_i^2\,\mathrm{Sp}\,(a),\qquad \mathrm{Sp}\,(\bar{x}_i^2)=n\bar{x}_i^2.\tag{15}$$

Наконец, первое из определяющих соотношений (12) показывает, что обобщенный одночлен от $\bar{x}_j$

$$w = 0, \tag{16}$$

если его степень относительно некоторого $\bar{x}_i$ строго больше двух. Равенство (16) показывает, что всякий однородный обобщенный полином от $\bar{x}_j$ степени $\geqslant 3$ относительно некоторого $\bar{x}_i$ равен нулю. Из (13)—(15) вытекает, что для всякого обобщенного однородного полинома $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})$ степени 2 относительно $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ и степени 1 относительно $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$

$$f(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_s}, \bar{x}_{j_1}, \ldots, \bar{x}_{j_t}) = \frac{\bar{x}_{i_1}^2}{n} \cdots \frac{\bar{x}_{i_s}^2}{n} g(\bar{x}_{j_1}, \ldots, \bar{x}_{j_t}), \tag{17}$$

где $g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})$ — обобщенный полином.

2°. Частный случай равенства (17), когда $t=0$, особенно интересен. В этом случае

$$f = \alpha(f) \frac{\bar{x}_{i_1}^2}{n} \cdots \frac{\bar{x}_{i_s}^2}{n}, \tag{18}$$

где $\alpha(f) \in C$ — однозначно определенное обобщенным полиномом f число, причем

$$\operatorname{Sp}(f(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_t})) = n\alpha(f) (x_{i_1}^{(1)})^2 \cdots (x_{i_s}^{(1)})^2. \tag{19}$$

Пусть $u(x_1, \ldots, x_l)$ — полилинейный полином. Обозначим через $\bar{u}$ матрицу $u(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_l) \in \mathcal{G}_n$, тогда элемент, стоящий в ней на пересечении i-ой строки и j-го столбца, имеет вид:

$$a_{ij} = \sum_{r_1, \ldots, r_l} \beta^{ij}_{r_1, \ldots, r_l} x_1^{(r_1)} \cdots x_l^{(r_l)},$$

где $\beta^{ij}_{r_1, \ldots, r_l} \in C$. Непосредственный подсчет следа матрицы $f = \bar{u}\sigma(\bar{u})$ с учетом следующего из (12) равенства

$$x_1^{(j_1)} \cdots x_l^{(j_l)} x_1^{(t_1)} \cdots x_l^{(t_l)} = \delta^{t_1, \ldots, t_l}_{j_1, \ldots, j_l} (x_1^{(1)})^2 \cdots (x_l^{(1)})^2,$$

где $\delta^{t_1, \ldots, t_l}_{j_1, \ldots, j_l}$ — символ Кронекера, дает:

$$\operatorname{Sp}(f) = \sum |\beta^{ij}_{r_1, \ldots, r_l}|^2 \geqslant 0 \tag{20}$$

и $\operatorname{Sp}(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{u} = 0$. С другой стороны, нетрудно видеть, что в силу выбора базиса $e_1, \ldots, e_{n^2}$ алгебры M_n алгебра $\mathcal{G}_n$ инвариантна относительно антиизоморфизма σ.

Действительно,

$$\sigma(\bar{x}_i)=\sum_{j=1}^{n^2} x_i^{(j)}\sigma(e_j)=\bar{x}_i,$$

а

$$\sigma(\bar{x}_{i_1}\bar{x}_{i_2}\ldots\bar{x}_{i_t})=\bar{x}_{i_t}\ldots\bar{x}_{i_2}\bar{x}_{i_1},$$

$$\sigma(\lambda a_0\,\mathrm{Sp}\,(a_1)\ldots\mathrm{Sp}\,(a_t))=\bar{\lambda}\sigma(a_0)\,\mathrm{Sp}\,(\sigma(a_1))\ldots\mathrm{Sp}\,(\sigma(a_t)), \tag{21}$$

где $a_0, \ldots, a_t$ — слова от $\bar{x}_j$. Следовательно, $\sigma(\bar{u})\in\mathcal{G}_n$, а обобщенный полином $f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_l)=\bar{u}\sigma(\bar{u})$ однороден, типа $(2, \ldots, 2)$ и для него верна формула (18). Благодаря (19) утверждение, выражаемое неравенством (20), можно переформулировать следующим образом:

$$n\alpha(\bar{u}\sigma(\bar{u}))\geqslant 0 \tag{22}$$

для любого полилинейного обобщенного полинома u, и равенство достигается тогда и только тогда, когда $\bar{u}=0$. Но когда $\bar{u}$ обращается в нуль? В силу определяющих соотношений (12)

$$u(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_l)=\sum_{r_1,\ldots,r_l} x_1^{(r_1)}\ldots x_l^{(r_l)}u(e_{r_1}, \ldots, e_{r_l})$$

и $\bar{u}=0$ тогда и только тогда, когда все $u(e_{r_1}, \ldots, e_{r_l})=0$. Но так как u — полилинейный обобщенный полином, то эти равенства означают, что u — тождество со следом алгебры M_n.

Таким образом, (22) дает критерий для проверки, является ли u тождеством со следом. Заметим, что для использования этого критерия алгебры M_n и $\tilde{M}_n$ по сути дела не нужны, так как антиизоморфизм σ можно определить формально равенствами (21), а для вычисления функции α нужны только соотношения (13)—(15).

К построению вспомогательной алгебры, которая позволит нам полностью забыть об алгебре M_n, а оперировать только с обобщенными полиномами, мы сейчас и переходим.

II. Алгебра $\tilde{\mathcal{G}}$. Пусть K — поле, $K(\gamma)$ — поле частных кольца многочленов $K[\gamma]$ от одной переменной γ. Обозначим через $\tilde{\mathcal{G}}$ фактор-алгебру алгебры обобщенных полиномов $\mathcal{G}(\gamma)$ над полем $K(\gamma)$ со следующими определяющими соотношениями, где $i, j=1, 2, \ldots$:

$$x_iax_i=\frac{x_i^2}{\gamma}\,\mathrm{Sp}\,(a), \tag{23}$$

$$\mathrm{Sp}\,(x_ia)\,x_i=\frac{x_i^2}{\gamma}\,a, \tag{24}$$

$$[x_i^2, x_j]=0, \quad \mathrm{Sp}\,(x_i^2a)=x_i^2\,\mathrm{Sp}\,(a), \quad \mathrm{Sp}\,(x_i^2)=\gamma x_i^2, \tag{25}$$

$$w=0; \tag{26}$$

здесь w — любой обобщенный одночлен степени больше двух относительно некоторой из входящих в него переменных, а a — любое слово.

Строение алгебры $\widetilde{\mathcal{G}}$ описывается следующей леммой.

ЛЕММА 3. а) *Алгебра $\widetilde{\mathcal{G}}$ как линейное пространство порождается обобщенными одночленами степени* <3 *относительно каждой переменной* x_i.

б) *Как линейные пространства множества полилинейных полиномов алгебр $\mathcal{G}(\gamma)$ и $\widetilde{\mathcal{G}}$ изоморфны.*

в) *Всякий однородный обобщённый полином* $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_t})$ *степени 2 относительно* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ *и степени 1 относительно* $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$ *представим в виде*

$$f = \frac{x_{i_1}^2}{\gamma} \ldots \frac{x_{i_s}^2}{\gamma} g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}), \tag{27}$$

где g — обобщенный полилинейный полином.

г) *Представление (27) однозначно в том смысле, что если* $f = \prod_{k=1}^{s} \frac{x_{i_k}^2}{\gamma} g_1$ — *другое такое представление, то* $g = g_1$ *в* $\mathcal{G}(\gamma)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы верно в силу соотношения (26); второе — в силу того, что определяющие соотношения (23)—(26) имеют степень $\geqslant 2$ относительно некоторой переменной. Очевидно, что формулы (23)—(25) вместе с (6)—(8) позволяют получить представление (27). Однозначность представления (27) можно было бы доказать непосредственно, для чего достаточно было бы проверить, что приведение к виду (27) не зависит от того, с какой переменной x_{i_k} ($k=1, \ldots, s$) начать, показав это для случая, когда f — обобщенный одночлен и $s=2$. Мы изберем другой путь.

Ясно, что однозначность достаточно доказать в том случае, когда $K=C$.

Пусть $f = \prod_{k=1}^{s} \frac{x_{i_k}^2}{\gamma} g_1$ — другое представление, причем $g \neq g_1$ в $\mathcal{G}(\gamma)$. Так как коэффициентами в обобщенном полиноме $g - g_1$ являются рациональные функции от переменной γ, то существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых при $\gamma = n$ выражение $g - g_1$ имеет смысл и не равно нулю. Обозначим через $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{g}_1$ элементы алгебры $\mathcal{G}_n$, получающиеся из f, g, g_1 соответственно заменой $\gamma \to n$, $x_i \to \bar{x}_i$ ($i=1, 2, \ldots$). Тогда в силу того, что соотношения (13)—(15) для вычисления α получаются точно такой же заменой в определяющих соотношениях (23)—(25), имеем:

$$\alpha((\bar{g} - \bar{g}_1)\sigma(\bar{g} - \bar{g}_1)) = \alpha\left(\prod_{k=1}^{s} \frac{x_{i_k}^2}{n} (\bar{g} - \bar{g}_1)\sigma(\bar{g} - \bar{g}_1)\right) = \alpha((\bar{f} - \bar{f})\sigma(\bar{g} - \bar{g}_1)) = 0.$$

Но критерий (22) показывает, что тогда $\bar{g} - \bar{g}_1$ — нетривиальное полилинейное тождество со следом алгебры M_n даже в том случае, когда n

больше степени t обобщенного полинома $\bar{g}-\bar{g}_1$. Чтобы привести это утверждение к противоречию, остается доказать, что если $h(x_1, \ldots, x_l)$ — полилинейное тождество со следом алгебры M_{l+1}, то $h=0$. Для этого достаточно для каждого обобщенного полилинейного одночлена от $x_1, \ldots$ $\ldots, x_l$ найти такой набор матричных единиц из M_{l+1}, чтобы на нем только этот одночлен не обращался в нуль. Пусть этот одночлен имеет вид

$$w = a_0 \operatorname{Sp}(a_1) \ldots \operatorname{Sp}(a_t),$$

где $a_0a_1 \ldots a_t = x_1x_2 \ldots x_l$, а длина слова a_i равна r_i. Положим первые r_0 переменных равными $e_{12}, e_{23}, \ldots, e_{r_0(r_0+1)}$, а переменные, соответствующие слову a_i $(i = 1, \ldots, t)$, положим последовательно равными $e_{s+1\ s+2}, e_{s+2\ s+3}, \ldots$ $\ldots, e_{s+r_i-1\ s+r_i}, e_{s+r_i s+1}$, где $s=1+\sum_{j=0}^{i-1} r_j$. Непосредственно проверяется, что с точностью до конгруэнции (6) — (8) для указанного набора матричных единиц только одночлен w не равен нулю. Отсюда вытекает, что одночлен w входит с нулевым коэффициентом в тождество со следом h. Так как w нисколько не лучше других обобщенных одночленов, входящих в h, то $h=0$. Лемма доказана.

Отметим теперь одно равенство, выполняющееся в $\widetilde{\mathcal{G}}$, которое часто будет использоваться в дальнейшем. Пусть a, h, h_1, $h_2 \in \widetilde{\mathcal{G}}$, тогда из формул (23) и (6) получаем:

$$x_i a h x_i = \frac{x_i^2}{\gamma} \operatorname{Sp}(ah) = \frac{x_i^2}{\gamma} \operatorname{Sp}(ha) = x_i h a x_i,$$

а из формул (22) и (6), (7) имеем:

$$\operatorname{Sp}(h_1 x_i a h_2)\, x_i = \operatorname{Sp}(x_i a h_2 h_1)\, x_i = \frac{x_i^2}{\gamma} a h_2 h_1 = a \operatorname{Sp}(x_i h_2 h_1)\, x_i = \operatorname{Sp}(h_1 x_i h_2)\, a x_i.$$

Из этих равенств получаем, что для любых полилинейных обобщенных полиномов f и g от $x_1, \ldots, x_l$ справедливо равенство

$$f\,|_{x_i = x_i a} \cdot g = f \cdot g\,|_{x_i = a x_i}.$$

Более того,

$$f(x_1a_1, x_2a_2, \ldots, x_l a_l)\, g(x_1, \ldots, x_l) = f(x_1, \ldots, x_l)\, g(a_1x_1, a_2x_2, \ldots, a_l x_l), \tag{28}$$

и точно так же проверяется, что

$$f\,\Big|_{\substack{x_1 = a_1x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_l = a_l x_l}} \cdot g = f \cdot g\,\Big|_{\substack{x_1 = x_1 a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_l = x_l a_l}}. \tag{29}$$

III. Билинейная форма. В алгебре $\mathcal{G}(\gamma)$ в качестве подкольца естественным образом содержится алгебра обобщенных полиномов $\mathcal{G}$ над полем K. Обозначим через $T_l(\gamma)$ и T_l пространства полилинейных полиномов от $x_1, \ldots, x_l$ в $\mathcal{G}(\gamma)$ и $\mathcal{G}$ соответственно. В силу пункта б) леммы 3 эти линейные пространства можно отождествить с линейными оболочками над полями $K(\gamma)$ и K соответственно полилинейных обобщенных полиномов от $x_1, \ldots, x_l$ в алгебре $\widetilde{\mathcal{G}}$. Пункты в) и г) той же леммы показывают, что всякому однородному обобщенному полиному $f(x_1, \ldots, x_l) \in \in \mathcal{G}(\gamma)$ типа $(2, 2, \ldots, 2)$ можно однозначно сопоставить $\alpha(f) \in K(\gamma)$ по правилу

$$f = \alpha(f) \frac{x_1^2}{\gamma} \ldots \frac{x_l^2}{\gamma}.$$

В том случае когда $f \in \mathcal{G}$, из формул (23)—(25) вытекает, что $\alpha(f)$ — это многочлен от переменной γ. С помощью функции α на пространстве полилинейных обобщенных полиномов $T_l \subset \mathcal{G}$ можно определить билинейную форму $\mathfrak{b}$, принимающую значения в кольце многочленов $K[\gamma]$, положив для любых $u, v \in T_l$

$$\mathfrak{b}(u, v) = \gamma\alpha(uv). \tag{30}$$

В качестве легкого упражнения на использование формул (23)—(25) мы предоставляем читателю проверить, что

$$\mathfrak{b}\left(a_0 \operatorname{Sp}(a_1) \ldots \operatorname{Sp}(a_t), \prod_{j=1}^{l} \operatorname{Sp}(x_j)\right) = \gamma^{t+1}, \tag{31}$$

где $a_0, \ldots, a_t$ — слова и $a_0 \operatorname{Sp}(a_1) \ldots \operatorname{Sp}(a_t) \in T_l$.

ЛЕММА 4. *Пусть в определении билинейной формы* (30) $\gamma = n$, *тогда* $\operatorname{Ann} \mathfrak{b}$ *в линейном пространстве* T_l *совпадает с множеством всех полилинейных тождеств со следом степени* l *алгебры* M_n *над полем характеристики нуль.*

Доказательство. Пусть сначала поле K совпадает с полем комплексных чисел. Обозначим через ψ гомоморфизм алгебры $\mathcal{G}$ в алгебру $\mathcal{G}_n$, для которого $\psi f(x_1, \ldots, x_l) = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_l)$, а через σ — антиизоморфизм алгебры $\mathcal{G}$, определяемый формулами (21), где $\bar{x}_i$ надо заменить на x_i. Тогда так как при $\gamma = n$ формулы (23)—(25) и (13)—(15) для вычисления функции α в $\widetilde{\mathcal{G}}$ и $\mathcal{G}_n$ совпадают, то

$$\alpha(uv)|_{\gamma=n} = \alpha(\psi(u)\psi(v)) \tag{32}$$

для любых $u, v \in T_l$. Следовательно, в силу критерия (22)

$$\mathfrak{b}(u, \sigma(u))|_{\gamma=n} \geqslant 0$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда u — полилинейное тождество со следом алгебры M_n. Это доказывает лемму для случая $K = C$.

Если K — произвольное поле характеристики нуль, то в записи конкретного тождества со следом алгебры M_n или элемента из $\operatorname{Ann} \mathfrak{b}$ участвует лишь конечное число элементов поля K. Так как поле, порожденное этими элементами, можно вложить в поле комплексных чисел, то лемма справедлива для любого поля K характеристики нуль. Лемма доказана.

Равенства (32) и (19) показывают, что при любых натуральных n

$$\mathfrak{b}(u, v)|_{\gamma=n} = \mathfrak{b}(v, u)|_{\gamma=n},$$

а так как $\mathfrak{b}(u, v)$ и $\mathfrak{b}(v, u)$ — многочлены при фиксированных $u, v \in T_l$, то всегда $\mathfrak{b}(u, v) = \mathfrak{b}(v, u)$, т. е. $\mathfrak{b}$ — симметрическая билинейная форма.

Обозначим через $E(\gamma)$ некоторый многочлен из $K[\gamma]$, а через $\{E(\gamma)\}$ — идеал, порожденный им в $K[\gamma]$. Для решения задачи о тождествах со следом нам понадобится, чтобы билинейная форма $\mathfrak{b}$ принимала значения не в кольце $K[\gamma]$, а в фактор-кольце $K[\gamma]/\{E(\gamma)\}$. Билинейную форму, определенную формулой (30) и принимающую значения в фактор-кольце $K[\gamma]/\{E(\gamma)\}$, мы обозначим через $\mathfrak{b}_E$. Так, например, если $E(\gamma) = \gamma - n$, то билинейную форму, определенную в лемме 4, следовало бы обозначать через $\mathfrak{b}_{\gamma-n}$.

ЛЕММА 5. *Пусть* $E(\gamma)$ — *фиксированный многочлен и* $\mathrm{Ann}_{T_l}\mathfrak{b}_E = \{f \in T_l \mid \mathfrak{b}_E(f, T_l) = 0$ *в* $K[\gamma]/\{E(\gamma)\}\}$. *Обозначим через* V *вербальный идеал алгебры* $\mathscr{G}$, *порожденный* $\mathrm{Ann}_{T_l}\mathfrak{b}_E$ *для всех* $l = 1, 2, \ldots,$ *тогда* $V \cap T_k = \mathrm{Ann}_{T_k}\mathfrak{b}_E$.

Доказательство. По существу нужно доказать, что если $f \in \mathrm{Ann}_{T_l}\mathfrak{b}_E$, а $g \in T_k$ $(k > l)$ и g является следствием обобщенного полинома f, то $g \in \mathrm{Ann}_{T_k}\mathfrak{b}_E$. Обозначим через $V(f)$ вербальный идеал в $\mathscr{G}$, порожденный полилинейным обобщенным полиномом $f(x_1, \ldots, x_l)$. Из определения 2 и равенств (10), (6), (8) $V(f)$ как двухсторонний идеал порождается обобщенными полиномами $f(a_1, \ldots, a_l)$, где $a_1, \ldots, a_l$ — произвольные непустые слова, а из равенства, справедливого в $\mathscr{G}$ для любого слова b,

$$bf(a_1, \ldots, a_l) = f(a_1, \ldots, a_l)\, b + \sum_{i=1}^{l} f(a_1, \ldots, [b, a_i], \ldots, a_l),$$

видно, что $V(f)$ порождается указанными обобщенными полиномами как правый идеал. Следовательно, $g \in V(f) \cap T_k$ представимо в виде линейной комбинации обобщенных полиномов вида $f(a_1, \ldots, a_l)h \in T_l$, поэтому утверждение о том, что $g \in \mathrm{Ann}_{T_k}\mathfrak{b}_E$, достаточно доказать для случая $g = f(x_1a_1, \ldots, x_la_l) \cdot h$. Применяя (28), получаем, что для любого $v \in T_k$

$$\mathfrak{b}_E(g, v) = \gamma\alpha\left(f\big|_{\substack{x_1=x_1a_1\\ \cdots\\ x_l=x_la_l}} hv\right) = \gamma\alpha\left(f \cdot \left(hv\big|_{\substack{x_1=a_1x_1\\ \cdots\\ x_l=a_lx_l}}\right)\right) =$$

$$= \gamma\alpha\left(f \prod_{j=l+1}^{k}\left(\frac{x_j^2}{\gamma}\right) v_1\right) = \gamma\alpha(fv_1) = \mathfrak{b}(f, v_1) = 0,$$

где v_1 — полилинейный обобщенный полином с коэффициентами из $K[\gamma]$, удовлетворяющий, благодаря пункту в) леммы 3, равенству

$$h \cdot v\big|_{\substack{x_1=a_1x_1\\ \cdots\\ x_l=a_lx_l}} = \prod_{j=l+1}^{k}\left(\frac{x_j^2}{\gamma}\right) v_1.$$

Таким образом, $g \in \mathrm{Ann}_{T_k}\mathfrak{b}_E$. Лемма доказана.

Как указывалось в § 2, всякий вербальный идеал порождается всеми своими полилинейными обобщенными полиномами. Лемма 5 показывает, что для некоторых вербальных идеалов эти полилинейные обобщенные полиномы могут быть выделены билинейной формой $\mathfrak{b}_E$ для некоторого многочлена $E(\gamma)$. Лемма 4 утверждает, что к таким вербальным идеалам относятся тождества со следом матричной алгебры.

Займемся теперь выяснением вопроса, какие вербальные идеалы задаются билинейной формой $\mathfrak{b}_E$.

IV. Задание структуры групповой алгебры на множестве T_l. Пусть f и g — те же, что и в равенстве (27); положим по определению $\pi(f)=g$.

ЛЕММА 6. *Пусть на множестве T_l задана операция $\circ$ по формуле*

$$f\circ h=\pi\bigl(f(x_1,\dots,x_l)\cdot h\big|_{\substack{x_1=y_1x_1\\ \cdots\cdots\\ x_l=y_lx_l}}\bigr)\Big|_{\substack{y_1=x_1\\ \cdots\cdots\\ y_l=x_l}}=\pi\bigl(f\big|_{\substack{x_1=x_1y_1\\ \cdots\cdots\\ x_l=x_ly_l}}\cdot h(x_1,\dots,x_l)\bigr)\Big|_{\substack{y_1=x_1\\ \cdots\cdots\\ y_l=x_l}}, \tag{33}$$

где $f,h\in T_l$, а через $y_1,\dots,y_l$ для удобства обозначены переменные x_l такие, что $x_1,\dots,x_l,y_1,\dots,y_l$ — различные переменные. Тогда эта операция определена корректно и относительно этой операции множество обобщенных одночленов $G\cap T_l$ образует группу, а линейное пространство T_l превращается в групповую алгебру группы $G\cap T_l$. Образующими этой группы являются элементы $D_i=x_i\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{l}\operatorname{Sp}(x_j)$ $(i=1,\dots,l)$, а единицей — обобщенный одночлен $e=\prod\limits_{j=1}^{l}\operatorname{Sp}(x_j)$.

Доказательство. Сначала отметим, что второе равенство в (33) справедливо в силу (28) и пункта г) леммы 3. Пункты в) и г) той же леммы обеспечивают корректность определения (33) в $T_l(\gamma)$. Покажем, что заданная в $T_l(\gamma)$ операция $\circ$ ассоциативна, т. е. что для любых f, g, $h\in T_l(\gamma)$

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h). \tag{34}$$

Левая часть этого равенства по определению (33) и равенству (28) равна

$$\pi\bigl(f\cdot g\big|_{\substack{x_1=y_1x_1\\ \cdots\cdots\\ x_l=y_lx_l}}\cdot h\big|_{\substack{x_1=z_1y_1\\ \cdots\cdots\\ x_l=z_ly_l}}\bigr)\Big|_{\substack{z_1=x_1\\ \cdots\cdots\\ z_l=x_l}}=$$

$$=\pi\bigl(f\cdot g\big|_{\substack{x_1=y_1\\ \cdots\cdots\\ x_l=y_l}}\cdot h\big|_{\substack{x_1=z_1x_1y_1\\ \cdots\cdots\\ x_l=z_lx_ly_l}}\bigr)\Big|_{\substack{z_1=x_1\\ \cdots\cdots\\ z_l=x_l}}=$$

$$=\pi\Bigl(f\bigl(g\big|_{\substack{x_1=y_1\\ \cdots\cdots\\ x_l=y_l}}\cdot h\big|_{\substack{x_1=x_1y_1\\ \cdots\cdots\\ x_l=x_ly_l}}\bigr)\Big|_{\substack{x_1=z_1x_1\\ \cdots\cdots\\ x_l=z_lx_l}}\Bigr)\Big|_{\substack{z_1=x_1\\ \cdots\cdots\\ z_l=x_l}}.$$

Последнее выражение по определению (33) равно правой части (34). Следовательно, (34) доказано.

Последовательное применение равенства (24) дает:

$$\prod_{j=1}^{l} \mathrm{Sp}\,(x_j) \circ f = \pi\left(\prod_{j=1}^{l} \mathrm{Sp}\,(x_i y_i) \cdot f\right)\Big|_{\substack{y_1=x_1\\ \dots\dots\\ y_l=x_l}} = (f\,|_{\substack{x_1=y_1\\ \dots\dots\\ x_l=y_l}})\,|_{\substack{y_1=x_1\\ \dots\dots\\ y_l=x_l}} = f$$

и, значит, $e = \prod\limits_{j=1}^{l} \mathrm{Sp}\,(x_j)$ — левая единица; точно так же проверяется, что e — правая единица алгебры $T_l(\gamma)$. Аналогично получаем:

$$f \circ D_i = \pi\,(f y_i x_i)\,|_{y_i=x_i}. \tag{35}$$

Если $f = a_0 \prod\limits_{j=1}^{t} \mathrm{Sp}\,(a_j)$ — обобщенный одночлен, то рассмотрение двух случаев $a_0 = a_0' x_i a_0''$ и $a_k = x_i a_k'$ с использованием формул (23) и (24) соответственно дает:

$$\left\{a_0 \prod_{j=1}^{t} \mathrm{Sp}\,(a_j)\right\} \circ D_i = \begin{cases} a_0' \,\mathrm{Sp}\,(x_i a_0'') \prod\limits_{j=1}^{t} \mathrm{Sp}\,(a_j), \\[2ex] a_0 x_i a_k' \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{t} \mathrm{Sp}\,(a_j), \end{cases} \tag{36}$$

откуда следует, что $G \bigcap T_l$ инвариантно относительно умножения на D_i. Из (36) немедленно получаем, что

$$D_i \circ D_i = e,$$

$$\begin{gathered} \left\{g\,(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=k+1}^{l} \mathrm{Sp}\,(x_j)\right\} \circ D_{k+1} = g\,(x_1, \ldots, x_k)\, x_{k+1} \prod_{j=k+2}^{l} \mathrm{Sp}\,(x_j), \\ \left\{g\,(x_1, \ldots, x_k) \prod_{j=k+1}^{l} \mathrm{Sp}\,(x_j)\right\} \circ D_{k+1} \circ D_{k+2} \circ \ldots \circ D_{k+t} \circ D_{k+1} = \\ = g\,(x_1, \ldots, x_k)\, \mathrm{Sp}\,(x_{k+1} \ldots x_{k+t}) \prod_{j=k+t+1}^{l} \mathrm{Sp}\,(x_j), \end{gathered} \tag{37}$$

где g — полилинейный одночлен от $x_1, \ldots, x_k$. Последние два равенства показывают, что e можно перевести в любой обобщенный одночлен последовательным умножением на элементы D_i. Следовательно, каждый обобщенный одночлен из $G \bigcap T_l$ представим в виде произведения элементов второго порядка D_i относительно операции $\circ$. Это показывает, что $G \bigcap T_l$ — группа, а элементы D_i — образующие. То, что T_l — групповая алгебра этой группы и то, что операция $\circ$ определена корректно на T_l, теперь очевидно. Лемма доказана.

Выясним, как связаны между собой операция $\circ$ и симметрическая билинейная форма $\mathfrak{b}_E$ из леммы 5.

ЛЕММА 7. *Для любых элементов f, g, $h \in T_l$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{b}_E(f \circ h, g) = \mathfrak{b}_E(f, h \circ g).$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно считать, что $h = D_i$. Воспользуемся равенством (35), тогда

$$\mathfrak{b}_E(f \circ D_i, g) = \gamma\alpha(\pi(fy_ix_i)|_{y_i=x_i} g) = \gamma\alpha(\pi(fy_ix_i)\, g\,|_{x_i=y_i}) =$$

$$= \gamma\alpha(fy_ix_ig\,|_{x_i=y_i}) = \gamma\alpha(f\pi(y_ix_ig\,|_{x_i=y_i})) =$$

$$= \gamma\alpha(f\pi(x_iy_ig)|_{y_i=x_i}) = \mathfrak{b}_E(f, D_i \circ g).$$

Лемма доказана. Из этой леммы непосредственно вытекает

Следствие. $\mathrm{Ann}_{T_k}\mathfrak{b}_E$ — *двусторонний идеал в групповой алгебре $T_k\,(k = 1, 2, \ldots)$.*

Пусть S_{l+1} — группа всех подстановок, действующих справа на множестве $\{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$. Каждая подстановка раскладывается однозначно в произведение независимых циклов. Цикл, переводящий $x_{i_1} \to x_{i_2} \to x_{i_3} \to \ldots \ldots \to x_{i_k} \to x_{i_1}$, мы будем обозначать через $(x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} \ldots x_{i_k})$. Кроме того, если слово $a = x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, то через (a) будем обозначать цикл $(x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_k})$.

ЛЕММА 8. *Группа $G \cap T_l$ изоморфна группе всех подстановок S_{l+1}, действующих справа на множестве из $l+1$ элемента. Изоморфизм осуществляется отображением*

$$\varphi\{a_0\mathrm{Sp}(a_1) \ldots \mathrm{Sp}(a_t)\} = (x_0a_0)(a_1) \ldots (a_t).$$

Доказательство. Отображение φ определено корректно в силу того, что независимые циклы коммутируют между собой и $(x_{i_1}x_{i_2} \ldots x_{i_t})$ и $(x_{i_2} \ldots \ldots x_{i_t}x_{i_1})$ — обозначения одного и того же цикла. По лемме 2 отображение φ взаимно однозначно. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого $g \in G \cap T_l$

$$\varphi(g) \cdot \varphi(D_i) = \varphi(g \circ D_i). \tag{38}$$

Но

$$\{(x_0a_0)(a_1) \ldots (a_t)\} \cdot (x_0x_i) = \begin{cases} (x_0a_0')(x_ia_0'')(a_1) \ldots (a_t), & \text{если } a_0 = a_0'x_ia_0'', \\ (x_0a_0x_ia_k')(a_1) \ldots (a_{k-1})(a_{k+1}) \ldots (a_t), & \text{если } a_k = x_ia_k', \end{cases}$$

и равенство (38) вытекает теперь из сравнения последнего равенства с (36). Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что элементом, обратным к $g \in G \cap T_l$ относительно операции $\circ$, является $\sigma(g)$.

Начиная с этого момента, мы не будем делать никакого различия между групповыми алгебрами $K[S_{l+1}]$ и T_l.

Резюмируем теперь все полученные в этом параграфе результаты.

Предложение 1. *На линейном пространстве полилинейных обобщенных полиномов T_l алгебры $\mathcal{G}$ можно ввести по формуле* (33) *операцию* $\circ$, *относительно которой множество $G \cap T_l$ превращается в группу, изоморфную S_{l+1}, а T_l — в групповую алгебру этой группы. Кроме того, для всякого многочлена $E(\gamma)$ формула* (30) *задает билинейную симметрическую форму $\mathfrak{b}_E$, ассоциативную относительно операции $\circ$ и принимающую значения в алгебре $K[\gamma]/\{E(\gamma)\}$; каждой такой билинейной форме соответствует вербальный идеал $V \subset \mathcal{G}$ такой, что для всех $l=1, 2, \ldots$ $V \cap T_l = \operatorname{Ann}_{T_l} \mathfrak{b}_E$ и это множество является двусторонним идеалом в алгебре T_l. Если $D(\gamma) = \gamma - n$, то вербальный идеал V есть в точности множество тождеств со следом алгебры M_n.*

§ 4. Классификация билинейных форм и вербальных идеалов V, для которых $V \cap T_l$ — двусторонний идеал в T_l

На протяжении всего этого параграфа мы считаем, что характеристика поля K равна 0. Перед чтением этого параграфа читателю следует ознакомиться с § 28 главы IV книги Ч. Кэртиса и И. Райнера ([4]), в котором описываются простые идеалы групповой алгебры $K[S_{l+1}]$ над полем характеристики нуль. Мы приведем здесь без доказательства те результаты из указанного параграфа, которые нам непосредственно потребуются.

Таблицей Юнга D типа $(n_1, \ldots, n_k)$ называется таблица, у которой количество клеток в i-ой строке равно n_i, причем $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k$. Таблица Юнга D, заполненная произвольно числами от 1 до $n_1 + \ldots + n_k = l+1$, называется диаграммой Юнга. Пусть $R(D)$ — подгруппа в S_{l+1}, состоящая из всех элементов p, которые переставляют числа внутри каждой строки диаграммы D, а $C(D)$ — подгруппа, состоящая из элементов q, которые переставляют числа внутри каждого столбца той же диаграммы D.

Предложение 2. *Между множеством таблиц Юнга D типа $(n_1, \ldots, n_k)$, где $n_1 + \ldots + n_k = l+1$, и множеством простых двусторонних идеалов групповой алгебры $K[S_{l+1}]$ существует взаимно однозначное соответствие. Идеал, соответствующий таблице Юнга D, как двусторонний идеал порождается элементом*

$$e(D) = \mathcal{P} \circ Q,$$

где $\mathcal{P} = \sum\limits_{p \in R(D)} p$, $Q = \sum\limits_{q \in C(D)} \varepsilon(q) q$ (суммы берутся по всем элементам подгрупп $R(D)$ и $C(D)$ соответственно, а $\varepsilon(q) = \pm 1$ в зависимости от четности подстановки q) для некоторой диаграммы, полученной из D. Подстановка $s \in S_{l+1}$ представима в виде $s = p \circ q$, где $p \in R(D)$, $q \in C(D)$ тогда и только тогда, когда элементы одной строки диаграммы D лежат в разных столбцах диаграммы Ds, и это представление однозначно. Для любого $x \in K[S_{l+1}]$ $\mathcal{P} \circ x \circ Q = \nu \mathcal{P} \circ Q$, где ν — некоторое число, зависящее от x.

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы описать все вербальные идеалы V алгебры $\mathcal{G}$ такие, что для любого натурального l $V \cap T_l$ — двусторонний идеал в T_l относительно операции $\circ$.

Само собой разумеется, что множество $V \cap T_l$ есть прямая сумма простых идеалов, каждый из которых задается некоторой таблицей Юнга, но априори не ясно:

а) будет ли для вербального идеала V, порожденного множеством полилинейных обобщенных полиномов, образующим двусторонний идеал в T_l, верно, что $V \cap T_{l+k}$ — двусторонний идеал в T_{l+k}?

б) каковы все такие таблицы Юнга D_1 и D_2, что $V_{D_1} \supseteq V_{D_2}$, где V_{D_i} — вербальный идеал, порожденный множеством полилинейных обобщенных тождеств, образующим простой двусторонний идеал в T_{l_i}, соответствующий таблице Юнга D_i?

в) обрываются ли возрастающие цепочки вербальных идеалов исследуемого вида?

В этом параграфе будет дан ответ на все эти вопросы.

Следующая лемма отвечает на первый вопрос.

ЛЕММА 9. *Пусть вербальный идеал V порождается множеством обобщенных полилинейных полиномов степени l, образующим двусторонний идеал в T_l относительно операции $\circ$. Пусть $f \in T_l$ порождает двусторонний идеал $V \cap T_l$. Тогда $V \cap T_{l+k}$ — двусторонний идеал в T_{l+k} для любого $k \geqslant 0$ и $f(x_1, \ldots, x_l) \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Sp}(x_{l+i})$ порождает этот двусторонний идеал.*

Доказательство. Сначала установим, что $V \cap T_{l+k}$ — двусторонний идеал. Для этого достаточно проверить, что $V \cap T_{l+k}$ выдерживает умножение на образующие D_i. При доказательстве леммы 5 было показано, что линейное пространство $V \cap T_{l+k}$ порождается элементами $g_1 = g(a_1, \ldots, a_l)\, a_{l+1} \prod_{j=1}^{r} \mathrm{Sp}(b_j)$, где $g(x_1, \ldots, x_l) \in V \cap T_l$, а a_i и b_j — слова. Используя (35), (28), (29) и (36), получаем:

$$g_1 \circ D_i = \pi\Big(g(a_1, \ldots, a_l)\, a_{l+1} \prod_{j=1}^{r} \mathrm{Sp}(b_j)\, y_i x_i\Big)\Big|_{y_i = x_i} =$$

$$= \begin{cases} g(a_1, \ldots, a_l)\, a_{l+1} x_i b_s' \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{r} \mathrm{Sp}(b_j), & \text{если } b_s = x_i b_s', \\[2ex] g(a_1, \ldots, a_l)\, a_{l+1}' \mathrm{Sp}(x_i a_{l+1}'') \prod\limits_{j=1}^{r} \mathrm{Sp}(b_j), & \text{если } a_{l+1} = a_{l+1}' x_i a_{l+1}'', \\[2ex] (g(x_1, \ldots, x_l) \circ D_s)\Big|_{\substack{x_j = a_j (j \neq s) \\ x_s = a_{l+1} x_i a_s''}} \cdot a_s' \prod\limits_{j=1}^{r} \mathrm{Sp}(b_j), & \text{если } s \leqslant l,\ a_s = a_s' x_i a_s'', \end{cases}$$

откуда следует, что $V \cap T_{l+k}$ — правый идеал. Аналогично проверяется, что $V \cap T_{l+k}$ — левый идеал.

Докажем второе утверждение леммы. Учитывая (37) и сказанное выше, достаточно показать, что $g_1=g(a_1,\ldots,a_l)\prod_{j=1}^{k-r+1}\mathrm{Sp}(x_{i_j})$, где $g(x_1,\ldots,x_l)\in\in V\cap T_l$ лежит в двустороннем идеале, порожденном $f_1=f(x_1,\ldots\ldots,x_l)\prod_{j=1}^{k}\mathrm{Sp}(x_{l+j})$. Хорошо известно, что если $\delta=(y_{11}\ldots y_{1r})(y_{21}\ldots y_{2s})\ldots\ldots(y_{m1}\ldots y_{mt})$ — разложение $\delta\in S_n$ на независимые циклы, то для любой подстановки $\delta_1\in S_n$

$$\delta_1^{-1}\delta\delta_1=(\delta_1(y_{11})\ldots\delta_1(y_{1r}))(\delta_1(y_{21})\ldots\delta_1(y_{2s}))\ldots(\delta_1(y_{m1})\ldots\delta_1(y_{mt})).$$

Поэтому подходящим сопряжением элемент g_1 можно перевести в элемент

$$g_2=g(a_1'x_1,\ldots,a_l'x_l)\prod_{j=k+l}^{l+r}\mathrm{Sp}(x_j).$$

Очевидно, что $g_3=g(x_1,\ldots,x_l)\prod_{j=1}^{k}\mathrm{Sp}(x_{l+j})$ лежит в двустороннем идеале, порожденном f_1. Пусть

$$s=x_1a_1'\ldots x_la_l'\prod_{j=k+l}^{l+r}\mathrm{Sp}(x_j),$$

тогда, используя равенства (24), (28), (29), получаем:

$$g_3\circ s=\pi(g(x_1y_1,\ldots,x_ly_l)\prod_{j=1}^{k}\mathrm{Sp}(x_{l+j}y_{l+j})\,s)\Big|_{\substack{y_1=x_1\\ \cdots\cdots\\ y_{l+k}=x_{l+k}}}=$$

$$=\pi(g(x_1,\ldots,x_l)\,y_1x_1a_1'y_2x_2a_2'\ldots y_lx_la_l'\prod_{j=l+k}^{l+r}\mathrm{Sp}(x_j))\Big|_{\substack{y_1=x_1\\ \cdots\cdots\\ y_l=x_l}}=$$

$$=\pi(g(a_1'x_1,\ldots,a_l'x_l)\prod_{j=l+k}^{l+r}\mathrm{Sp}(x_j)\,y_1x_1\ldots y_lx_l)\Big|_{\substack{y_1=x_1\\ \cdots\cdots\\ y_l=x_l}}=g_2\circ t,$$

где $t=x_1\ldots x_l\,\mathrm{Sp}(x_{l+1})\ldots\mathrm{Sp}(x_{l+k})$. Таким образом, $g_2\circ t$ лежит в двустороннем идеале, порожденном f_1, следовательно, и элементы $g_2==(g_2\circ t)\circ t^{-1}$ и g_1 лежат в том же идеале. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. *Пусть таблица Юнга D_1 типа $(n_1,\ldots,n_k)$ содержится в качестве подтаблицы в таблице Юнга D_2 типа $(n_1',\ldots,n_r')$, т. е. $n_i\leqslant n_i'$ для всех i, и пусть $l_1=\sum_{i=1}^{k}n_i,\ l_2=\sum_{i=1}^{r}n_i'$. Обозначим через $V_{D_i}(i=1,2)$ вербальный идеал алгебры $\mathcal{G}$, порожденный множеством полилинейных полиномов степени l_i, образующим простой двусторонний идеал в T_{l_i}, соответствующий таблице Юнга D_i. Тогда $V_{D_1}\supseteq V_{D_2}$.*

Доказательство. Заполним таблицу D_2 числами от 1 до l_2, так, чтобы числа от 1 до l_1 лежали в таблице D_1. Пусть $e(D_i)=\mathcal{P}_i\circ Q_i\,(i=1,2)$

обозначают то же, что и в предложении 2, тогда $e(D_i)$ порождает двусторонний идеал $V_{D_i} \cap T_{l_i}$. Можно считать, что группа подстановок S_{l_1+1}, действующих на $\{x_0, \ldots, x_{l_1}\}$, естественным образом вложена в группу S_{l_2+1}, действующую на $\{x_0, \ldots, x_{l_2}\}$, для этого нужно отождествить S_{l_1+1} с подгруппой в S_{l_2+1}, оставляющей элементы $x_{l_1+1}, \ldots, x_{l_2}$ на месте, тогда $R(D_2) \supseteq R(D_1)$, $C(D_2) \supseteq C(D_1)$. Точно так же для их групповых колец можно считать, что T_{l_1} вложено в T_{l_2}. В смысле этого вложения элемент $e(D_1)$, в силу леммы 9, порождает $V_{D_1} \cap T_{l_2}$ как двусторонний идеал. С другой стороны,

$$\mathcal{P}_2 \circ e(D_1) \circ Q_2 = (\mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1) \circ (Q_1 \circ Q_2) = |\mathcal{P}_1|\,|Q_1|\,(\mathcal{P}_2 \circ Q_2) = |\mathcal{P}_1|\,|Q_1|\,e(D_2),$$

где $|\mathcal{P}_1|$ и $|Q_1|$ — порядки групп $R(D_1)$ и $C(D_1)$ соответственно. Следовательно, образующий $e(D_2)$ идеала $V_{D_2} \cap T_{l_2}$ лежит в идеале $V_{D_1} \cap T_{l_2}$ и поэтому $V_{D_1} \cap T_{l_2} \supseteq V_{D_2} \cap T_{l_2}$. Из определения V_{D_1} и V_{D_2} теперь вытекает, что $V_{D_1} \supseteq V_{D_2}$. Лемма доказана.

Обратимся теперь к билинейной форме $\mathfrak{b}_E$ из § 3, заданной на $T_l = K[S_{l+1}]$ и принимающей значения в кольце $K_E = K[\gamma]/\{E(\gamma)\}$.

Обозначим через τ_t сумму всех подстановок из S_{l+1}, каждая из которых раскладывается ровно на t независимых циклов, и пусть $d = \sum\limits_{s \in S_{l+1}} \mathfrak{b}_E(s, 1)\, s$, где сумма берется по всем подстановкам $s \in S_{l+1}$. В силу формулы (31), $d = \sum\limits_{t=1}^{l+1} \gamma^t \tau_t$ — элемент из центра алгебры $T_l(\gamma)$. Если $g = \sum\limits_{\delta \in S_{l+1}} \beta_\delta \delta$, то обозначим через $\sigma(g)$ элемент $\sum\limits_{\delta \in S_{l+1}} \beta_\delta \delta^{-1}$. Тогда, учитывая ассоциативность билинейной формы $\mathfrak{b}_E$, получаем:

$$d \circ g = \sum_s \sum_\delta \beta_\delta \mathfrak{b}_E(s, 1)\, s\delta = \sum_\delta \sum_{r = s\delta} \beta_\delta \mathfrak{b}_E(r, \delta^{-1})\, r =$$

$$= \sum_r \mathfrak{b}_E\left(r, \sum_\delta \beta_\delta \delta^{-1}\right) r = \sum_{s \in S_{l+1}} \mathfrak{b}_E(s, \sigma(g))\, s,$$

откуда следует, что $g \in \mathrm{Ann}_{T_l} \mathfrak{b}_E$ тогда и только тогда, когда $d \circ \sigma(g) = 0$ в $K_E[S_{l+1}]$. Но так как $0 = \sigma(d \circ \sigma(g)) = g \circ d = d \circ g$, то доказана

ЛЕММА 11. *Обобщенный полином* $g \in \mathrm{Ann}_{T_l} \mathfrak{b}_E$ *тогда и только тогда, когда* $d \circ g = 0$ *в* $K_E[S_{l+1}]$.

Пусть 1_D — единица простого идеала, соответствующего таблице Юнга D, тогда из того, что d — элемент центра алгебры $T_l(\gamma)$, получаем:

$$d \circ 1_D = D(\gamma)\, 1_D;$$

более того, для любого элемента a из этого идеала

$$d \circ a = d \circ (1_D \circ a) = D(\gamma)\, a, \tag{39}$$

где $D(\gamma)$ — многочлен, зависящий только от таблицы Юнга D. Если обозначить через χ_D характер неприводимого представления группы S_{l+1}, соответствующий D, а через m_D — размерность этого представления, то

$$D(\gamma)=\sum_{t=1}^{l+1}\gamma^t\frac{\chi_D(\tau_t)}{m_D}. \tag{40}$$

ЛЕММА 12. *Пусть $E(\gamma)$ — некоторый многочлен, $\mathfrak{b}_E$ — билинейная форма из § 3 и V — вербальный идеал, соответствующий этой билинейной форме. Так же, как и в лемме 10, пусть V_D — вербальный идеал алгебры $\mathcal{G}$, порожденный множеством полилинейных полиномов степени l, образующим двусторонний идеал в T_l, соответствующий таблице Юнга D. Тогда $V\supseteq V_D$ тогда и только тогда, когда многочлен $E(\gamma)$ делит $D(\gamma)$.*

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент из $V_D\cap T_l$, тогда, по лемме 11, $a\in \mathrm{Ann}_{T_l}\mathfrak{b}_E$ тогда и только тогда, когда $d\circ a=0$ в кольце $K_E[S_{l+1}]$. Из формулы (39) следует, что это равносильно тому, что $E(\gamma)\,|\,D(\gamma)$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть V_{D_1} и V_{D_2} обозначают то же, что и в лемме 10, а $D_1(\gamma)$ и $D_2(\gamma)$ — многочлены, определенные формулой (40), тогда*

$$D_1(\gamma)\,|\,D_2(\gamma).$$

Доказательство. Положим $E(\gamma)=D_1(\gamma)$, и пусть V — вербальный идеал алгебры $\mathcal{G}$, соответствующий билинейной форме $\mathfrak{b}_E$, тогда, по лемме 12, $V\supseteq V_{D_1}$, а по лемме 10 $V_{D_1}\supseteq V_{D_2}$. Так как $V\supseteq V_{D_2}$, то по лемме 12 $E(\gamma)=D_1(\gamma)\,|\,D_2(\gamma)$. Следствие доказано.

Лемма 12 и следствие из нее указывают на необходимость нахождения явной формулы для многочлена $D(\gamma)$, точнее, формулы разложения $D(\gamma)$ на простые множители.

ЛЕММА 13. *Пусть D — прямоугольная таблица Юнга, длина строк которой равна l, а длина столбцов равна k; тогда сумма корней многочлена $D(\gamma)$ равна*

$$l\binom{k}{2}-k\binom{l}{2}\quad\left(\binom{1}{2}=0\right).$$

Доказательство. Коэффициент при старшем члене многочлена $D(\gamma)$ в формуле (40) равен $\frac{\chi_D(1)}{m_D}=1$. Следовательно, сумма корней многочлена $D(\gamma)$, взятая с противоположным знаком, равна $\nu=\frac{\chi_D(\tau_{lk-1})}{m_D}$. Очевидно, что τ_{lk-1} есть сумма всех транспозиций $t_{ij}\in S_{lk}$ и ν можно вычислить, исходя из формулы

$$\nu e(D)=\tau_{lk-1}e(D)=\mathcal{P}\circ\tau_{lk-1}\circ Q,$$

где $e(D)$, $\mathcal{P}$, Q обозначают то же, что и в предложении 2 для некоторой диаграммы Юнга, соответствующей таблице D. Мы сначала вычислим $\mathcal{P}\circ t_{ij}\circ Q$, где t_{ij} — транспозиция индексов i, j. Из предложения 2 следует, что этот элемент равен $n\mathcal{P}\circ Q$, Ясно, что число n равно коэффициенту при 1 в выражении $\mathcal{P}\circ t_{ij}\circ Q$ и, следовательно, $n=\Sigma\varepsilon(s'')$, где сумма берется по всем парам (s', s''), где $s'\in R(D)$, $s''\in C(D)$, таким, что $s'\circ t_{ij}\circ s''=1$ или $t_{ij}=(s')^{-1}\circ(s'')^{-1}$. Тогда по предложению 2 элементы из одной строки диаграммы D лежат в разных столбцах диаграммы Dt_{ij}. Но это возможно тогда и только тогда, когда индексы i, j лежат либо в одной строке, либо в одном столбце диаграммы D. В первом случае $\mathcal{P}\circ t_{ij}=\mathcal{P}$, во втором $t_{ij}Q=-Q$. В силу однозначности представления $t_{ij}=(s')^{-1}\circ(s'')^{-1}$ имеем:

$$\mathcal{P}\circ t_{ij}\circ Q=\begin{cases}\mathcal{P}\circ Q, \text{ если } t_{ij}\in R(D),\\ -\mathcal{P}\circ Q, \text{ если } t_{ij}\in C(D),\\ 0\quad, \text{ если } t_{ij}\notin R(D)\cup C(D).\end{cases}$$

Отсюда $\nu=\nu_1-\nu_2$, где ν_1 — количество транспозиций из $R(D)$, ν_2 — количество транспозиций из $C(D)$. Очевидно, что $\nu_1=k\binom{l}{2}$, $\nu_2=l\binom{k}{2}$, откуда и следует нужная формула. Лемма доказана.

Заполним таблицу Юнга D типа $(n_1, \ldots, n_k)$ целыми числами, ставя в j-ую клетку i-ой строки $(1\leqslant j\leqslant n_i)$ число $i-j$. Например,

0	−1	−2	−3	−4	−5
1	0	−1	−2	−3	−4
2	1	0	−1		
3	2				

Многочлен

$$\prod(\gamma-(i-j)),\tag{41}$$

где произведение берется по всем клеткам таблицы D, хорошо известен и называется графом таблицы D.

ЛЕММА 14. *Многочлен $D(\gamma)$, заданный формулой* (40), *совпадает с графом таблицы Юнга D.*

Доказательство. Отметим сразу, что коэффициент при старшем члене многочлена $D(\gamma)$ равен $\frac{\chi_D(1)}{m_D}=1$. Мы докажем утверждение леммы индукцией по количеству клеток в таблице Юнга D. Основанием индукции является таблица с одной клеткой, в этом случае формулы (40) и (41) совпадают. Пусть для таблиц с количеством клеток $<n$ лемма доказана. Пусть D — таблица типа $(n_1, \ldots, n_k)$. Если D — не прямоугольная таблица, то из нее можно получить две разные таблицы Юнга D' и D'' стиранием клеток (k, n_k) и (r, n_r) соответственно, где $1\leqslant r<k$. Обозначим через D_0 таблицу Юнга, получающуюся стиранием в таблице D этих двух клеток одновременно. По предположению индукции можно считать, что $D'(\gamma)$, $D''(\gamma)$, $D_0(\gamma)$ совпадают с графом соответствующих таблиц Юнга. Из следствия леммы 12 получаем, что $D'(\gamma)=D_0(\gamma)(\gamma-(r-n_r))$, $D''(\gamma)=D_0(\gamma)(\gamma-(k-n_k))$ и $D'(\gamma)\,|\,D(\gamma)$,

$D''(\gamma)\,|\,D(\gamma)$. Так как $r<k$, а $n_k<n_r$, то $n_r-r>n_k-k$ и эти корни различны, следовательно, $D(\gamma)=D_0(\gamma)(\gamma-(r-n_r))(\gamma-(k-n_k))$, и утверждение доказано для случая не прямоугольной таблицы D.

Если D — прямоугольная таблица с длиной строк, равной l, и высотой столбцов, равной k, то мы можем получить только равенство $D(\gamma)=D'(\gamma)(\gamma-\xi)$, где D' — таблица Юнга, получающаяся из D стиранием клетки (k, l), а ξ — некоторое число. По предположению индукции $D'(\gamma)$ совпадает с графом таблицы D' и, следовательно, совпадают суммы их корней, которые мы обозначим через Σ'. Тогда $\Sigma'+\xi$ — сумма корней многочлена $D(\gamma)$, а по лемме 13 $\Sigma'+\xi=l\binom{k}{2}-k\binom{l}{2}$. Непосредственная проверка показывает, что сумма корней графа таблицы D тоже равна $l\binom{k}{2}-k\binom{l}{2}$, откуда вытекает, что $\xi=k-l$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $E(\gamma)=D(\gamma)$ и $\mathfrak{b}_E, V, V_D$ обозначают то же, что и в лемме* 12, *тогда $V=V_D$. Кроме того, пусть V_{D_1} — вербальный идеал алгебры $\mathcal{G}$ такой, что $V_{D_1}\cap T_{l_1}$ — простой двусторонний идеал в T_{l_1}, соответствующий таблице Юнга D_1, и V_{D_1}, как вербальный идеал, порождается множеством $V_{D_1}\cap T_{l_1}$; тогда $V_D\supseteq V_{D_1}$ тогда и только тогда, когда таблица D содержится в D_1 в качестве подтаблицы.*

Доказательство. По лемме 12 $V\supseteq V_D$, а $V\supseteq V_{D_1}$ тогда и только тогда, когда $E(\gamma)=D(\gamma)\,|\,D_1(\gamma)$. Непосредственно из формулы графа (41) видно, что $D(\gamma)\,|\,D_1(\gamma)$ тогда и только тогда, когда D содержится в качестве подтаблицы в D_1. Но по лемме 10, если D — подтаблица таблицы D_1, то $V_D\supseteq V_{D_1}$. Следовательно, $V\supseteq V_{D_1}$ тогда и только тогда, когда $V_D\supseteq V_{D_1}$. Оба утверждения доказываемого следствия вытекают теперь из следствия к лемме 7 § 3, из которого следует, что V порождается всеми вербальными идеалами вида V_{D_1}, содержащимися в V. Следствие доказано.

Это следствие отвечает на второй вопрос, поставленный в начале параграфа.

Следующая теорема суммирует результаты лемм 9—14.

ТЕОРЕМА 3. *Каждой таблице Юнга D типа $(n_1, \ldots, n_k)$ с количеством клеток $l+1=\sum_{i=1}^{k} n_i$ можно сопоставить билинейную форму $\mathfrak{b}_D$, где $D(\gamma)$ — граф таблицы D, заданной формулой* (41), *и вербальный идеал V_D, соответствующий билинейной форме $\mathfrak{b}_D$, так, что для любого натурального числа k $V_D\cap T_k=\mathrm{Ann}_{T_k}\mathfrak{b}_D$ и это множество образует двусторонний идеал в T_k относительно операции $\circ$; V_D, как вербальный идеал в алгебре $\mathcal{G}$, порождается полилинейными обобщенными полиномами $V_D\cap T_l$, образующими простой двусторонний идеал в групповой алгебре $T_l=K[S_{l+1}]$, соответствующий таблице Юнга D. Указанное соответствие между таблицами Юнга D и вербальными идеалами V_D алгебры $\mathcal{G}$ взаимно однозначно, причем $V_{D_1}\supseteq V_{D_2}$ тогда и только тогда, когда таблица Юнга D_1 содержится в качестве подтаблицы в таблице Юнга D_2.*

Пусть $E(\gamma)$ — многочлен, $\mathfrak{b}_E$ — билинейная форма из § 3, тогда вербальный идеал V, соответствующий этой билинейной форме, содержит вербальный идеал V_D, соответствующий таблице Юнга D, тогда и только тогда, когда $E(\gamma)\,|\,D(\gamma)$, в частности, V не равен нулю тогда и только тогда, когда все корни многочлена $E(\gamma)$ — целые числа.

Наконец, если V — вербальный идеал в алгебре $\mathcal{G}$ такой, что для любого натурального числа k $V\bigcap T_k$ — двусторонний идеал в алгебре T_k относительно операции $\circ$, то существует конечное число таблиц Юнга $D_1, \ldots, D_n$ таких, что вербальный идеал, порожденный $\{V_{D_1}, \ldots, V_{D_n}\}$, совпадает с V.

Все утверждения теоремы были уже доказаны, кроме последнего, которое равносильно следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4. *Всякая возрастающая цепочка вербальных идеалов алгебры $\mathcal{G}$ $V_1\subseteq V_2\subseteq V_3\subseteq \ldots$ таких, что для любых натуральных чисел, i, k $V_i\bigcap T_k$ — двусторонний идеал в алегбре T_k относительно операции $\circ$, обрывается, т. е., начиная с некоторого номера N, $V_N=V_{N+1}=\ldots$.*

Доказательство. Как указывалось при доказательстве следствия леммы 14, каждый вербальный идеал V_i порождается всеми вербальными идеалами V_D, соответствующими таблицам Юнга D, которые содержатся в V_i. Поэтому нам достаточно доказать утверждение теоремы в том случае, когда V_i порождено вербальными идеалами $\{V_{D_1}, \ldots, V_{D_i}\}$, соответствующими таблицам Юнга $D_1, \ldots, D_i$. Допустим, что цепочка $V_1\subseteq V_2\subseteq V_3\subseteq \ldots$ не обрывается. Тогда можно считать, что $V_k\neq V_{k+p}$ для любых натуральных чисел k, p. По теореме 3 это означает, что в последовательности таблиц Юнга D_1, D_2, D_3, ... для любых натуральных чисел k и p D_k не является подтаблицей таблицы D_{k+p}. Нам нужно привести это утверждение к противоречию.

Для этого рассмотрим топологическую абелеву группу H, элементами которой являются все функции, заданные на множестве всех целых чисел Z и принимающие значения в Z, и окрестности нуля имеют вид $U_n=\{f\in H\,|\,f(m)=0,\ m=0,\ \pm 1, \ldots, \pm n\}$. Каждой таблице D_i можно сопоставить функцию $g_i\in H$, для которой $g_i(m)$ равно кратности корня m многочлена $D_i(\gamma)$. Из определения таблицы Юнга и явного вида многочлена $D_i(\gamma)$ (41) видно, что

$$g_i(m)\geqslant g_i(m+1) \text{ при } m\geqslant 0, \quad g_i(m-1)\leqslant g_i(m) \text{ при } m\leqslant 0; \tag{42}$$

кроме того, для достаточно большого числа $N_i=N(D_i)$ и $|m|>N_i$ $g_i(m)=0$. Условие того, что таблица D_k не является подтаблицей в D_{k+p} для любых натуральных чисел k, p, может быть переформулировано следующим образом: для любых натуральных k, p существует $j\in Z$ такое, что

$$g_k(j)>g_{k+p}(j). \tag{43}$$

Пусть $r=\max(n, l)$, где n — длина первой строки, а l — длина первого столбца таблицы D_1. Тогда $g_k(0)\leqslant r$, так как в противном случае таблица D_1 содержится в D_k.

Следовательно, в силу (42) множество функций $\{g_i \mid i=1, 2, \ldots\}$ ограничено числом r, т. е. $g_i(m) \leqslant r$ для любых i, m. Мы предоставляем читателю проверить, что множество $A_r = \{f \in H) \mid f(m) \leqslant r,\ m=0, \pm 1, \ldots\}$ образует компакт и, следовательно, для последовательности функций $\{g_i\}$ существует предельная точка g. Так как из сходимости в смысле введенной топологии вытекает поточечная сходимость функций, то из (42) получаем, что для предельной функции $g(0) \leqslant r$, $g(m) \geqslant g(m+1) \geqslant 0$ при $m \geqslant 0$, $0 \leqslant g(m-1) \leqslant g(m)$ при $m \leqslant 0$. Но тогда найдется такое натуральное число M, что при $|m| > M$ $g(m) = m_0 = \mathrm{const} \geqslant 0$. Так как g — предельная точка для последовательности $\{g_i\}$, то найдется функция g_{i_0}, для которой $g - g_{i_0} \in U_M$. Возьмем натуральное число $M_1 > M$ такое, что при $|m| > M_1$, $g_i(m) = 0$, и выберем g_{i_1} так, чтобы $i_1 > i_0$, $g - g_{i_1} \in U_{M_1}$. Тогда

$$g_{i_0}(m) = \begin{cases} g(m), & |m| \leqslant M, \\ \leqslant m_0, & M < |m| \leqslant M_1, \\ 0, & M_1 < |m|, \end{cases}$$

$$g_{i_1}(m) = \begin{cases} g(m), & |m| \leqslant M, \\ m_0, & M < |m| \leqslant M_1, \\ \geqslant 0, & M_1 < |m|, \end{cases}$$

откуда вытекает, что $g_{i_0}(m) \leqslant g_{i_1}(m)$ для всех $m \in Z$ в противоречие с (43). Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2 и другие следствия теоремы 3

Так же, как и в § 4, мы отождествляем алгебру T_l относительно операции $\circ$ с групповой алгеброй $K[S_{l+1}]$ при помощи изоморфизма φ леммы 8.

Доказательство теоремы 2. Пусть $E(\gamma) = \gamma - n$, тогда по лемме 4 множество всех тождеств со следом алгебры M_n над полем характеристики нуль образуют вербальный идеал V, соответствующий билинейной форме $\mathfrak{b}_E$. По предложению 1 множество полилинейных тождеств со следом $V \cap T_k = \mathrm{Ann}_{T_k} \mathfrak{b}_E$ образует двусторонний идеал в T_k относительно операции $\circ$ для любого натурального k, следовательно, по теореме 3 V, как вербальный идеал, порождается всеми содержащимися в нем вербальными идеалами V_D, где D — таблица Юнга. Из той же теоремы следует, что $V \supseteq V_D$ тогда и только тогда, когда $E(\gamma) = \gamma - n$ делит $D(\gamma)$. Непосредственно из формулы (41) для графа $D(\gamma)$ таблицы Юнга D видно, что $\gamma - n \mid D(\gamma)$ тогда и только тогда, когда высота первого столбца этой таблицы не меньше $n+1$, т. е. D содержит подтаблицу Юнга $D^{(n)}$ типа $\underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n+1 \text{ раз}}$ с $(n+1)$-ой клеткой. Таким образом, множество всех тождеств со следом алгебры M_n совпадает с вербальным идеалом $V_{D^{(n)}}$, который порождается, в силу теоремы 3, полилинейными полиномами $V_{D^{(n)}} \cap T_n$, образующими в T_n простой двусторонний идеал, соответствующий таблице Юнга $D^{(n)}$. Хорошо известно, что двусторонний идеал в $T_n = K[S_{n+1}]$, соответствующий таблице Юнга типа $\underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n+1 \text{ раз}}$, одномерен. В силу предложения 2 он порождается элементом $f = \sum_{s \in S_{n+1}} \varepsilon(s) s$, где сумма берется по всем подстановкам s, а $\varepsilon(s) = \pm 1$ в зависимости от четности s.

Поэтому полилинейный обобщенный полином от $x_1, \ldots, x_n$

$$f = \varphi^{-1}(f) = (-1)^n \sum (-1)^t a_0 \operatorname{Sp}(a_1) \ldots \operatorname{Sp}(a_t), \tag{44}$$

где сумма берется по всем обобщенным одночленам из T_n, порождает вербальный идеал $V_{D^{(n)}}$. Остается показать, что этот вербальный идеал порождается тождеством Гамильтона — Кэли f_n. Это немедленно вытекает из того, что степень f_n равна n и полная его линеаризация является нетривиальным полилинейным обобщенным полиномом от $x_1, \ldots, x_n$, а в силу одномерности $V_{D^{(n)}} \cap T_n$ этот полином с точностью до множителя должен совпадать с (44). Теорема 2 доказана.

Отметим теперь некоторые следствия из теоремы 2, касающиеся обычных тождеств алгебры M_n.

Обозначим через W_{l+1} линейное пространство полных циклов, т. е. линейное пространство, порожденное в $K[S_{l+1}]$ теми подстановками s, которые сами являются циклами длины $l+1$.

Следствие 1. *Пусть $I(f)$ — двусторонний идеал в групповой алгебре $K[S_{l+1}] = T_l$, порожденный элементом*

$$f = \sum_{\substack{s(x_i) = x_i \\ i > n}} \varepsilon(s) s,$$

где сумма берется по всем подстановкам группы S_{l+1}, оставляющими на месте элементы $x_{n+1}, \ldots, x_l$ (переставляются элементы $x_0, \ldots, x_n$), а $\varepsilon(s) = \pm 1$ в зависимости от четности подстановки s. Тогда множество полилинейных тождеств степени l совпадает с $I(f) \cap W_{l+1}$.

Доказательство. Как отмечалось в § 2, алгебра обобщенных полиномов $\mathcal{G}$ естественным образом содержит алгебру неккомутативных полиномов F от переменных $x_1, x_2, \ldots$. Очевидно, что полином $g \in F$ является тождеством алгебры M_n, если он является тождеством со следом, т. е. $g \in V_{D(n)}$. Следовательно, для нахождения полилинейных тождеств от $x_1, \ldots, x_l$ нужно найти все $g \in V_{D^{(n)}} \cap T_l$, имеющие вид

$$g(x_1, \ldots, x_l) = \sum \beta_{i_1, \ldots, i_l} x_{i_1} \ldots x_{i_l}. \tag{45}$$

Из определения изоморфизма φ леммы 8 видно, что $\varphi(g)$ принадлежит пространству полных циклов W_{l+1}. В силу того, что мы считаем отождествленными T_l и $K[S_{l+1}]$, элементы вида (45) образуют все пространство полных циклов W_{l+1}. Утверждение леммы теперь следует из того, что $V_{D^{(n)}} \cap T_n$, как мы видели при доказательстве теоремы 2, порождается элементом $\sum\limits_{s \in S_{n+1}} \varepsilon(s)s$, и из леммы 9, из которой следует, что $V_{D^{(n)}} \cap T_l = I(f)$. Следствие доказано.

Результат следствия 1 можно уточнить. Пусть $D^{(n)}$ обозначает то же, что и при доказательстве теоремы 2. Обозначим через φ_1 автоморфизм алгебры обобщенных полиномов $\mathscr{G}$ такой, что

$$\varphi_1\{a_0 \operatorname{Sp}(a_1) \ldots \operatorname{Sp}(a_t)\} = (-1)^t a_0 \operatorname{Sp}(a_1) \ldots \operatorname{Sp}(a_t).$$

Легко проверяется, что φ_1 переводит вербальные идеалы в вербальные идеалы и что φ_1 индуцирует автоморфизм в групповом кольце $T_l = K[S_{l+1}]$, для которого $\varphi_1(s) = \varepsilon(s)s$. В силу предложения 2, простой идеал в T_l, соответствующий таблице Юнга D, переходит в простой идеал, соответствующий таблице Юнга D^*, получающейся транспонированием таблицы D, и, следовательно, вербальный идеал V_D, соответствующий таблице Юнга D, переходит в вербальный идеал V_{D^*}. Автоморфизм φ_1 действует на пространстве полных циклов W_{l+1} как ± 1 в зависимости от четности циклов. Поэтому

$$V_{D^{(n)}} \cap W_{l+1} = V_{(D^{(n)})^*} \cap W_{l+1}$$

и, в силу следствия 1, полилинейные тождества алгебры M_n (а следовательно, и все тождества M_n) лежат в вербальном идеале $V = V_{D^{(n)}} \cap V_{(D^{(n)})^*}$ и совпадают с $V \cap W_{l+1}$.

Вербальный идеал V обладает тем свойством, что $V \cap T_k$ — двусторонний идеал в T_k относительно операции $\circ$ для всех натуральных k. По теореме 3 V порождается всеми содержащимися в нем вербальными идеалами V_D для некоторой таблицы Юнга D. Но $V \supseteq V_D$ тогда и только тогда, когда D содержит в качестве подтаблиц таблицы $D^{(n)}$ и $(D^{(n)})^*$, а поэтому и таблицу Юнга $\mathfrak{M}_n$

0	-1	-2	...	$-n$
1				
2				
...				
n				

с $2n+1$-ой клеткой. Следовательно, $V = V_{\mathfrak{M}_n}$ и все полилинейные тождества степени l алгебры M_n есть в точности $V_{\mathfrak{M}_n} \cap W_{l+1}$. В случае, когда $l = 2n$, $V_{\mathfrak{M}_n} \cap W_{2n+1}$ по теореме Амицура одномерно и порождается стандартным тождеством $P_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$. С другой стороны, $P_{2n} \in V_{\mathfrak{M}_n} \cap T_{2n}$ — простому двустороннему идеалу, соответствующему таблице Юнга $\mathfrak{M}_n$, поэтому P_{2n} порождает $V_{\mathfrak{M}_n} \cap T_{2n}$ как двусторонний идеал в алгебре T_{2n}. В силу леммы 9 получаем

Следствие 2. *Пусть $I(P_{2n})$ — двусторонний идеал в групповой алгебре $K[S_{l+1}]=T_l$, порожденный элементом $\varphi(P_{2n}x_{2n+1}\ldots x_l)\in W_{l+1}$, тогда множество всех полилинейных тождеств степени l есть в точности $W_{l+1}\cap I(P_{2n})$.*

Доказательство. Из леммы 9 следует, что двусторонний идеал $V_{\mathfrak{M}_n}\cap T_l$ порождается элементом $P_{2n}\prod_{j=2n+1}^{l}\mathrm{Sp}(x_j)$; то, что этот элемент порождает и идеал $I(P_{2n})$, вытекает из формул (37). Следствие доказано.

Это следствие показывает, что в некотором обобщенном смысле все тождества матричной алгебры M_n следуют из стандартного тождества степени $2n$.

Следует отметить, однако, что несмотря на то, что мы знаем описание идеалов $I(f)$ и $I(P_{2n})$ на языке таблиц Юнга, следствия 1, 2 не дают явных формул тождеств матричных алгебр и по сути дела дают другую формулировку задачи нахождения тождеств полной матричной алгебры M_n над полем характеристики нуль.

Следующий результат был получен в ([2]).

Следствие 3. *Пусть A_i — линейное преобразование из § 1, определенное на множестве полилинейных полиномов, тогда множество полилинейных тождеств матричной алгебры M_n инвариантно относительно A_i.*

Доказательство. Из следствия 1 вытекает, что множество полилинейных тождеств степени l алгебры M_n есть $V_{D(n)}\cap W_{l+1}\subset T_l$. Так как $V_{D(n)}\cap T_l$ и W_{l+1} инвариантны относительно линейного преобразования, заданного при помощи сопряжения элементом D_l группы $S_{l+1}=G\cap T_l$, то $f\in V_{D(n)}\cap W_{l+1}$ тогда и только тогда, когда $D_l\circ f\circ D_l\in V_{D(n)}\cap W_{l+1}$. Формула (36) показывает, что в этом случае $D_l\circ f\circ D_l=A_l(f)$. Следствие доказано.

В случае, когда характеристика поля K не равна нулю, ни лемма 4, ни теорема 3 не имеют места. Однако конструкция леммы 5 дает возможность построить интересный пример, касающийся тождеств алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть поле K имеет характеристику $p>3$ и $E(\gamma)=\prod_{i=0}^{p-1}(\gamma-i)$. Пусть, как и в лемме 5, $\mathfrak{b}_E$ — билинейная форма, соответствующая $E(\gamma)$, и V — вербальный идеал, соответствующий этой билинейной форме. Тогда $[x,\underbrace{y,\ldots,y}_{p-1\text{ раз}}]\in V$ и для любого натурального числа k $[x_1,\ldots,x_k]\notin V$, т. е. тождество $(p-1)$-энгелевости не влечет нильпотентности аглебры Ли.*

Доказательство. Так как $[x_1,\ldots,x_k]$ — полилинейный полином, то в силу равенства $\mathrm{Ann}_{T_k}\mathfrak{b}_E=V\cap T_k$ достаточно показать, что

$$[x_1, \ \ldots, \ x_k] \notin \mathrm{Ann}_{T_k} \mathfrak{b}_E.$$

Из определения $\mathfrak{b}_E$ и (23), (7) имеем:

$$\mathfrak{b}_E([x_1, \ \ldots, \ x_k], x_k \ \ldots \ x_1) = \gamma\alpha([x_1, \ \ldots, \ x_k] x_k \ \ldots \ x_1) =$$

$$= \gamma\alpha\left([x_1, \ \ldots, \ x_{k-1}] \frac{x_k^2}{\gamma} \gamma x_{k-1}, \ \ldots, \ x_1\right) = \gamma^2 \alpha([x_1, \ \ldots, \ x_{k-1}] x_{k-1} \ \ldots \ x_1) =$$

$$= \gamma^{k-1} \alpha([x_1, x_2] x_2 x_1) = (\gamma^2 - 1)\gamma^{k-1},$$

и так как $E(\gamma)$ не делит этого многочлена при $p > 3$, то $[x_1, \ \ldots, \ x_k] \notin V$.

Тождество $[x, y, \ \ldots, \ y]$ эквивалентно полилинейному тождеству $\sum_{s \in S_p} x_{s(1)} \ \ldots \ x_{s(p)}$, где сумма берется по всем подстановкам s на множестве $\{1, \ldots, p\}$. Этот полилинейный полином, в силу леммы 8, отождествляющей T_p относительно операции $\circ$ с $K[S_{p+1}]$ при помощи изоморфизма φ, равен τ_1 — сумме всех подстановок, являющихся циклами длины $(p+1)$. Из леммы 11, имеющей место и для поля характеристики $p > 0$, следует, что для доказательства того, что $\tau_1 \in V \cap T_p = \mathrm{Ann}_{T_p} \mathfrak{b}_E$, достаточно проверить, что $d \circ \tau_1 = 0$ в групповом кольце $K_E[S_{p+1}]$, где $K_E = K[\gamma]/\{E(\gamma)\}$.

Выясним сначала, чему равен элемент $d \circ \tau_1$ в случае, когда характеристика поля K равна нулю. В этом случае

$$d = d \circ 1 = d \circ \left(\sum_D 1_D\right) = \sum_D D(\gamma) 1_D,$$

где сумма берется по всем таблицам Юнга D и $D(\gamma)$ — ее граф, а $\tau_1 = \tau_1 \circ \left(\sum_D 1_D\right) = \sum_D \frac{\chi_D(\tau_1)}{m_D} 1_D$. Но из формулы (40) видно, что $\frac{\chi_D(\tau_1)}{m_D}$ — коэффициент при первой степени переменной γ в многочлене $D(\gamma)$, и из явной формулы графа (41) заведомо следует, что $\frac{\chi_D(\tau_1)}{m_D} = 0$, если во второй строке таблицы Юнга D больше одной клетки. Поэтому

$$d \circ \tau_1 = \sum D(\gamma) \frac{\chi_D(\tau_1)}{m_D} 1_D,$$

где сумма берется по таблицам D вида

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & -1 & -2 & \ldots & -k \\
\hline
1 & & & & \\
\cline{1-1}
2 & & & & \\
\cline{1-1}
\ldots & & & & \\
\cline{1-1}
p-k & & & & \\
\hline
\end{array} \tag{46}$$

Для таких таблиц характер $\chi_D(s) = (-1)^{p-k}$, где s — цикл длины $p+1$ [см., например, ([5])]. Поэтому $\chi_D(\tau_1) = (-1)^{p-k} p!$. С другой стороны, явная формула для 1_D ([5]) показывает, что

$$\frac{(p+1)!}{m_D} 1_D = \sum_{s \in S_{p+1}} \beta_s s,$$

где β_s — целые коэффициенты. Следовательно,

$$\frac{\chi_D(\tau_1)}{m_D} 1_D = \frac{(-1)^{p-k}}{p+1} \sum_{s \in S_{p+1}} \beta_s s$$

для любого D и этот элемент имеет смысл и в случае характеристики $p > 0$, т. е. $\frac{\chi_D(\tau_1)}{m_D} 1_D \in K[S_{p+1}]$. Остается заметить, что многочлены $D(\gamma)$, где D имеют вид (46), делятся на $E(\gamma) = \prod_{i=0}^{p-1} (\gamma - i)$ в случае поля характеристики $p > 0$. Следовательно, $d \circ \tau_1 = 0$ в $K_E[S_{p+1}]$. Теорема доказана.

В заключение мы хотим предложить читателю самостоятельно понизить данную Хигмэном ([6]) оценку класса нильпотентности алгебр с тождеством $y^n = 0$: *во всякой алгебре над полем характеристики нуль, в которой выполняется тождество* $y^n = 0$, *выполняется тождество* $x_1 \ldots x_{n^2} = 0$. Указание: в алгебре обобщенных полиномов рассмотреть вербальный идеал $V_{D^{(n)}} + V_{(D^{(n)})^*}$ и применить теорему 3.

Поступило
22.V.1973

Литература

1 **Размыслов Ю. П.**, О конечной базируемости тождеств полной матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль, Алгебра и логика, 12, № 1 (1973), 83—113.

2 **Размыслов Ю. П.**, Об одной проблеме Капланского, Изв. АН СССР. Сер. матем., 37 (1973), 483—501.

3 **Мурнаган Ф.**, Теория представлений групп, М., ИЛ, 1950.

4 **Кэртис Ч., Райнер И.**, Теоря представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М., «Наука», 1969.

5 **Robinson G. de B.**, Representation theory of the symmetric group, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1961.

6 **Higman D. G.**, On a conjecture of Nagata, Proc. Cambr. Phil. Soc., 32, № 1 (1956), 1—4.