



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. Yu. Zaitsev, Approximation of convolutions of probability distributions by infinitely divisible laws under weakened moment restrictions, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1992, Volume 194, 79–90

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 17, 2025, 11:52:33



АППРОКСИМАЦИЯ СВЕРТОК ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ  
БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫМИ ЗАКОНАМИ ПРИ ОСЛАБЛЕННЫХ  
МОМЕНТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

В работе автора [4] была доказана теорема, содержащая достаточно общую оценку точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин с помощью естественных приближающих распределений, некоторые из которых являются безгранично делимыми. Эта теорема содержала в качестве несложных следствий ряд известных результатов А.Н.Колмогорова [9], Л.Ле Кама [10], а также классическое неравенство Эссеена, дающее оценку погрешности в центральной предельной теореме (см. [1, 14, 17]). Цель данной статьи состоит в получении такого обобщения результата работы [4], формулировка которого наряду с неравенством Эссеена включала бы в себя и широкий спектр других общих оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме, компактная формулировка которых дана в работе В.В.Петрова [12] (см. [14, теорема 5, гл.V]).

Введем необходимые обозначения и соглашения. Пусть  $\mathcal{F}$  - множество вероятностных распределений, заданных на борелевской  $\sigma$ -алгебре подмножеств вещественной прямой  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D}$  - множество безгранично делимых законов из  $\mathcal{F}$ ;  $E_{\alpha} \in \mathcal{F}$  - распределение, сосредоточенное в точке  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $E = E_0$ ;  $\varphi_{\sigma}$  - нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$  ( $\sigma \geq 0$ );  $\mathcal{L}(\xi) \in \mathcal{F}$  - распределение случайной величины  $\xi$ ,  $I(A)$  - индикаторная функция события  $A$ . Для  $F, G \in \mathcal{F}$  будем обозначать  $\hat{F}(t)$ ,  $\hat{G}(t)$  - соответствующие характеристические функции;  $F(x)$ ,  $G(x)$  - функции распределения,  $\rho(F, G) = \sup |F(x) - G(x)|$ .

При  $F \in \mathcal{F}$ ,  $\lambda > 0$  обозначим  $\theta(F, \lambda) = \sup_x F\{[x, x+\lambda]\}$  - функцию концентрации,  $e(\lambda F) = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m F^{*m} / m! \in \mathcal{D}$  (произведения и

степени мер понимаются в смысле свертки:  $F \cdot G = F * G$ ,  $G^m = G^{*m}$ ,  $G^0 = E$ ). Символы  $c, c_1, c_2$  будут использоваться для обозначения абсолютных положительных постоянных, причем одной и той же буквой  $c$  могут обозначаться различные постоянные. Для некоторых численнозначных выражений  $a$  и  $b$  запись  $a \lesssim b$  будет означать, что  $a \leq cb$  и  $b \leq ca$ . Следуя [8, 14], введем класс  $\mathcal{G}$  функций  $g$ , заданных на  $\mathbb{R}$  и удовлетворяющих следующим условиям:

а)  $g(x)$  - неотрицательная, четная функция, которая положительна при  $x \neq 0$  и не убывает при  $x \geq 0$ .

б) функция  $x/g(x)$  не убывает при  $x > 0$ .

Сформулируем теперь основной результат данной статьи. Пусть  $g \in \mathcal{O}$  и распределения  $F_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, \dots, n$  представлены в виде

$$F_i = (1-p_i)U_i + p_iV_i, \quad (1)$$

где

$$0 \leq p_i \leq p = \max_{1 \leq i \leq n} p_i \leq 1; \quad (2)$$

$U_i, V_i \in \mathcal{F}$ , причем

$$\sigma_i^2 = (1-p_i) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 U_i \{dx\} < \infty, \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x U_i \{dx\} = 0, \quad (4)$$

а распределения  $V_i$  произвольны. Таким образом, моментные ограничения налагаются лишь на распределения  $U_i$ . При этом исходные распределения  $F_i$  могут иметь сколь угодно плохие моментные свойства. Положим

$$\beta_i = \beta_i(g) = (1-p_i) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) U_i \{dx\},$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \beta = \beta(g) = \sum_{i=1}^n \beta_i, \lambda = \lambda(g) = \min \left\{ \sigma, \frac{\beta(g)}{\sigma g(\sigma)} \right\},$$

$$W_i = (1-p_i)U_i + p_iE, G_i = (1-p_i)E + p_iV_i,$$

$$W = \prod_{i=1}^n W_i, G = \prod_{i=1}^n G_i, W^* = \prod_{i=1}^n e(W_i),$$

$$G^* = \prod_{i=1}^n e(G_i) = \prod_{i=1}^n e(p_iV_i), \mathcal{D}_0 = \prod_{i=1}^n F_i, \mathcal{D}_1 = WG, \quad (5)$$

$$\mathcal{D}_2 = \Phi_6 G, \mathcal{D}_3 = W^* G, \mathcal{D}_4 = WG^*, \mathcal{D}_5 = \Phi_6 G^*,$$

$$\mathcal{D}_6 = W^* G^* = \prod_{i=1}^n e(F_i).$$

Очевидно, что  $\mathcal{D}_5, \mathcal{D}_6 \in \mathcal{D}$ .

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия (I) - (5) и  $\sigma^2 > 0$  \*). Тогда при всех  $j = 1, \dots, 6$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_j) &\leq C \left( \rho + \min_{0 \leq k \leq 6} Q(\mathcal{D}_k, \lambda) \right) \asymp \\ &\asymp \rho + \frac{\lambda}{6} \min \left\{ Q(G, \sigma), Q(G^*, \sigma) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

При  $q(x) \equiv |x|$  теорема I превращается в основной результат работы [4]. В [4, 5] подробно комментируется связь результата [4] с предшествующими результатами А.Н.Колмогорова, Л.Ле Кама, К.-Г.Эссеена, Т.В.Арака и автора. Все комментарии, естественно, остаются в силе и для более общей (и более сильной) теоремы I. При  $\rho = 0$  неравенство (6) дает оценку

$$\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_6) \leq C \min \left\{ 1, \frac{\beta}{\sigma^2 q(\sigma)} \right\}, \quad (7)$$

совпадающую с основным результатом работы В.В.Петрова [12]. Напомним, что неравенство (7) в свою очередь представляет собой обобщение результатов А.М.Ляпунова ( $q(x) \equiv |x|^5, 0 < \delta < 1$ ), К.-Г.Эссеена [17] ( $q(x) \equiv |x|$ ), Л.В.Осипова [11] ( $q(x) \equiv \min\{|x|, \delta\}$ ) и Мелвина Каца [8], рассмотревшего случай одинаковых распределений  $F_i, i = 1, \dots, n$ , (см. [14]).

При фиксированном представлении распределений  $F_i$  в виде (I) существует в определенном смысле оптимальная функция  $q = q_0 \in \mathcal{Q}_f$ , минимизирующая правую часть неравенства (6). Эта функция задается формулой  $q_0(x) = \min\{|x|, \delta\}$ . Действительно, если  $q$  - произвольная функция из  $\mathcal{Q}_f$ ; а  $\xi_i$  - случайная величина с распределением  $\mathcal{L}(\xi_i) = W_i (i = 1, \dots, n)$ , то

$$\begin{aligned} \beta_i(q) &= E \xi_i^2 q(\xi_i) I(|\xi_i| \leq \delta) + E \xi_i^2 q(\xi_i) I(|\xi_i| > \delta) \geq \\ &\geq q(\delta) \delta^{-1} E |\xi_i|^3 I(|\xi_i| \leq \delta) + q(\delta) E \xi_i^2 I(|\xi_i| > \delta) = \\ &= \frac{q(\delta)}{q_0(\delta)} E \xi_i^2 q_0(\xi_i) = \frac{q(\delta)}{q_0(\delta)} \beta_i(q_0). \end{aligned}$$

Тем самым,  $\beta(q) \geq q(\delta) \beta(q_0) / q_0(\delta)$ ,  $\lambda(q) \geq \lambda(q_0)$ , что и тре-

\*). Если  $\sigma^2 = 0$ , то оценка  $\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_j) \leq C \rho$  вытекает из основного результата [3] (см. лемму I настоящей работы).

бывалось установить. Таким образом, если бы мы сформулировали теорему I только для функции  $q(x) \equiv q_0(x)$ , это не привело бы к потере общности. Использование другой функции  $q \in \mathcal{C}$  только ослабляет формулировку теоремы.\*) В частности, теорема I является усилением основного результата [4] ( $q(x) \equiv |x|$ ).

При применении теоремы I полезно иметь в виду, что выбор представления распределений  $F_i$  в виде (I) находится в нашем распоряжении. При этом различные варианты выбора представления (I) приводят к различным правым частям соответствующих оценок и к различным приближающим распределениям  $\mathcal{D}_j$ . Проиллюстрируем это высказывание на простейшем примере.

Пусть  $F_1 = F_2 = \dots = F_n$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta} F_1 \{dx\} < \infty$ , где  $0 < \delta < 1$ . Применяя теперь теорему I при  $q(x) \equiv |x|^\delta$ ,  $\rho = 0$ , мы получим оценку

$$\rho(F_1^n, \Phi_\delta) \leq c_1(F_1) n^{-\delta/2^{**}} \quad (8)$$

вытекающую из классического неравенства Ляпунова в центральной предельной теореме (см. [14, теорема 6 гл.V]). С другой стороны, выбор  $q(x) \equiv |x|$  при подходящем выборе представления (I) дает возможность получить оценку точности безгранично делимой аппроксимации  $n$ -кратной свертки  $F_1^n$ , имеющую вид

$$\rho(F_1^n, \mathcal{D}) \leq c_2(F_1) n^{-\frac{2+\delta}{6}} \quad (9)$$

где  $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$  (см. [6, 7]). Ясно, что порядок оценки (9) лучше, чем оценки (8). Однако, это достигается за счет усложнения приближающего распределения (в (9) приближающее распределение имеет вид  $\mathcal{D}_5$  или  $\mathcal{D}_6$ , если исходные распределения  $F_i$  подходящим образом центрированы).

Доказательство теоремы I аналогично по структуре доказательству основного результата [4]. Будут использованы следующие леммы.

ЛЕММА I [3]. Пусть распределения  $G_i \in \mathcal{F}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , имеют вид  $G_i = (1-p_i)E + p_i V_i$ , где  $0 \leq p_i \leq 1$ ,  $V_i \in \mathcal{F}$ . Тогда

\*) По поводу теоремы 5 гл.V [14] аналогичное рассуждение (в несколько иных обозначениях) проведено в [15].

\*\*\*) Обозначения  $c_i(F_1)$ ,  $i = 1, 2$ , используются для величин, зависящих только от  $F_1$ .

$$\rho\left(\prod_{i=1}^n G_i, \prod_{i=1}^n e(G_i)\right) \leq c \max_{1 \leq i \leq n} \rho_i.$$

ЛЕММА 2. (см. [1, теорема 1.2 гл. III]). Пусть  $F, G \in \mathcal{F}$ . Тогда для любого  $T > 0$  справедливо неравенство

$$\rho(F, G) \leq c \left( \int_0^T \left| \frac{\hat{F}(t) - \hat{G}(t)}{t} \right| dt + \min \left\{ Q\left(F, \frac{1}{T}\right), Q\left(G, \frac{1}{T}\right) \right\} \right).$$

ЛЕММА 3. [13]. Пусть  $\xi_i, i = 1, \dots, n$ , - независимые случайные величины,  $E \xi_i = 0, q \in \mathcal{Q}$ ,

$$\beta = \sum_{i=1}^n E(\xi_i^2 q(\xi_i)) < \infty, \sigma^2 = \sum_{i=1}^n E \xi_i^2 > 0, W = \mathcal{L}(\xi_1 + \dots + \xi_n).$$

Тогда при всех  $x \in \mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$|W(x) - \Phi_\sigma(x)| \leq \frac{c_1 \beta}{\sigma^2 \left(1 + \frac{|x|}{\sigma}\right)^2 q\left(\left(1 + \frac{|x|}{\sigma}\right)\sigma\right)}.$$

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия леммы 3,  $\lambda = \min \left\{ \sigma, \frac{\beta}{6q(\sigma)} \right\}$ , а  $G \in \mathcal{F}$  - произвольное распределение. Тогда

$$\rho(WG, \Phi_\sigma G) \leq c Q(WG, \lambda) \asymp Q(\Phi_\sigma G, \lambda) \asymp \frac{\lambda}{\sigma} Q(G, \sigma). \quad (10)$$

ЛЕММА 5. В условиях теоремы I

$$\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1) \leq c \left( \rho + \min \left\{ Q(\mathcal{D}_0, \lambda), Q(\mathcal{D}_1, \lambda) \right\} \right). \quad (11)$$

Уместно остановиться здесь на вероятностном смысле замены распределений  $F_i$  на распределения  $W_i G_i$  (именно такая замена переводит распределение  $\mathcal{D}_0 = \prod_{i=1}^n F_i$  в распределение  $\mathcal{D}_1$ ).

Известно, что распределения  $F_i$  можно записать в виде  $F_i = \mathcal{L}((1 - \mu_i) \xi_i + \nu_i \eta_i)$ , где  $\xi_i, \eta_i, \mu_i$  - независимые в совокупности случайные величины с распределениями  $\mathcal{L}(\xi_i) = U_i, \mathcal{L}(\eta_i) = V_i, \mathcal{L}(\mu_i) = (1 - \rho_i) E + \rho_i E_1$  и  $P(\nu_i = \mu_i) = 1$ . Распределения  $W_i G_i$  тоже можно записать в виде  $W_i G_i = \mathcal{L}((1 - \mu_i) \xi_i + \nu_i \eta_i)$ , где векторы и величины  $\xi_i, \eta_i, \mu_i, \nu_i$  имеют те же маргинальные распределения, что и в представлении для распределения  $F_i$ , но теперь все они независимы в совокупности, в том числе и  $\nu_i$  от  $\mu_i$  (см. [2, с. 52]).

При доказательстве лемм 4, 5 и теоремы I нам потребуются следующие хорошо известные простейшие свойства равномерного рас-

стояния и функций концентрации, справедливые для любых  $F, G, H \in \mathcal{F}$  и  $\delta, \delta_1, \delta_2 \geq 0$  :

$$Q(FG, \delta) \leq \min \{Q(F, \delta), Q(G, \delta)\}; \quad (I2)$$

$$Q(FG, \delta_1 + \delta_2) \geq Q(F, \delta_1) Q(G, \delta_2); \quad (I3)$$

$$Q(F, \delta_1) \leq (1 + [\delta_1 / \delta_2]) Q(F, \delta_2) \quad (I4)$$

( $[\cdot]$  - целая часть числа);

$$Q(F, \delta) \leq 2\rho(F, G) + Q(G, \delta); \quad (I5)$$

$$\rho(FH, GH) \leq \rho(F, G); \quad (I6)$$

$$\rho(FG, F) \leq \int_{-\infty}^{\infty} Q(F, |y|) G\{dy\}. \quad (I7)$$

(доказательства большинства из этих неравенств можно найти в [I6]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Положим  $x = \frac{\beta}{6q(\beta)}$ ,  $c_2 = 4\sqrt{2\pi} \in c_1$  и пусть сначала  $\delta \geq c_2 x$ . Пусть точка  $y_0$  такова, что  $G\{[y_0, y_0 + \delta]\} = Q(G, \delta)$  (см. [I6, с. II]). Используя лемму 3, получаем, что

$$\begin{aligned} Q(WG, c_2 x) &\geq WG\{[y_0, y_0 + c_2 x]\} \geq \int_{y_0}^{y_0 + \delta} W\{[y_0 - y, y_0 + c_2 x - y]\} G\{dy\} \geq \\ &\geq G\{[y_0, y_0 + \delta]\} \inf_{y \in [y_0, y_0 + \delta]} W\{[y_0 - y, y_0 + c_2 x - y]\} \geq \\ &\geq Q(G, \delta) \left( \inf_{y \in [y_0, y_0 + \delta]} \Phi_{\delta}\{[y_0 - y, y_0 + c_2 x - y]\} - \frac{2c_1 x}{\delta} \right) \geq \\ &\geq Q(G, \delta) \left( \frac{e^{-1} c_2 x}{\sqrt{2\pi} \delta} - \frac{2c_1 x}{\delta} \right) = \frac{2c_1 x}{\delta} Q(G, \delta). \end{aligned} \quad (I8)$$

Аналогично доказывается, что

$$Q(\Phi_{\delta} G, c_2 x) \geq \frac{4c_1 x}{\delta} Q(G, \delta). \quad (I9)$$

Еще раз применяя лемму 3, находим, что при всех  $x \in \mathbf{R}$

$$|WG(x) - \Phi_{\delta} G(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (W(x-y) - \Phi_{\delta}(x-y)) G\{dy\} \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c_1 \varkappa}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G\{dy\}}{\left(1 + \frac{|x-y|}{6}\right)^2} = \frac{c_1 \varkappa}{6} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{x+k\delta}^{x+(k+1)\delta} \frac{G\{dy\}}{\left(1 + \frac{|x-y|}{6}\right)^2} \leq \\ &\leq \frac{2c_1 \varkappa}{6} Q(G, \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^2} = \frac{c \varkappa}{6} Q(G, \delta) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\rho(WG, \Phi_{\delta} G) \leq \frac{c \varkappa}{6} Q(G, \delta). \quad (20)$$

Для любого  $x \in \mathbb{R}$  мы имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_{\delta} G\{[x, x+c_2 \varkappa]\} &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{x+k\delta}^{x+(k+1)\delta} \Phi_{\delta}\{[x-y, x+c_2 \varkappa-y]\} G\{dy\} \leq \\ &\leq Q(G, \delta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sup_{y \in (k\delta, (k+1)\delta)} \Phi_{\delta}\{[y, c_2 \varkappa+y]\} \leq \\ &\leq Q(G, \delta) \frac{c_2 \varkappa}{\sqrt{2\pi} \delta} \left(3 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2/2}\right) = \frac{c \varkappa}{6} Q(G, \delta). \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21), (20), (15) следует, что

$$Q(\Phi_{\delta} G, c_2 \varkappa) \leq \frac{c \varkappa}{6} Q(G, \delta), \quad (22)$$

$$Q(WG, c_2 \varkappa) \leq \frac{c \varkappa}{6} Q(G, \delta). \quad (23)$$

Теперь (10) при  $\delta \geq c_2 \varkappa$  следует из (20), (18), (19), (22), (23), (14), так как в этом случае  $\lambda \asymp \varkappa$ .

Пусть теперь  $\delta < c_2 \varkappa$ . Тогда, в силу (17), (14)

$$\begin{aligned} \rho(WG, G) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} Q(G, |y|) W\{dy\} \leq \\ &\leq Q(G, \delta) \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{|y|}{6}\right) W\{dy\} \leq 2Q(G, \delta) \end{aligned} \quad (24)$$

и, аналогично,  $\rho(\Phi_{\delta} G, G) \leq 2Q(G, \delta)$  (см. [16, теорема I.23]).  
Значит

$$\rho(WG, \Phi_{\delta} G) \leq 4Q(G, \delta). \quad (25)$$

С помощью неравенства Чебышева легко устанавливается, что

$$W\{(-2\delta, 2\delta)\} \geq 1/2, \quad \Phi_{\delta}\{(-2\delta, 2\delta)\} \geq 1/2.$$



Используя (13), отсюда получаем, что

$$Q(WG, 56) \geq Q(W, 46)Q(G, 6) \geq Q(G, 6)/2 \quad (26)$$

$$Q(\Phi_6 G, 56) \geq Q(G, 6)/2. \quad (27)$$

Теперь из (25)-(27), (12), (14) следует (10) при  $\delta < C_2 \lambda$ , поскольку в этом случае  $\lambda \asymp \delta$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Пользуясь леммой 2 и неравенством (14), нетрудно вывести оценку

$$\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1) \leq c \left( \int_0^{(\delta\lambda)^{-1}} \left| \frac{\hat{\mathcal{D}}_0(t) - \hat{\mathcal{D}}_1(t)}{t} \right| dt + \right. \\ \left. + \min \{ Q(\mathcal{D}_0, \lambda), Q(\mathcal{D}_1, \lambda) \} \right). \quad (28)$$

Очевидно, что

$$|\hat{\mathcal{D}}_0(t) - \hat{\mathcal{D}}_1(t)| = \\ = \left| \sum_{k=1}^n (1-p_k)(1-\hat{u}_k(t)) p_k (\hat{V}_k(t)-1) \prod_{m=1}^{k-1} \hat{F}_m(t) \prod_{m=k+1}^n \hat{W}_m(t) \hat{G}_m(t) \right| \leq \\ \leq 2p \sum_{k=1}^n (1-p_k) |1-\hat{u}_k(t)| \prod_{m=1}^{k-1} |\hat{F}_m(t)| \prod_{m=k+1}^n |\hat{W}_m(t)|. \quad (29)$$

Введем симметризованные случайные величины  $\Psi_k = \eta_k - \bar{\xi}_k$ , где  $\eta_k, \bar{\xi}_k, k=1, \dots, n$ , - такие независимые случайные величины, что  $\mathcal{L}(\eta_k) = \mathcal{L}(\bar{\xi}_k) = u_k$ . Применяя стандартные методы, легко показать, что при всех  $t \in \mathbf{R}$  справедливы неравенства

$$(1-p_k) |1-\hat{u}_k(t)| \leq \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}, \quad (30)$$

$$|\hat{u}_k(t)|^2 = \mathbf{E} e^{it\Psi_k} = 1 - \frac{1}{2} \mathbf{E} t^2 \Psi_k^2 + \\ + \mathbf{E} (e^{it\Psi_k} - 1 - it\Psi_k + \frac{1}{2} t^2 \Psi_k^2) \mathbf{I}(|\Psi_k| \leq \delta) + \\ + \mathbf{E} (e^{it\Psi_k} - 1 - it\Psi_k + \frac{1}{2} t^2 \Psi_k^2) \mathbf{I}(|\Psi_k| > \delta) \leq \\ \leq 1 - \frac{1}{2} t^2 \mathbf{E} \Psi_k^2 + 2M_k(t), \quad (31)$$

где

$$M_k(t) = \frac{1}{12} \mathbf{E} |t\Psi_k|^3 \mathbf{I}(|\Psi_k| \leq \delta) + \frac{1}{2} t^2 \mathbf{E} \Psi_k^2 \mathbf{I}(|\Psi_k| > \delta). \quad (32)$$

Заметим теперь, что при  $0 \leq u \leq 1$ ,  $x \in \mathbf{R}$  из неравенства  $u^2 \leq 1-x$  следует, что  $u \leq 1-x/2$ . Поэтому из (31), (3) вытекает, что при всех  $t \in \mathbf{R}$ ,  $k=1, \dots, n$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
|\hat{u}_k(t)| &\leq 1 - \frac{1}{2} t^2 D \eta_k + M_k(t), \\
0 &\leq \max \{ |\hat{F}_k(t)|, |\hat{W}_k(t)| \} \leq \\
&\leq (1-p_k) |\hat{u}_k(t)| + p_k = 1 + (1-p_k) (|\hat{u}_k(t)| - 1) \leq \\
&\leq 1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma_k^2 + (1-p_k) M_k(t) \leq \\
&\leq \exp\left(-\frac{1}{2} t^2 \sigma_k^2 + (1-p_k) M_k(t)\right). \tag{33}
\end{aligned}$$

Из (33), в частности, следует, что

$$-\frac{1}{2} t^2 \sigma_k^2 + (1-p_k) M_k(t) \geq -1. \tag{34}$$

Подставляя оценки (30), (33), в (29) и учитывая (5), (34), получаем, что при всех  $t \in \mathbf{R}$

$$|\hat{\Delta}_0(t) - \hat{\Delta}_1(t)| \leq \rho \sigma^2 t^2, \tag{35}$$

$$|\hat{\Delta}_0(t) - \hat{\Delta}_1(t)| \leq \rho \sigma^2 t^2 \exp\left(1 - \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 + M(t)\right), \tag{36}$$

где

$$M(t) = \sum_{k=1}^n (1-p_k) M_k(t). \tag{37}$$

Используя определение случайных величин  $\Psi_k$  и то, что  $g(2x) \leq 2g(x)$ , получаем оценку

$$\begin{aligned}
E \Psi_k^2 g(\Psi_k) &= E (\eta_k - \xi_k)^2 g(\eta_k - \xi_k) (I(|\eta_k| > |\xi_k|) + I(|\eta_k| \leq |\xi_k|)) \leq \\
&\leq 8 E \eta_k^2 g(\eta_k) I(|\eta_k| > |\xi_k|) + 8 E \xi_k^2 g(\xi_k) I(|\eta_k| \leq |\xi_k|) \leq \\
&\leq 16 E \eta_k^2 g(\eta_k), \quad k = 1, \dots, n. \tag{38}
\end{aligned}$$

Перейдем к непосредственному оцениванию величин  $M_k(t)$  и  $M(t)$ . Предположим сначала, что

$$32\beta \leq \sigma^2 g(\sigma). \tag{39}$$

Тогда

$$\lambda = \min \left\{ \sigma, \frac{\beta}{\sigma g(\sigma)} \right\} = \frac{\beta}{\sigma g(\sigma)}. \tag{40}$$

В силу (38), (40), (5) и поскольку  $g \in \mathcal{G}$ , при  $|t| \leq (8\lambda)^{-1}$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n (1-p_k) \mathbf{E} |t \psi_k|^3 \mathbf{I}(|\psi_k| \leq \delta) \leq \\ & \leq \frac{1}{12} \frac{\delta}{q(\delta)} \sum_{k=1}^n (1-p_k) |t|^3 \mathbf{E} \psi_k^2 q(\psi_k) \leq \frac{4}{3} |t|^3 \frac{\beta \delta}{q(\delta)} \leq \\ & \leq \frac{1}{6} \delta^2 t^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Кроме того, согласно (5), (38), (39),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (1-p_k) t^2 \mathbf{E} \psi_k^2 \mathbf{I}(|\psi_k| > \delta) \leq \\ & \leq \frac{1}{2q(\delta)} \sum_{k=1}^n (1-p_k) t^2 \mathbf{E} \psi_k^2 q(\psi_k) \leq \frac{8t^2 \beta}{q(\delta)} \leq \frac{1}{4} \delta^2 t^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Пользуясь теперь соотношениями (36), (37), (32), (41), (42), находим, что при  $|t| \leq (8\lambda)^{-1}$  имеет место неравенство

$$|\hat{\mathcal{D}}_0(t) - \hat{\mathcal{D}}_1(t)| \leq \epsilon \rho \delta^2 t^2 \exp\left(-\frac{1}{12} \delta^2 t^2\right). \quad (43)$$

Подставляя (43) в (28), получаем, что неравенство (II) справедливо, если выполняется (39).

Пусть теперь  $32\beta > \delta^2 q(\delta)$ . Тогда  $\lambda > \delta/32$  и, согласно (28), (35),

$$\rho(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1) \leq c \left( \int_0^{4\delta^{-1}} \rho \delta^2 t dt + \min \{ \alpha(\mathcal{D}_0, \lambda), \alpha(\mathcal{D}_1, \lambda) \} \right).$$

Тем самым, неравенство (II) доказано в полном объеме.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.** Согласно лемме 5, справедливо неравенство (II). Пусть  $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с общим распределением  $\mathcal{L}(\xi_{ij}) = W_i$ ,  $i=1, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots$ . Положим  $S_{im} = \xi_{i1} + \dots + \xi_{im}$  и введем события  $A_{ij}^{(m)} = \{ \omega : |\xi_{ij}(\omega)| = \max_{1 \leq k \leq m} |\xi_{ik}(\omega)| \}$ . Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} S_{im}^2 q(S_{im}) & \leq \sum_{j=1}^m \mathbf{E} S_{im}^2 q(S_{im}) \mathbf{I}(A_{ij}^{(m)}) \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^m m^2 \mathbf{E} \xi_{ij}^2 q(m \xi_{ij}) \leq m^4 \mathbf{E} \xi_{i1}^2 q(\xi_{i1}). \end{aligned} \quad (44)$$

Введем случайные величины  $\eta_i$ , такие, что  $\mathcal{L}(\eta_i) = e(W_i)$ . Нетрудно видеть, что тогда  $\mathbf{E} \xi_{ij} = \mathbf{E} \eta_i = 0$ ,  $\mathbf{D} \xi_{ij} = \mathbf{D} \eta_i = \sigma_i^2$ ,  $\mathbf{E} \xi_{ij}^2 q(\xi_{ij}) = \beta_i$ ,

$$\beta_i^* = E \eta_i^2 g(\eta_i) = e^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} E S_{im}^2 g(S_{im}) / m!$$

и, в силу (44), (5),

$$\lambda = \min \left\{ \beta, \frac{\beta}{6q(\beta)} \right\} \asymp \lambda^* = \min \left\{ \beta, \frac{\beta^*}{6q(\beta)} \right\}, \quad (45)$$

где  $\beta^* = \beta_1^* + \dots + \beta_n^*$ . Применяя лемму 4 и учитывая соотношения (45), (14), (5), получаем, что

$$\rho(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \leq c Q(\mathcal{D}_1, \lambda), \quad (46)$$

$$\rho(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3) \leq c Q(\mathcal{D}_2, \lambda), \quad (47)$$

$$Q(\mathcal{D}_1, \lambda) \asymp Q(\mathcal{D}_2, \lambda) \asymp Q(\mathcal{D}_3, \lambda) \asymp Q(\mathcal{D}_2, \lambda^*) \asymp \frac{\lambda}{6} Q(G, \beta). \quad (48)$$

Далее, из леммы I и неравенства (16) вытекает, что

$$\max \{ \rho(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_4), \rho(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_5), \rho(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_6) \} \leq \rho(G, G^*) \leq c\rho. \quad (49)$$

Из (II), (15), (46)-(49) нетрудно вывести, что

$$\max_{0 \leq k \leq 6} Q(\mathcal{D}_k, \lambda) \leq c \left( \rho + \min_{0 \leq k \leq 6} Q(\mathcal{D}_k, \lambda) \right), \quad (50)$$

$$Q(G, \beta) \leq c\rho + Q(G^*, \beta). \quad (51)$$

Теперь утверждение теоремы следует из (II), (46)-(51).

#### Литература

1. А р а к Т.В., З а й ц е в А.Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. - Труды МИАН, 1986, т. 174, 216 с.
2. A r a u j o A., G i n é E. The central limit theorem for real and Banach valued random variables. N.Y.: Wiley, 1980.
3. З а й ц е в А.Ю. О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, отличных от нуля с малыми вероятностями, с помощью сопровождающих законов. - Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, № 4, с. 625-636.
4. З а й ц е в А.Ю. О равномерной аппроксимации функций рас-

- пределения сумм независимых случайных величин. - Теория вероятн. и ее примен., 1987, т.32, № 1, с.45-52.
5. Z a i t s e v A.Yu. On the uniform approximation of distribution functions of sums of independent non-identically distributed random variables. - In: Proceedings of the 1st World Congress of the Bernoulli Society, v.2, Utrecht: VSP, 1987, p.697-700.
  6. З а й ц е в А.Ю. Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных векторов. - Дис. на соиск. уч.ст.д-ра физ.-матем.наук. Л.: ЛОМИ, 1988.
  7. З а й ц е в А.Ю. Аппроксимация сверток сопровождающими законами при моментных ограничениях. - В сб.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып.3. Л.: ЛГУ, 1991.
  8. K a t z M. Note on the Berry-Esseen theorem. - Ann.Math. Statist., 1963, v.34, N 3, p.1107-1108.
  9. К о л м о г о р о в А.Н. О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями. - Труды Моск.матем.об-ва, 1963, т.12, с.437-451.
  10. L e s a m L. On the distribution of sums of independent random variables. - In: Bernoulli, Bayes, Laplace (anniversary volume). Berlin: Springer, 1965, p.179-202.
  11. О с и п о в Л.В. Уточнение теоремы Линдеберга. - Теория вероятн. и ее примен., 1966, т.II, № 2, с.339-342.
  12. П е т р о в В.В. Одна оценка отклонения суммы независимых случайных величин от нормального закона. - Докл.АН СССР, 1965, т.160, № 5, с.1013-1015.
  13. П е т р о в В.В. Одна предельная теорема для сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин. - В кн.: Исследования по теории вероятностных распределений.IV. - Зап. научн.семина.ЛОМИ, 1979, т.85, с.188-192.
  14. П е т р о в В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 320 с.
  15. С т у д н е в Ю.П. Замечание по поводу теоремы Каца-Петрова. - Теория вероятн. и ее примен., 1965, т.10, № 4, с.751-753.
  16. Х е н г а р т н е р В., Т е о д о р е с к у Р. Функции концентрации. М.: Наука, 1980, 176 с.
  17. E s s e e n C.-G. Fourier analysis of distribution functions: A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. - Acta Math., 1945, v.77, p.1-125.