

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Палкина, Б. М. Смирнов, Асимптотические методы расчета кинетических коэффициентов, *ТВТ*, 1974, том 12, выпуск 1, 37–47

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.231.219.178

7 ноября 2024 г., 00:17:26



УДК 533.9.01

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

*Л. А. Палкина, Б. М. Смирнов*

Предложен асимптотический метод вычисления кинетических коэффициентов переноса, справедливый в случае, когда тепловая энергия частиц значительно превышает глубину их потенциальной ямы взаимодействия. Метод основан на резкости изменения потенциала взаимодействия  $U(R)$  частиц в области расстояний  $R_0$  между ними, где он порядка тепловой энергии  $U(R_0) \sim T [U'(R_0)R_0/U(R_0) \gg 1]$ . Оценивается точность метода. На основе этого метода вычислены коэффициенты переноса (вязкости и теплопроводности) для всех инертных газов в диапазоне температур от 2000 до 12 000° К.

1. Кинетические коэффициенты переноса в газе и плазме (коэффициенты диффузии, теплопроводности и вязкости) связаны с упругими соударениями частиц. При расчете этих коэффициентов [1–17] используются потенциалы взаимодействия частиц газа и сам расчет должен быть произведен в два этапа: по потенциалу взаимодействия рассчитываются усредненные сечения столкновения частиц, затем через них выражаются кинетические коэффициенты переноса. Для простых систем потенциал взаимодействия аппроксимируется некоторыми функциями и с помощью найденных параметров потенциала взаимодействия по известным таблицам [1–9, 18] определяются величины коэффициентов переноса.

Используемое при этом приближение Чепмена — Энскога в том случае, если точно известны сечения столкновения частиц, дает точность порядка процента [18, 19]. Причем, если мы имеем многокомпонентную систему частиц, то приближение Чепмена — Энскога очень громоздко, а сам процесс расчета коэффициентов переноса становится трудоемким. Однако точность определения сечений столкновения частиц, обусловленная ошибкой в знании потенциала взаимодействия, оказывается порядка десятка процентов. Поэтому большие вычислительные затраты при расчете коэффициентов переноса неоправданы. В такой ситуации удобно упростить задачу вычисления кинетических коэффициентов за счет некоторой потери точности, которая должна оцениваться и не превышать ошибку, обусловленную неточностью потенциала взаимодействия. Этому и посвящена данная работа. В предлагаемой статье при вычислении кинетических коэффициентов переноса мы пользуемся тем, что потенциал взаимодействия атомных частиц в газе резко изменяется с изменением расстояния между ядрами. Малым параметром предлагаемой теории является величина  $1/n = |U(R_0)/R_0 U'(R_0)|$ , где  $U$  — потенциал взаимодействия частиц системы;  $R \sim R_0$  — расстояние между ядрами, при котором потенциал взаимодействия порядка тепловой энергии частиц, причем  $U(R_0) = \epsilon$  ( $\epsilon$  — энергия столкновения частиц). Кинетические коэффициенты разлагаются по этому малому параметру, причем мы ограничиваемся первыми двумя членами разложения. Это обстоятельство было использовано в работах [20–23] для расчета коэффициентов переноса простых систем. Ниже мы оценим точность данного метода, который на-

зовем асимптотическим методом, и используем его при расчете кинетических коэффициентов конкретной сложной системы плазмы инертного газа.

2. При тепловых энергиях соударения величина  $R_0$  значительно превышает характерные атомные размеры, причем поскольку зависимость потенциала взаимодействия  $U(R)$  при  $R \sim R_0$  очень резкая, воспользуемся малым параметром задачи  $n^{-1} \ll 1$  [ $n^{-1} = U(R_0)/R_0 U'(R_0)$ ] для отыскания поправки  $\sim n^{-1}$  к сечению  $\sigma = \pi R_0^2$ , ибо без этого точность полученного результата практически недостаточна.

Зная структуру потенциала взаимодействия в области  $R \sim R_0$ , представим диффузионное сечение

$$\sigma^{(1)} = 2\pi \int_0^{\infty} (1 - \cos \chi) \rho \, d\rho \quad (1)$$

и вязкостное сечение

$$\sigma^{(2)} = 2\pi \int_0^{\infty} (1 - \cos^2 \chi) \rho \, d\rho, \quad (2)$$

( $\rho$  — прицельный параметр соударения;  $\chi$  — угол отклонения частицы в центрально-симметричном поле) в виде разложения по степеням малого параметра и ограничимся первыми членами этого разложения. Для этой цели напишем классический угол рассеяния  $\chi$

$$\chi = \pi - 2\varphi = \pi - 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho/r^2 \, dr}{\sqrt{1 - (\rho^2/r^2) - (U(r)/\varepsilon)}} \quad (3)$$

в виде

$$\varphi = \arcsin(\rho/r_0) + \Delta\varphi,$$

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}} \frac{dr_0}{d\rho} + \int_{r_0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho^2/r^2) - (U/\varepsilon)}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho^2/r^2)}} \right] \frac{\rho \, dr}{r^2}, \quad (4)$$

$r_0$  — классическая точка поворота;  $\varepsilon$  — энергия столкновения частиц. Величина  $\Delta\varphi (\ll 1)$  порядка величины параметра разложения. Разложим диффузионное и вязкостное сечения по степеням  $\Delta\varphi$

$$\sigma^{(1)} = 2\pi \int_0^{\infty} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{r_0^2} - \frac{2\rho}{r_0} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}} \Delta\varphi \right] d(\rho^2), \quad (5)$$

$$\sigma^{(2)} = 4\pi \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\rho^2}{r_0^2} \left( 1 - \frac{\rho^2}{r_0^2} \right) + \frac{2\rho}{r_0} \left( 1 - 2 \frac{\rho^2}{r_0^2} \right) \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}} \Delta\varphi \right\} d(\rho^2). \quad (6)$$

Преобразуем  $\Delta\varphi$  к виду

$$\Delta\varphi = 2\rho \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}} \frac{dr_0}{d(\rho^2)} - 2\rho \frac{d}{d(\rho^2)} \int_{r_0}^{\infty} \left[ \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U}{\varepsilon}} - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right] dr. \quad (7)$$

Для определения первого члена разложения  $\Delta\varphi$  по степеням  $n^{-1}$  вычисляем интеграл в этом выражении, полагая, что подынтегральная разность меняется только за счет резко меняющегося потенциала, т. е. интеграл сходится вблизи  $r = r_0$ , а  $dr_0/d(\rho^2)$  находим с помощью уравнения, определяющего классическую точку поворота. С учетом этого, подставляя выражение (7) в (5) и (6) и проводя интегрирование, получаем с точностью

до  $n^{-1}$  включительно для диффузионного сечения

$$\sigma^{(1)} = \pi R_0^2 \left( 1 + \frac{3-4 \ln 2}{n} \right) \simeq \pi R_1^2, \quad R_1^{(1)} = R_0 + \frac{3-4 \ln 2}{2n} R_0 \quad (8)$$

и для вязкостного сечения

$$\sigma^{(2)} = \frac{2}{3} \pi R_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{17}{3} - 4 \ln 2 \right) \frac{1}{n} \right] \simeq \frac{2}{3} \pi R_1^2, \quad (9)$$

$$R_1^{(2)} = R_0 + \left( \frac{17}{3} - 4 \ln 2 \right) \frac{1}{2n} R_0.$$

Учитывая, что  $n^{-1}(R_0) = -U(R_0)/R_0 U'(R_0)$ , получаем для эффективного радиуса  $R_1$  в случае диффузионного сечения

$$U(R_1^{(1)}) = U(R_0) \cdot 4/e^{3/2} = 0,89\epsilon,$$

а в случае вязкостного сечения

$$U(R_1^{(2)}) = U(R_0) \cdot 4/e^{17/6} = 0,23\epsilon. \quad (10)$$

Таким образом, диффузионное и вязкостное сечения рассеяния частицы при резко убывающем отталкивательном потенциале можно представить формулами (8) — (10).

После усреднения по максвелловскому распределению относительных скоростей столкновения получаем для диффузионного и вязкостного сечений соответственно

$$\bar{\sigma}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^2 e^{-x} \sigma^{(1)}(x) dx = \sigma^{(1)} [T e^{\psi(3)}],$$

$$\bar{\sigma}^{(2)} = \frac{1}{6} \int_0^\infty x^3 e^{-x} \sigma^{(2)}(x) dx = \sigma^{(2)} [T e^{\psi(4)}],$$

здесь  $x = \mu v^2/2T$ ,  $\mu$  — приведенная масса сталкивающихся атомов;  $v$  — скорость их относительного движения, аргумент в сечении означает энергию, при которой берется сечение;  $\psi$  — логарифмическая производная гамма-функции.

Это дает для диффузионного сечения

$$\bar{\sigma}^{(1)} = \pi R_d^2, \quad (11a)$$

где  $R_d$  определяется из соотношения

$$U(R_d)/T = 4/e^c = 2,25. \quad (11b)$$

Аналогично для вязкостного сечения находим

$$\bar{\sigma}^{(2)} = \frac{2}{3} \pi R_v^2, \quad (12a)$$

где

$$U(R_v)/T = 4/e^{c+1} = 0,83, \quad (12b)$$

$C$  — постоянная Эйлера.

Формулы (11), (12) дают выражения для усредненных сечений, через которые выражаются значения кинетических коэффициентов для резко убывающего отталкивательного потенциала взаимодействия частиц. В частности, для оценки точности асимптотического метода были вычислены сечения рассеяния непосредственно для случая, когда потенциал взаимодействия задавался в виде  $U = d/R^n$  при  $n=4, 6, 8, 10, 12$ . Полученные значения для сечения рассеяния были представлены в

виде разложения по степеням  $n^{-1}$ . Эти выражения имеют вид

$$\sigma^{(1)} = \pi R_0^2 \left( 1 + \frac{0,23}{n} + \frac{2,7}{n^2} \right); \quad \sigma^{(2)} = \frac{2}{3} \pi R_0^2 \left( 1 + \frac{2,89}{n} + \frac{2,5}{n^2} \right). \quad (13)$$

Выделив в формулах (13) асимптотические значения сечений (8)–(10), мы сможем оценить точность асимптотического метода, используя результаты вычисления в конкретных случаях. Именно, формулы (13) с учетом (8)–(10) представим в виде

$$\sigma^{(m)} = \sigma_{ас}^{(m)} [1 + (a_m/n^2)],$$

где  $\sigma_{ас}^{(m)}$  — асимптотические значения диффузионного ( $m=1$ ) и вязкостного ( $m=2$ ) сечений, определяемые формулами (8)–(10), второе слагаемое в представленной формуле характеризует точность асимптотических выражений. Коэффициент  $a_m$  принимает значения 2,7 и 2,5 для диффузионного и вязкостного сечений соответственно.

Изложенный способ нахождения сечений столкновения атомов справедлив для энергий соударения, при которых взаимодействие в основном определяется отталкивательной частью потенциала, а притяжение пренебрежимо мало. В табл. 1 приводятся отношения сечений столкновения,

Таблица 1

$T/\epsilon_0$	3	5	10	100
$\bar{\sigma}^{(1)}/\bar{\sigma}_{точн}^{(1)}$	0,854	0,909	0,945	0,977
$\bar{\sigma}^{(2)}/\bar{\sigma}_{точн}^{(2)}$	0,854	0,916	0,959	0,989

полученных рассмотренным способом, к вычисленным численными методами  $\bar{\sigma}_{точн}^{(m)}$  в случае потенциала Леннарда-Джонса [18] для различных значений  $T/\epsilon_0$  ( $\epsilon_0$  — глубина ямы притяжения взаимодействующих частиц). Из этой таблицы можно оценить точность рассмотренного метода вычисления кинетических коэффициентов, связанную с использованием малости глубины ямы притяжения.

3. Таким образом, мы получили общие результаты для сечений рассеяния, через которые выражаются кинетические коэффициенты переноса, в случае резко изменяющегося отталкивательного потенциала взаимодействия между частицами. Была оценена точность полученного результата. Поскольку при расстояниях между атомными частицами, сравнимых с их размерами, потенциал взаимодействия резко изменяется, то эти общие результаты могут быть использованы для расчета кинетических коэффициентов различных систем атомных частиц, когда тепловая энергия превышает энергию связи этих частиц.

В случае, когда полученные результаты используются для расчета конкретной системы — плазмы инертного газа при высоких температурах, мы имеем дело с трехкомпонентной системой, состоящей из атомов, ионов и электронов, ибо газ слабо ионизован. При этом потенциал взаимодействия атомов и ионов с атомами является резко отталкивательным, так что разработанный метод здесь применим.

Перейдем к вычислению коэффициентов вязкости в инертных газах при температурах до  $12\,000^\circ\text{K}$ . При высоких температурах становится существенной ионизация атомов газа, так что заметный вклад в процесс вязкости вносят атом-ионные и ион-ионные столкновения. Используем, что электроны не вносят вклада в перенос импульса. При вычислении

коэффициента вязкости для смеси атомов и ионов воспользуемся приближением Чепмена — Энскога. Заметим, что в пределе малых температур, когда смесь состоит из одних атомов, второе приближение Чепмена — Энскога изменяет результат лишь на 1,5%. Поэтому мы ограничимся первым приближением Чепмена — Энскога.

Когда ионизация незначительна, то вязкость, связанная с процессом передачи импульса, целиком определяется атом-атомными столкновениями. Так как в рассматриваемой области температур взаимодействие атомов является резко отталкивательным, то на основе формулы (12) для вязкостного сечения в первом приближении Чепмена — Энскога коэффициент вязкости в атомном газе дается выражением [18]

$$\eta_a = 5/24 \cdot \sqrt{\pi M T / \sigma}^{(2)}, \quad (14)$$

где  $M$  — масса атомов.

При температурах  $\sim 10\,000^\circ\text{K}$  ионизация атомов становится заметной, особенно для тяжелых атомов (например, для ксенона степень ионизации при  $T=10^4\text{K}$  и  $p=1\text{ атм}$  составляет 19%), поэтому при таких температурах необходимо учитывать процессы, связанные с присутствием ионов в газе. Столкновения однократно заряженных ионов друг с другом сопровождаются кулоновским взаимодействием. Обрезая потенциал взаимодействия на радиусе Дебая и вычисляя сечение столкновения, по формуле, определяющей вязкость в полностью ионизованном газе, получаем в первом приближении Чепмена — Энскога

$$\eta_i = \frac{5}{4\sqrt{\pi}} \frac{M^{1/2} T^{3/2}}{e^4 [\ln \Lambda + 2(1-c)]}, \quad (15)$$

где  $\Lambda = T^3 / 2\pi N_i e^6$ . Плотность ионов  $N_i$  находится из распределения Саха

$$N_i = \left( \frac{m_e}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{g_e g_i}{g_a}} \sqrt{p} T^{3/2} e^{-I/2T}, \quad (16)$$

где  $m_e$  — масса электрона;  $\hbar$  — постоянная Планка;  $g_a, g_i$  — статистические веса атома и иона в основном состоянии;  $g_e=2$ ,  $p$  — давление газа;  $I$  — потенциал ионизации атомов.

Образование положительных ионов при высоких температурах сопровождается процессами перезарядки ионов на своих атомах и упругого взаимодействия ионов и атомов. Сечение упругого рассеяния иона на атоме много меньше сечения резонансной перезарядки. Учитывая это, а также то, что электроны не участвуют в переносе импульса и, следовательно, не вносят вклада в вязкость, представим общее выражение [19], для коэффициента вязкости двухкомпонентной смеси в виде

$$\eta = \eta_a + \frac{2\eta_i - n_{21}\eta_a}{n_{12}\eta_i/\eta_a + n_{21} + (3/4 \cdot E/\eta_a)}, \quad (17)$$

здесь  $\eta_a, \eta_i$  — коэффициенты вязкости в атомном и ионном газе соответственно,  $n_{12} = (n_{21})^{-1} = N_a/N_i$ ,  $N_a, N_i$  — плотности атомов и ионов. В этой формуле  $E$  связано с процессом перезарядки ионов на атомах и согласно [19] дается выражением

$$E = \sqrt{\pi M T} \int_0^\infty e^{-x^2} \sigma_{\text{рез}}(x) dx, \quad (18)$$

где  $x = \mu v^2 / 2T$  — энергия относительного движения системы атом — ион,  $\sigma_{\text{рез}}$  — сечение резонансной перезарядки иона на собственном атоме. Усредняя сечение резонансной перезарядки по скоростям относительного движения сталкивающихся частиц с использованием логарифмической

зависимости сечения от скорости, получим [24]

$$E = \frac{1}{2} \sqrt{\pi M T} \sigma_{\text{рез}}^{-1} (2,2 \sqrt{2T/M}), \quad (19)$$

где в аргументе указана скорость, при которой берется это сечение.

Как следует из (17), коэффициент вязкости имеет максимум при температурах, где степень ионизации плазмы мала. Действительно, из этой формулы для соотношения  $1 \gg N_i/N_a \gg \sigma_a/\sigma_i$  имеем  $\eta/\eta_a = (1 + A \cdot N_i/N_a \cdot \sigma_{\text{рез}}/\sigma_a)^{-1}$ , где  $A$  — константа порядка единицы;  $\sigma_a$  и  $\sigma_i$  — сечение рассеяния в атомном и ионном газе соответственно. Кроме того, в области температур, где  $N_i \ll N_a$ ,  $dN_i/dT \sim I/2T^2 N_i$ . Отсюда следует, что максимум коэффициента вязкости ожидается при выполнении соотношения  $N_i/N_a \sim T/I \cdot \sigma_a/\sigma_{\text{рез}}$ , где степень ионизации плазмы мала.

На основании формул (14)–(17) и (19) были вычислены коэффициенты вязкости для всех инертных газов при различных температурах. Для нахождения сечений  $\sigma^{(2)}$  были использованы наиболее надежные потенциальные кривые, полученные из обработки сечений упругого рассеяния быстрых атомов [25–27] на малые углы. Для сечений резонансной

Т а б л и ц а 2

Газ	He	Ne	Ar	Kr	Xe	
$T_{\text{макс}}, \text{ }^\circ\text{K}$	—	—	11 000	10 000	9000	
$\eta \cdot 10^{-4}, \text{ г/смсек}$	$\eta_{\text{макс}}$	*	*	26,1	32,8	34,4
	4000° K	13,1	17,4	11,7	17,05	—
	8000° K	23,5	29,6	20,1	29	33,1

\* Максимум ожидается при  $T > 12\,000^\circ\text{K}$ , где расчеты не производились.

перезарядки были использованы асимптотические выражения [28]. Полученные результаты в случае гелиевой и ксеноновой плазмы при различных температурах и давлениях приведены на рис. 1 и 2. Здесь же приведены результаты расчета Амдура и Мэсона [12] для одноатомного газа с использованием таблиц для их потенциалов взаимодействия [26] и для потенциала Амдура и Харкнеса [25] в пределе слабой ионизации газа. Как видно на примере гелия и ксенона, в рассматриваемом предельном случае результаты асимптотического метода согласуются с результатами численных методов при использовании в обоих подходах одинакового потенциала взаимодействия. В то же время на примере ксенона наблюдается расхождение результатов, полученных асимптотическим методом с использованием разных потенциалов взаимодействия — Амдура [26] и Леонаса [27]. Наблюдаемый на рис. 2 загиб кривой вязкости связан с тем, что с повышением температуры ионизация атомов становится существенной и ионы начинают препятствовать атомам в переносе импульса. При этом с повышением давления степень ионизации понижается, и кривая для коэффициента вязкости идет выше.

В табл. 2 при давлении  $p=1 \text{ атм}$  приводятся максимальные значения коэффициентов вязкости слабоионизованной плазмы, температура  $T_{\text{макс}}$ , при которой наблюдаются эти максимумы, а также коэффициенты вязкости при 4000 и 8000° K.

Анализ результатов, приведенных на рис. 1 и 2, свидетельствует об удобстве предложенного метода. Этот метод прост в обращении и полученный на его основе результат мало отличается от результата трудоемких численных расчетов в предельном случае атомного газа. Заметим, что вычислительные трудности в конкретных расчетах часто возникают за

счет упрощений, которые не являются обоснованными и точность которых трудно оценить. Как следует из рис. 1 и 2, отличие результатов, основанных на разных потенциалах взаимодействия, гораздо сильнее, чем различие результатов разных методов, основанных на одинаковых потенциалах взаимодействия.

4. Перейдем к нахождению коэффициентов теплопроводности в слабоионизованной плазме. Учитывая, что при высоких температурах плотности электронов становятся значительными и электроны вследствие их

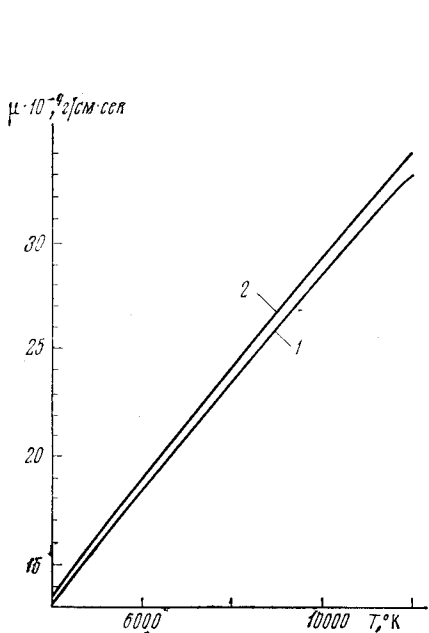


Рис. 1

Рис. 1. Зависимость коэффициента вязкости плазмы гелия от температуры ( $p=1$  атм):

1 — данные авторов; 2 — [12], причем 1 и 2 соответствуют потенциалу [25]

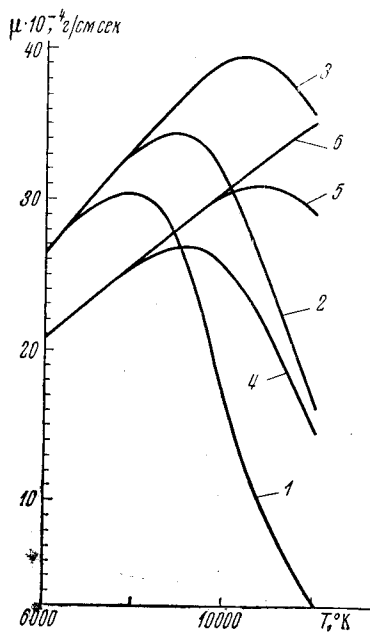


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость коэффициента вязкости плазмы ксенона от температуры и давления:

1—3 — данные авторов для  $p=0,1$ ; 1; 10 атм соответственно (потенциал [27]); 4, 5 — данные авторов; 4 — 1 атм; 5 — 10 атм (потенциал [26]); 6 — [12] (потенциал [26])

больших скоростей более эффективны в передаче энергии, чем тяжелые атомы и ионы, коэффициент теплопроводности обусловлен передачей энергии в результате движения как атомов, ионов, так и электронов. При этом, поскольку обмен энергией электронов с атомами мал ( $\sim m_e/M$ ), то потоки тепла, обусловленные движением тяжелых атомных частиц и электронов, складываются

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_e + \lambda_p. \quad (20)$$

В этом выражении первая компонента относится к переносу тепла тяжелыми частицами, вторая — электронами в атомно-ионном газе,  $\lambda_p$  — коэффициент теплопроводности реакции. Оценки показывают, что ионы влияют на коэффициент теплопроводности, обусловленный тяжелыми частицами, при температурах, где  $\lambda_e \gg \lambda_a$ . Поэтому участием ионов в переносе тепла можно пренебречь.

Теплопроводность в атомном газе вычислялась в первом приближении Чепмена — Энскога [49]

$$\lambda_a = 15/4 \cdot (k/M) \eta_a, \quad (21)$$



где  $\eta_a$  — коэффициент вязкости одноатомного газа;  $k$  — постоянная Больцмана. Это приближение является вполне достаточным, учитывая точность нахождения сечений столкновения атомов.

Электронная теплопроводность была найдена в приближении Лоренца, которое соответствует разложению этой величины по степеням  $m_e/M$  [19]. При нахождении  $\lambda_e$ , соответствующей движению электронов в атомном газе, учитывалось наведение электрических полей в газе, вызванное наличием градиента температуры [29, 30], причем учет электрических полей приводит к снижению эффективного коэффициента теплопроводности. Действительно, согласно общим соотношениям для потока тепла  $\mathbf{q} = N_e \langle (m_e v_e^2/2) \cdot \mathbf{v}_e \rangle$  ( $\mathbf{v}_e$  — вектор скорости электрона) и электрического поля  $\mathbf{j} = eN_e \langle \mathbf{v}_e \rangle$  в слабоионизованной плазме при наличии в ней градиента температуры  $\nabla T$  и электрического поля напряженностью  $\mathbf{F}$ , имеем

$$\mathbf{q} = -\kappa_{11} \nabla T - \kappa_{12} \mathbf{F}, \quad \mathbf{j} = \kappa_{21} \nabla T + \kappa_{22} \mathbf{F}. \quad (22)$$

В стационарном состоянии

$$q = -\lambda_e \nabla T = -\kappa_{11} [1 - (\kappa_{12} \kappa_{21} / \kappa_{11} \kappa_{22})] \nabla T,$$

т. е. [29]

$$\lambda_e = \kappa_{11} [1 - (\kappa_{12} \kappa_{21} / \kappa_{11} \kappa_{22})], \quad (23)$$

причем  $\lambda_e = \kappa_{11}$  при отсутствии электрического поля. В выражении (22) коэффициенты при перекрестных членах находятся путем использования функции распределения электронов в слабоионизованной плазме при наличии электрического поля или градиента температуры и даются следующими выражениями:

$$\kappa_{11} = \frac{4N_e}{3\sqrt{\pi}} \frac{T}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_{ea}} x^{3/2} e^{-x} \left(x - \frac{5}{2}\right) dx, \quad \kappa_{12} = \frac{4N_e}{3\sqrt{\pi}} \frac{T}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_{ea}} x^{3/2} e^{-x} dx, \quad (24)$$

$$\kappa_{21} = \frac{4N_e}{3\sqrt{\pi}} \frac{T}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_{ea}} x^{3/2} \left(x - \frac{5}{2}\right) e^{-x} dx, \quad \kappa_{22} = \frac{4N_e}{3\sqrt{\pi}} \frac{T}{m_e} \int_0^{\infty} \frac{1}{v_{ea}} x^{3/2} e^{-x} dx.$$

Здесь  $x = m_e v_e^2 / 2T$ ,  $N_e$  — плотность электронов;  $v_{ea} = N_a v_e \sigma_{ea}^*$  — частота упругого столкновения электрона с атомом;  $\sigma_{ea}^*$  — диффузионное сечение рассеяния электрона на атоме, для которого используется его разложение при малых энергиях по сравнению с характерными атомными энергиями [28, 31]

$$\sigma_{ea}^* = \int (1 - \cos \chi) d\sigma = 4\pi \left[ L^2 + \frac{4}{5} \pi \alpha v_e L + \frac{\pi^2 \alpha^2 v_e^2}{6} \right]. \quad (25)$$

В выражении (25)  $L$  — длина рассеяния электрона на атоме;  $\alpha$  — поляризуемость атома.

В случае сильноионизованной плазмы в (24) следует учитывать также частоту столкновений электронов с ионами и электронами, т. е. частоту столкновений электронов с атомами  $v_{ea}$  следует заменить  $v_{ea} + B v_{ei}$ , с коэффициентом  $B$  таким, чтобы в предельном случае полностью ионизованной плазмы получить формулу Спитцера. Этот коэффициент оказывается равным  $(1 - 1/3\Lambda_1)$ ;  $\Lambda_1 = \ln(T^3/N_e e^6)$ .

Поскольку градиент температуры приводит к появлению градиента плотности заряженных частиц, это вызывает дополнительный перенос энергии в область с меньшей температурой. Действительно, мы имеем направленный поток заряженных частиц

$$\mathbf{j} = -D_a \nabla N_e, \quad (26)$$

где  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии. Этот поток при наличии термодинамического равновесия компенсируется обратным потоком атомов. В результате получаем, что заряженные частицы переходят в область с меньшей температурой и там рекомбинируют. Это приводит к дополнительному потоку тепла  $q_p = -Ij = -ID_a \nabla N_e = -D_a N_e \cdot I^2 / 2T^2 \cdot \nabla T$ , что соответствует коэффициенту теплопроводности, обусловленному рекомбинацией и входящему в формулу (20)

$$\lambda_p = D_a N_e (I/T)^2. \quad (27)$$

Коэффициент амбиполярной диффузии для слабоионизованной плазмы, находящейся в термодинамическом равновесии, равен в приближении Чепмена — Энскога

$$D_a = 3\sqrt{\pi} T / 8N_a \sqrt{M} \sigma_{рез}, \quad (28)$$

где  $\sigma_{рез}$  — сечение резонансной перезарядки иона на атоме. Отсюда видно, что вклад за счет реакции в общую теплопроводность оказывается существенным. Действительно, как показывает соотношение

$$\lambda_p / \lambda_e \sim \sqrt{m_e / M} \sigma_{ca} / \sigma_{рез} (I/T)^2, \quad (29)$$

эта величина несмотря на малость отношения массы электрона к массе атома может внести заметный вклад в коэффициент теплопроводности за счет большой величины  $(I/T)^2$ . При этом с ростом температуры в области электронной теплопроводности это отношение падает. С другой стороны, в области малых температур вклад теплопроводности реакции с уменьшением температуры падает по сравнению с атомной теплопроводностью, ибо  $\lambda_p$  пропорционально плотности заряженных частиц. Поэтому максимальный вклад  $\lambda_p$  в общую теплопроводность имеет место при температурах, где  $\lambda_a \sim \lambda_e$ . Например, в случае аргона максимальный вклад теплопроводности реакции составляет  $\sim 35\%$ .

По формулам (20), (21), (23)–(25), (27), (28) можно рассчитать коэффициенты теплопроводности инертных газов при достаточно высоких температурах. Полученные результаты для коэффициента теплопроводности в случае плазмы инертного газа приведены на рис. 3–5. Численные значения для длины рассеяния  $L$  и поляризуемости атомов  $\alpha$  были взяты из [28]. При расчете коэффициента теплопроводности перенос тепла за счет лучистой теплопроводности не учитывался. На рис. 3–5 приведены экспериментальные данные и результаты других расчетов. При высоких температурах перенос тепла определяется электронной теплопроводностью, при низких — атомной.

5. Сравнение результатов рассматриваемого метода с результатами других расчетов показывает, что они более чувствительны к используемым сечениям, чем к методу расчета. Расчет сечений с помощью вычислительной машины, как известно, связан с трудностью введения в память машины таблиц, позволяющих выразить сечения столкновения частиц через параметры их взаимодействия. Асимптотический метод избавляет нас от этой необходимости и позволяет решать более сложные задачи. Например, трудоемкость расчета Девото [15] для коэф-

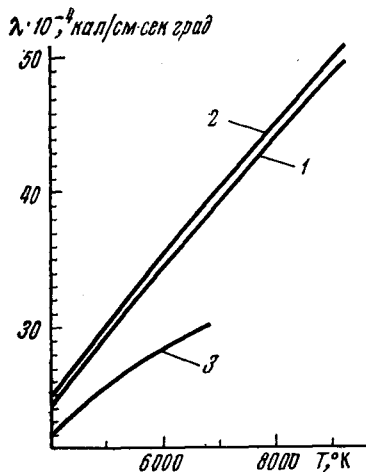


Рис. 3. Зависимость коэффициента теплопроводности плазмы от температуры ( $p=1$  атм):

1 — данные авторов; 2 — [12]; 3 — [32] (эксперимент)

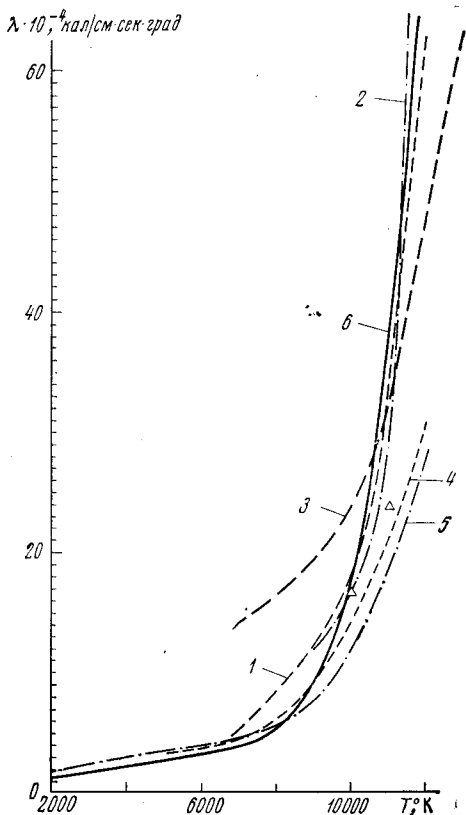


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость коэффициента теплопроводности плазмы аргона от температуры ( $p=1$  атм).

Экспериментальные данные: 1 — [33]; 2 — [34]; 3 — [35]; точки — [36]. Теоретические данные: 4 — [15]; 5 — [37]; 6 — данные авторов

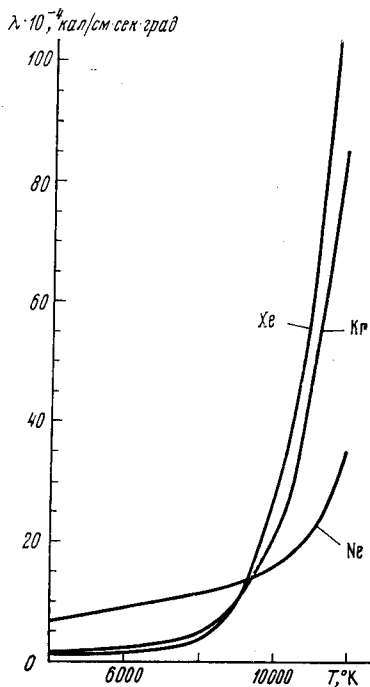


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость коэффициента теплопроводности плазмы неона, криптона и ксенона от температуры ( $p=1$  атм)

коэффициентов вязкости и теплопроводности аргоновой плазмы не идет ни в какое сравнение с трудоемкостью выполненных здесь расчетов. Для осуществления расчетов по общей программе Девото необходимо было воспользоваться весьма совершенной вычислительной машиной с большой затратой времени. Представленная в этой работе схема вычислений позволяет ограничиться при расчете машиной типа логарифмической линейки, причем надежность расчета не хуже, чем у Девото, ибо конечный результат определяется точностью вводимых параметров для потенциалов взаимодействия и сечений рассеяния.

Таким образом, представленный здесь асимптотический метод расчета кинетических коэффициентов переноса позволяет значительно упростить задачу, причем ошибки за счет простоты этого метода обычно меньше тех, которые обусловлены неточностью потенциальных кривых. Особенно он удобен при расчете сложных систем, где использование этого метода дает возможность значительно сократить вычислительные операции практически без потери точности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Monchick*. Phys. Fluids, 2, 695, 1959.
2. *K. Kihara, M. H. Taylor, J. O. Hirschfelder*. Phys. Fluids, 3, 715, 1960.
3. *L. Monchick, E. A. Mason*. J. Chem. Phys., 35, 1676, 1961.
4. *R. S. Brokaw*. Phys. Fluids, 4, 94, 1961.
5. *F. J. Smith, R. J. Munn*. J. Chem. Phys., 41, 3560, 1964.
6. *R. J. Munn, E. A. Mason, F. J. Smith*. Phys. Fluids, 8, 1103, 1965; J. Chem. Phys. 42, 1334, 1965.
7. *Е. В. Самуйлов, Н. Н. Цителаури*. Отчет ЭНИИ, 1963.
8. *Е. В. Самуйлов, Н. Н. Цителаури*. Теплофизика высоких температур, 2, 565, 1964; 7, 168, 1969.
9. *Е. В. Самуйлов, Н. Н. Цителаури*. В сб. Исследования по физической газодинамике. «Наука», 1966, стр. 14.
10. *Е. В. Самуйлов, Н. В. Воскресенская*. Теплофизика высоких температур, 5, 983, 1967.
11. *Е. В. Самуйлов, Н. Н. Цителаури*. Теплофизика высоких температур, 8, 754, 1174, 1970; 9, 197, 1971.
12. *J. Amdur, E. A. Mason*. Phys. Fluids, 1, 370, 1958.
13. *П. П. Кулик, И. Г. Паневин, В. И. Хвеев*. Теплофизика высоких температур, 1, 56, 1963.
14. *А. Б. Камнев, В. Б. Леонас*. Теплофизика высоких температур, 3, 804, 1965.
15. *R. S. Devoto*. Phys. Fluids, 10, 354, 1967.
16. *Ю. Н. Беляев, В. Б. Леонас*. Теплофизика высоких температур, 6, 188, 1968.
17. *J. H. Dymond*. J. Phys., B4, 621, 1971.
18. *Дж. Гиришфельдер, Ч. Кергис, Д. Берд*. Молекулярная теория газов и жидкостей. Изд. иностр. лит., М., 1961.
19. *С. Чепмен, Т. Каулинг*. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
20. *Л. А. Палкина, Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов*. ЖЭТФ, 56, 340, 1969.
21. *Л. А. Палкина*. Теплофизика высоких температур, 10, 1972.
22. *Л. А. Палкина*. Докл. АН СССР, 1972.
23. *Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов*. Теплофизика высоких температур, 9, 513, 1971.
24. *Ю. П. Мордвинов, Б. М. Смирнов*. ЖЭТФ, 48, 133, 1965.
25. *I. Amdur, A. L. Harkness*. J. Chem. Phys., 22, 664, 1954.
26. *I. Amdur, E. A. Mason*. J. Chem. Phys., 25, 624, 1956.
27. *А. Б. Камнев, В. Б. Леонас*. Докл. АН СССР, 162, 798, 1965; 165, 1273, 1965.
28. *Б. М. Смирнов*. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. Атомиздат, 1968.
29. *L. Spitzer, A. Hart*. Phys. Rev., 89, 977, 1953.
30. *Л. Спитцер*. Физика полностью ионизованного газа. «Мир», 1965.
31. *T. F. O'Malley*. Phys. Rev., 130, 1020, 1963.
32. *D. I. Collins, R. Greif, A. E. Bryson*. Intern. J. Heat and Mass Trans., 8, 1209, 1965.
33. *H. W. Emmons*. Phys. Fluids, 10, 1125, 1967.
34. *I. Bues, H. I. Patt, I. Richter*. Z. Angew. Phys., 22, 345, 1967.
35. *I. Kimura, A. Kanazawa*. AIAA J., 5, 1315, 1967.
36. *Э. И. Асиновский, Е. П. Пахомов*. Теплофизика высоких температур, 5, 962, 1967; 8, 890, 1970.
37. *И. А. Кринберг*. Теплофизика высоких температур, 3, 654, 1965.