А. П. Киселев, Фокусировка ВКБ-решений уравнения $[\Delta+k^2n^2(x)]u=0$, $k\to\infty$, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1975, том 51, 123–128

Киселев А.П.

ФОКУСИРОВКА ВКБ - РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $[\Delta+\kappa^2 n^2(x)]u=0,\ \kappa\to\infty$.

Заметка посвящена следующей задаче рассеяния для уравнения Гельмгольца

$$[\Delta_x+\kappa^2 n^2(x)]u=0, \quad x\in\mathbb{R}^m,\ m>1,\ \kappa>0, \qquad n^2\in C^\infty(\mathbb{R}^m), \quad n^2>0 . \tag{I}$$

Пусть задано формальное высокочастотное асимптотическое, $\kappa\to\infty$, решение*) уравнения (I), соответствующее сходящейся в фокус геометрооптической волне - лучевое (ВКБ) разложение, построенное по центральному полю лучей. Требуется найти волну рассеянную (уходящую).

Вблизи фокальной точки характер волнового поля не геометрооптический. Мы ищем там другое, фокальное, разложение. Оно строится с некоторым произволом и определяется однозначно при сшивании с приходящим лучевым. Сшивая затем фокальный ряд с уходящей волной, можно найти ее начальные данные (для всех приближений разложения по степеням κ^{-1}). Наша техника локальных разложений близка к развитой в [I]. Эта методика позволяет рассмотреть и задачу о фокусе в римановом пространстве, описывающую при $m=2$ фокусировку волн соскальзывания или шепчущей галереи на поверхности.

Задачу, видимо, можно решить и с помощью других приемов (метод канонического оператора В.П.Маслова [2], построение равномерной асимптотики путем наложения квазиплоских волн [3], [4], [5] или по Адамару [6]).

I. Лучевые ряды. Построим центральное поле лучей, т.е. экстремалей функционала Ферма

$$\int n(\xi)\,d\ell(\xi) \tag{2}$$

($d\ell$ - элемент евклидовой длины) с фокусом в точке 0. В достаточно малой своей окрестности $\mathcal{D}_0$ фокус является единственной особенностью лучевого поля: если $J(x)$ - геометрическое расхождение лучей**), см.[I], то $1/J(x)\in C^\infty(\mathcal{D}_0\setminus 0)$ и $1/J(0)=\infty$. Опре-

*) Высокочастотным асимптотическим (формальным) решением уравнения (I) в области $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ может зависеть от κ) мы называем асимптотический при $\kappa\to\infty$ ряд, если ряд из невязок его частичных сумм также асимптотический. Ряд $\sum f_s(x,\kappa)$ называют асимптотическим в $\mathcal{D}$ если $f_s(x,\omega)=O(\kappa^{-\varepsilon s+c})_{s\geqslant 0}$ для некоторых $\varepsilon>0$ и c равномерно в $\mathcal{D}$ при всех s .

**) Величина $1/J(x)$ есть гауссова кривизна поверхности, трансверсальной к нашему лучевому полю.

делим в $\mathcal{D}_0$ эйконал $\tau(x) \geqslant 0$ как значение интеграла (2), взятого от 0 до x вдоль луча. Параметризуем лучи касательными к ним векторами $\nabla\tau/|\nabla\tau|\Big|_{x=0}$, т.е. точками единичной $m-1$ - мерной сферы S_{m-1}.

Рассмотрим два класса асимптотических решений уравнения (I) лучевого (квазиклассического, ВКБ) вида:

$$u^{\pm} \sim e^{\pm i\kappa\tau(x)} \sum_{\iota \geqslant 0} (-i\kappa)^{\rho^{\pm}-\iota} u_{\iota}^{\pm}(x), \quad (-i)^{s} = e^{-i\pi s/2}, \tag{3}$$

Предполагая функции $u_{\iota}^{\pm}$ и константы $\rho^{\pm}$ не зависящими от κ, получаем как необходимое условие того, что ряды (3) - асимптотические решения уравнения (I), рекуррентную систему для $u_{\iota}^{\pm}$. Решения ее имеют вид [I]:

$$u_{\iota}^{\pm} = \left(n(x)\mathcal{J}(x)\right)^{-1/2}\left[\Psi_{\iota}^{\pm} \pm \int_{0}^{\tau(x)} \frac{1}{2}\mathcal{J}^{1/2}(\xi)n^{-3/2}(\xi)\Delta_{\xi}u_{\iota-1}^{\pm}d\tau(\xi)\right], \quad u_{-1}^{\pm} \equiv 0, \tag{4}$$

где интеграл, понимаемый в смысле конечной части, берется вдоль луча, функции $\Psi_{\iota}^{\pm} \in C^{\infty}(S_{m-1})$ постоянны на каждом луче, а в остальном произвольны.

Наша задача - найти по известным начальным данным ρ^{-}, Ψ_{ι}^{-}, $\iota = 0,1,\ldots$, приходящей волны u^{-} соответствующие величины в лучевом разложении уходящей u^{+}.

Легко проверить, что при $x \to 0$

$$u_{\iota}^{\pm} \sim |x|^{\frac{1-m}{2}} \sum_{s \geqslant -\iota} \sum_{t \geqslant 0} C_{\iota s t}^{\pm}\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{s}\ell n^{t}|x|, \quad C_{\iota s t}^{\pm} \in C^{\infty}(S_{m-1}). \tag{5}$$

Отсюда следует

Теорема I. Ряды (2) при любых $\Psi_{\iota}^{\pm} \in C^{\infty}(S_{m-1})$, $\iota = 0,1,\ldots$ являются асимптотическими решениями уравнения (I) в области $\mathcal{D}_R(\kappa, c', \varepsilon') = \{x : x \in \mathcal{D}_0, \ |x| > c'\kappa^{-1+\varepsilon'}\}$; где $c', \varepsilon' > 0$ произвольны.

В достаточно малой окрестности фокуса, $x = O(\kappa^{-1})$, разложения (3) теряют асимптотический характер. Перейдем к построению решения, позволяющего сшить (склеить, срастить) ряды (3).

2. <u>Фокальный ряд</u>. Разложим в точке $x = 0$ квадрат показателя преломления $n^2(x)$ в ряд Тейлора:

$$n^2(x) \sim N_0^2 + \sum_{\ell \geqslant 1} N_\ell(x), \qquad N_0 > 0, \tag{6}$$

где $N_\ell(x)$ однородны степени ℓ относительно x. Перейдем к растянутым координатам

$$X = \kappa x. \tag{7}$$

Асимптотическое решение вблизи фокуса будем искать в виде

$$u \sim \sum_{\ell \geq 0} \kappa^{\lambda-\ell} V_\ell(X) \tag{8}$$

считая, что V_ℓ зависят от κ лишь через X. Мы придем к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &(\Delta_X + N_0^2)V_0(X) = 0 \\ &(\Delta_X + N_0^2)V_\ell(X) = -\sum_{0 \leq p < \ell} N_{\ell-p}(X)V_p(X), \ \ell > 0 \end{aligned}\right\} . \tag{9}$$

Решения рекуррентной системы (9) можно найти в виде интегралов по плоским волнам:

$$V_\ell(X) = \int_{|\xi|=1} A_\ell(\xi, X)\, e^{iN_0\langle \xi, X\rangle} d\xi ,$$

где $\langle \xi, X \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$,

$$A_\ell(\xi, X) = \sum_{0 \leq p \leq 2\ell} |X|^p A_{\ell p}(\xi) ,$$

$$A_{\ell p} \in C^\infty(S_{m-1}); \quad \ell \geq 0 ,$$

причем вся неопределенность в построении V_ℓ сводится к произволу в выборе функций A_{00}, A_{10}, ... , $A_{\ell 0}$. Это отвечает возможности прибавить к V_ℓ решение однородного уравнения

$$(\Delta_X + N_0^2)\, v = 0 . \tag{10}$$

Из сказанного вытекает

Теорема 2. Ряд (8) есть асимптотическое решение уравнения (I) в области $\mathcal{D}_F(\kappa, c'', \varepsilon'') = \{x : |x| < c''\kappa^{-1/2+\varepsilon''}\}$ при любых c'', $\varepsilon'' > 0$. На расстояниях $O(\kappa^{-1/2+\alpha})$, $\alpha > 0$, разложение (8), вообще говоря, не асимптотическое.

В $\mathcal{D}_F$ при $|X| \to \infty$ метод стационарной фазы дает:

$$\begin{gathered} V_\ell \sim e^{iN_0|X|} \sum_{0 \leq t \leq 2\ell} |X|^{t+\frac{1-m}{2}} v_{\ell t}^{+}\left(\frac{X}{|X|}\right) + e^{-iN_0|X|} \sum_{0 \leq t \leq 2\ell} |X|^{t+\frac{1-m}{2}} v_{\ell t}^{-}\left(\frac{X}{|X|}\right) \\ v_{\ell t}^{\pm} \in C^\infty(S_{m-1}) \\ v_{00}^{\pm}(\xi) = \pi^{\frac{m-1}{2}} e^{\pm\frac{\pi i}{4}(1-m)} A_{00}(\pm\xi) . \end{gathered} \tag{II}$$

Слагаемые в (II), содержащие соответственно множители $e^{-iN_0|X|}$ и $e^{+iN_0|X|}$ отвечают приходящим и уходящим волнам.

Выберем $\varepsilon' + \varepsilon'' < \frac{1}{2}$, тогда области $\mathcal{D}_R$ и $\mathcal{D}_F$ будут пересекаться. В пограничном слое $\Pi(\kappa, c', \varepsilon', c'', \varepsilon'') = \mathcal{D}_R \cap \mathcal{D}_F$ можно пользоваться и лучевыми и фокальными формулами.

3. Сшивание. Перестроим асимптотики лучевых рядов при $x \to 0$ к виду, удобному для сшивания с (11). Осциллирующие множители разложим следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} & e^{\pm i\kappa\tau(x)} \sim e^{\pm iN_0|X|}\sum_{p\geq 0}\kappa^{-p}\tau_p^{\pm}(x), \\ & \tau_p^{\pm}(x)=\sum_{p\leq q\leq 2p}|x|^{p}\tau_{pq}^{\pm}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad \tau_{pq}^{\pm}\in C^{\infty}(S_{m-1}), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

подставим (12), (5) и (4) в (3), перейдем к растянутой переменной X и соберем коэффициенты при одинаковых степенях κ и $\ln\kappa$. В пограничном слое Π лучевые разложения перестроятся к виду

$$u^{\pm}\sim\sum_{p\geq 0,\, q\geq 0}\kappa^{\rho^{\pm}+m-p}\ln_{\kappa}^{q}\, U_{pq}^{\pm}(X), \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} & U_{pq}^{\pm}\sim e^{\pm iN_0|X|}|X|^{\frac{1-m}{2}}\sum_{s\leq 2p,\, t\geq 0}|X|^{s}\ln^{t}|X|\cdot\Phi_{pqst}^{\pm}\left(\frac{X}{|X|}\right), \\ & \Phi_{pqst}^{\pm}\in C^{\infty}(S_{m-1}) \end{aligned}\right\}. \quad (14)$$

Здесь $\Phi_{pqst}^{\pm}$ не зависят от κ.

$$U_{00}^{-}=e^{-\frac{i\pi\rho^{-}}{2}}N_0^{-1/2}\psi_0^{-}|X|^{\frac{1-m}{2}}.$$

Назовем выражение вида (13), где индексы p, q, s, t пробегают значения $0\leq p\leq M$, $0\leq q\leq M$, $-p\leq s\leq 2p$, $0\leq t<M$, M-й частичной суммой ряда (13). Ряд (13), как можно показать, асимптотический в пограничном слое и служит там формальным решением. Поэтому при всяком q набор $U_{pq}^{\pm}$, $p=0,1,2,\ldots$, удовлетворяет в Π рекуррентной системе вида (9). Выражение $U_{pq}^{\pm}$ аналитической структуры (14) определяется по $U_{0q}^{\pm},\ldots,$ $U_{p-1,q}^{\pm}$ с точностью до слагаемого, асимптотически удовлетворяющего уравнению (10).

Теорема 3 (о единственности асимптотического решения). Пусть ряды

$$\left.\begin{aligned} & W^{\pm}\sim\kappa^{\sigma_{\pm}}e^{\pm iN_0|X|}\sum_{p\leq P}W_p^{\pm}(X), \quad \sigma_{\pm}=const, \\ & W_p^{\pm}\sim|X|^{\frac{1-m}{2}+p}\sum_{q\geq 0}\mathcal{F}_{ps}^{\pm}\left(\frac{X}{|X|}\right)\ln^{s}|X|, \\ & \mathcal{F}_{ps}^{\pm}\in C^{\infty}(S_{m-1}), \quad P<+\infty \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

удовлетворяют формально уравнению (10) в пограничном слое Π, а функции $\mathcal{F}_{ps}^{\pm}$ не зависят от κ. Тогда задание функций $\mathcal{F}_{p0}^{\pm}$,

$p=0,1,\ldots$ и констант $\sigma_\pm$ определяет ряды (15) однозначно.

Это утверждение аналогично другим леммам единственности [I]. Доказательство его близко, к выводу формул лучевого метода.

Заданную приходящую волну u^- мы перестраиваем и сшиваем в пограничном слое (пользуясь теоремой 3) с приходящими членами асимптотики фокального решения; этим однозначно определяются константа λ и функции A_{00}, A_{10}, A_{20}, $\ldots$.

Затем уходящая часть асимптотики фокального ряда сшивается с перестроенным искомым разложением u^+. Отсюда находятся константа ρ^+ и, рекуррентным образом, функции ψ_0^+, ψ_1^+, $\ldots$. Оказывается, что

$$\rho^+=\rho^-,$$

$$\lambda=\rho^-+\frac{m-1}{2},$$

$$\psi_0^-(\xi)=e^{i\pi(m-\frac{1}{2})}\psi_0^+(-\xi),\quad |\xi|=1,$$

$$A_{00}=\pi^{\frac{1-m}{2}}e^{i\pi(\frac{m-1}{4}-\frac{\rho^-}{2})}N_0^{-1/2}\psi_0^-.$$

Из формул (II) и теоремы 3 следует, что $\Phi^\pm_{pqst}=0$, при $t>0$, и асимптотика лучевых рядов при $x\to 0$ не содержит логарифмов. В разложении (5), таким образом,

$$c^\pm_{rst}=0,\quad t>0,\quad r,s=0,1,\ldots.$$

4. Замечания.

Пусть $\mathcal{R}^+$ и $\mathcal{R}^-$ - лучи, у которых $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\nabla\tau}{|\nabla\tau|}\Big|_{R^+}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\nabla\tau}{|\nabla\tau|}\Big|_{R^-}$ (т.е. $\mathcal{R}^+$ есть гладкое продолжение $\mathcal{R}^-$). Тогда значение функции ψ_r^+ на $\mathcal{R}^+$ зависит только от значений $\psi_0^-,\psi_1^-,\ldots,\psi_r^-$ и их производных на $\mathcal{R}^-$. Если приходящее поле финитно (по угловой переменной), $\operatorname{supp}\psi_p^-=\Sigma\subset S_{m-1}$, $p=0,1,\ldots$, то финитна и уходящая волна, причем $\operatorname{supp}\psi_q^+=-\Sigma\subset S_{m-1}$, $q=0,1,\ldots$.

В очень малой, $|X|=\kappa|x|=O(1)$, $\kappa\to\infty$, окрестности фокуса более удобны другие представления волнового поля. Например, для $m=2$

$$u\sim(-i\kappa)^{\rho^-+\frac{1}{2}}V_0,$$

$$V_0=e^{\frac{i\pi}{4}}\sum_{-\infty}^{\infty}a_\ell e^{-\frac{i\pi\ell}{2}}J_\ell(\kappa N_0\rho)e^{i\ell\varphi},\quad a_\ell=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_0^-(\varphi')e^{-i\ell\varphi'}d\varphi';$$

$$V_0=a_0+O(\kappa^2\rho^2),\quad \kappa\rho\to 0.$$

Здесь ρ, φ - полярные координаты, $-\pi<\varphi\leq\pi$; $0\leq\rho=|x|<+\infty$ J_p - функции Бесселя.

Волновое поле вблизи фокуса в $O(\kappa^{\frac{m-1}{2}})$ раз интенсивнее, чем "в дальней зоне".

Автор благодарит В.М.Бабича за полезные обсуждения во время выполнения работы.

Литература

I. Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. ЛГУ, 1974, 124 с.

2. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. МГУ, 1965, 549 с.

3. Focke J. Asymptotishe entwicklungen Mittels der Metode der Stationären Phase. Berichte über die Verhandlungen der Sachsichen Academie der Wissenschaften. - Math.-naturwiss.Klasse, 101, 3, 1954.

4. Бабич В.М. Фундаментальные решения гиперболических уравнений с переменными коэффициентами. - Матем.сборник, 52, 2, 1960, с.709-738.

5. Орлов Ю.И. Асимптотический метод для определения поля в произвольной неоднородной среде. - Труды МЭИ, 119, 1972, с.82-91.

6. Бабич В.М. О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде. ЖВММФ, 5, 1965, с.949-951.