Б. А. Крамарев, Топологические $\overline{FC}$-разрешимые группы,

Матем. заметки, 1969, том 5, выпуск 3, 391–400

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 3 (1969), 391—400

УДК 512.4

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ $\overline{FC}$-РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

Б. А. Крамарев

Изучаются связные локально компактные $\overline{FC}$-разрешимые группы. Доказано, что связная локально компактная группа тогда и только тогда будет $\overline{FC}$-разрешимой, когда она является расширением разрешимой группы с помощью связной компактной полупростой группы. Библ. 11 назв.

Определение 1. Топологическая группа G называется *$\overline{FC}$-разрешимой*, если она имеет ряд конечной длины

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{k-1} \supset G_k = \{e\} \qquad (1)$$

(e — единица группы G), в котором подгруппа G_{i+1} является замкнутым нормальным делителем группы G_i и факторгруппа G_i/G_{i+1} есть $\overline{FC}$-группа, ($i = 0, 1, \ldots, k-1$).

Определение 2. Топологическая группа G называется *FC-разрешимой*, если она обладает рядом конечной длины

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{n-1} \supset G_n = \{e\}, \qquad (2)$$

в котором подгруппа G_{j+1} является замкнутым нормальным делителем группы G_j и факторгруппа G_j/G_{j+1} есть FC-группа ($j = 0, 1, \ldots, n-1$).

Очевидно, что каждая FC-разрешимая группа будет и $\overline{FC}$-разрешимой группой. Однако эти два класса групп не совпадают, так как различны уже классы FC-групп и $\overline{FC}$-групп (см. [8], [9]).

Если группа G имеет дискретную топологию, то оба эти определения дают дискретные FC-разрешимые группы, которые изучались в работах [2], [5].

В работе [9] показано, что в топологических группах именно $\overline{FC}$-группы играют ту же роль, что FC-группы в дискретных группах. Поэтому в топологических группах естественно изучать $\overline{FC}$-разрешимые группы, а не FC-разрешимые группы. Эта работа посвящена связным $\overline{FC}$-разрешимым группам. В дальнейшем ряд вида (2) будем называть *$\overline{FC}$-разрешимым рядом.*

В этой заметке используется терминология книги Л. С. Понтрягина. Компактность следует понимать как бикомпактность.

Прежде чем сформулировать основной результат, докажем следующие леммы.

ЛЕММА 1. *В локально компактной связной $\overline{FC}$-группе множество компактных элементов образует связную компактную подгруппу.*

Доказательство. Пусть G — связная локально компактная $\overline{FC}$-группа. Обозначим через P периодическую часть группы G, т. е. совокупность всех компактных элементов группы G. Из теоремы 8 работы [8] заключаем, что P является компактной подгруппой группы G и факторгруппа G/P является векторной группой. Таким образом, нам достаточно доказать лишь связность группы P.

Обозначим через P_0 связную компоненту единицы группы P. Так как P_0 характеристична в P и P — нормальный делитель группы G, то P_0 также будет нормальным делителем группы G. Группа G/P_0 нильпотентна. В самом деле, P/P_0 является вполне несвязным нормальным делителем связной группы G/P_0 и поэтому содержится в центре группы G/P_0. Факторгруппа $(G/P_0)/(P/P_0) \cong G/P$ является векторной группой и, следовательно, G/P_0 — нильпотентная связная группа. Периодическая часть P/P_0 связной нильпотентной группы G/P_0 должна быть связной ([1], теорема 5.1). Но P/P_0 вполне несвязна и, следовательно, P/P_0 есть единица группы G/P_0. Отсюда заключаем, что $P = P_0$.

ЛЕММА 2. *Локально компактная связная $\overline{FC}$-разрешимая группа обладает $\overline{FC}$-разрешимым рядом, все члены которого являются связными группами.*

Доказательство. Докажем сначала лемму для связной $\overline{FC}$-разрешимой группы Ли G. Пусть:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{k-1} \supset G_k = E \tag{3}$$

— $\overline{FC}$-разрешимый ряд группы G; E — единичная подгруппа. Допустим, что подгруппа G_i не является связной, а все предшествующие ей подгруппы связны, $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

Так как, по предположению, группа G_{i-1} связна, то факторгруппа $\widetilde{G}_{i-1} = G_{i-1}/G_i$ является связной $\overline{FC}$-группой. Обозначим через $\widetilde{P}_{i-1}$ периодическую часть группы $\widetilde{G}_{i-1}$. По лемме 1 группа $\widetilde{P}_{i-1}$ является связной компактной группой. Пусть P_{i-1} есть полный прообраз группы $\widetilde{P}_{i-1}$ в группе G_{i-1} при естественном гомоморфизме группы G_{i-1} на группу $\widetilde{G}_{i-1} = G_{i-1}/G_i$. Тогда имеет место топологический изоморфизм

$$G_{i-1}/P_{i-1} \cong \widetilde{G}_{i-1}/\widetilde{P}_{i-1}$$

и группа $\widetilde{G}_{i-1}/\widetilde{P}_{i-1}$ — векторная группа ([8], теорема 8). Докажем, что группа P_{i-1} связна. Обозначим через P_{i-1}^0 связную компоненту единицы группы P_{i-1}. Так как связная компонента единицы P_{i-1}^0 группы P_{i-1} является в ней характеристической подгруппой, а подгруппа P_{i-1} — нормальный делитель группы G_{i-1}, то и группа P_{i-1}^0 будет нормальным делителем группы G_{i-1}. Группа G_{i-1}/P_{i-1}^0 является связной нильпотентной группой. В самом деле, имеет место топологический изоморфизм

$$(G_{i-1}/P_{i-1}^0)\,/\,(P_{i-1}/P_{i-1}^0) \cong G_{i-1}/P_{i-1}, \tag{4}$$

где группа G_{i-1}/P_{i-1} является векторной. Группа G_{i-1}/P_{i-1}^0 связна, а нормальный делитель P_{i-1}/P_{i-1}^0 — вполне несвязный (даже дискретный) и, следовательно, содержится в центре группы G_{i-1}/P_{i-1}^0. Таким образом, группа G_{i-1}/P_{i-1}^0 является нильпотентной класса $\leqslant 2$. Далее, нетрудно видеть, что периодическая часть связной нильпотентной группы G_{i-1}/P_{i-1}^0 содержится в нормальном делителе P_{i-1}/P_{i-1}^0. Но периодическая часть связной нильпотентной группы связна ([1], теорема 5.1). И так как она содержится в дискретном нормальном делителе P_{i-1}/P_{i-0}^0, то она, очевидно, тривиальна. Итак, группа G_{i-1}/P_{i-1}^0 является чистой, т. е. не содержит компактных элементов.

Так как факторгруппа G_{i-1}/P_{i-1}^0по нормальному делителю P_{i-1}/P_{i-1}^0 абелева, то коммутант группы G_{i-1}/P_{i-1}^0 содержится в P_{i-1}/P_{i-1}^0. Но коммутант связной группы связен ([4], лемма 2.1). Поэтому в нашем случае коммутант группы G_{i-1}/P_{i-1}^0 будет равен единице группы G_{i-1}/P_{i-1}^0, т. е.

группа G_{i-1}/P^0_{i-1} является абелевой. Таким образом, мы доказали, что группа G_{i-1}/P^0_{i-1} является чистой связной абелевой группой Ли, т. е. векторной. Нормальный делитель P_{i-1}/P^0_{i-1} является дискретным нормальным делителем векторной группы G_{i-1}/P^0_{i-1}. Кроме того, факторгруппа векторной группы G_{i-1}/P^0_{i-1} по дискретному нормальному делителю P_{i-1}/P^0_{i-1} вновь является векторной (см. изоморфизм (4)), а это возможно лишь в том случае, когда дискретный нормальный делитель P_{i-1}/P^0_{i-1} будет тривиальным. Итак, мы доказали, что $P_{i-1} = P^0_{i-1}$, т. е. группа P_{i-1} является связной.

Далее, обозначим через G^0_i связную компоненту единицы группы G_i. Так как группа G_i является нормальным делителем группы G_{i-1}, а группа G^0_i характеристична в G_i, то группа G^0_i будет нормальным делителем группы G_{i-1}. Имеет место топологический изоморфизм

$$(P_{i-1}/G^0_i)/(G_i/G^0_i) \cong P_{i-1}/G_i = \widetilde{P}_{i-1}.$$

Группа $P_{i-1}/G_i = \widetilde{P}_{i-1}$ является периодической частью связной $\overline{FC}$-группы G_{i-1}/G_i и поэтому компактна. Так как группа P_{i-1} связна, то связной будет и группа P_{i-1}/G^0_i. Нормальный делитель G_i/G^0_i связной группы Ли P_{i-1}/G^0_i дискретен и лежит в центре группы P_{i-1}/G^0_i. Таким образом, группа P_{i-1}/G^0_i является расширением центральной группы G_i/G^0_i с помощью компактной группы P_{i-1}/G_i и поэтому будет $\overline{FC}$-группой (даже FC-группой) ([7], п. 5).

Итак, мы доказали, что в $\overline{FC}$-разрешимом ряде (3) включение $G_{i-1} \supset G_i$ можно заменить цепочкой $G_{i-1} \supset$ $\supset P_{i-1} \supset G^0_i$, все члены которой являются связными группами, причем группа G_{i-1}/P_{i-1} является векторной, а группа P_{i-1}/G^0_i — связной $\overline{FC}$-группой.

Переходим теперь в $\overline{FC}$-разрешимом ряде (3) к включению $G_i \supset G_{i+1}$. Так как связная компонента G^0_i группы Ли G_i открыта в группе G_i, то множество $G^0_i G_{i+1}$ будет открытым (следовательно, и замкнутым) нормальным делителем группы G_i. Обозначим: $H_{i+1} = G^0_i \cap G_{i+1}$ H_{i+1} будет, очевидно, замкнутым нормальным делителем группы G_i^0 и, кроме того, H_{i+1} содержит связную компоненту G_{i+1}^0 группы G_{i+1}. Так как G_i/G_{i+1} есть $\overline{FC}$-группа, а $G_i^0 \cdot G_{i+1}$ — замкнутый нормальный делитель группы G_i, то $G_i^0 G_{i+1}/G_{i+1}$ будет замкнутым нормальным делителем $\overline{FC}$-группы G_i/G_{i+1} и поэтому также является $\overline{FC}$-группой. Группа G_i^0 связна и имеет место топологический изоморфизм ([6], § 20, G)

$$G_i^0 G_{i+1}/G_{i+1} \cong G_i^0/(G_{i+1} \cap G_i^0) = G_i^0/H_{i+1}.$$

Отсюда заключаем, что G_i^0/H_{i+1} есть $\overline{FC}$-группа. Получаем следующую цепочку:

$G_i^0 \supset H_{i+1} \supset G_{i+1}^0$, причем факторгруппа G_i^0/H_{i+1} является $\overline{FC}$-группой, а H_{i+1}/G_{i+1}^0 — абелева, так как из включения $G_{i+1} \supset H_{i+1} \supset G_{i+1}^0$ следует, что H_{i+1}/G_{i+1}^0 — дискретный нормальный делитель связной группы G_i^0/G_{i+1}^0.

Таким образом, мы вновь пришли к той же ситуации, которая была разобрана в предыдущем пункте. Заменяя подгруппу H_{i+1} связной подгруппой P_i, так же как это было сделано выше, и двигаясь дальше вдоль ряда (3), мы через конечное число шагов заменим все члены $\overline{FC}$-разрешимого ряда (3) связными подгруппами, причем все факторы вновь полученного ряда будут связными $\overline{FC}$-группами. Итак, для $\overline{FC}$-разрешимых связных групп Ли лемма доказана.

Пусть теперь G — произвольная локально компактная связная $\overline{FC}$-разрешимая группа. Так как каждая связная локально компактная группа проективно лиева, то существует компактный нормальный делитель B группы G, факторгруппа по которому является группой Ли. Покажем, что факторгруппа связной $\overline{FC}$-разрешимой группы G по компактному нормальному делителю B будет также $\overline{FC}$-разрешимой группой. Если

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{k-1} \supset G_k = \{e\}$$

$\overline{FC}$-разрешимый ряд группы G, то и ряд

$$G = G_0 \supset BG_1 \supset \ldots \supset BG_{k-1} \supset BG_k = B \supset e \qquad (5)$$

также будет $\overline{FC}$-разрешимым, так как непосредственной проверкой установлено, что группа BG_i/BG_{i+1} является $\overline{FC}$-группой.

При естественном гомоморфизме группы G на группу G/B ряд (5) перейдет в ряд

$$G/B = G_0/B \supset BG_1/B \supset \ldots \supset BG_{k-1}/B \supset BG_k/B = B/B,$$

который будет вновь $\overline{FC}$-разрешимым рядом. Так как G/B является связной $\overline{FC}$-разрешимой группой Ли, а для групп Ли лемма уже доказана, то группа $G/B = \widetilde{G}$ обладает $\overline{FC}$-разрешимым рядом, все члены которого являются связными группами. Пусть это будет ряд

$$G/B = \widetilde{G} = \widetilde{G}_0 \supset \widetilde{G}_1 \supset \ldots \supset \widetilde{G}_{k-1} \supset \widetilde{G}_k = \{\widetilde{e}\}.$$

Обозначим через G_i полный прообраз подгруппы $\widetilde{G}_i$ в группе G при естественном гомоморфизме G на $\widetilde{G} = G/B$. Получим в группе G $\overline{FC}$-разрешимый ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{k-1} \supset G_k = B \supset e.$$

Далее, пусть G_i^0 —связная компонента единицы группы G_i, $i = 1, \ldots, k$. Подгруппа BG_i^0 будет замкнутым нормальным делителем в G_i. Так как $G_i/BG_i^0 \cong (G_i/B)/$ $/(BG_i^0/B)$ и группа G_i/B связна, то G_i/BG_i^0 также связна. С другой стороны, $G_i^0 \subset BG_i^0$, и поэтому G_i/BG_i^0 вполне несвязна. Следовательно, $G_i = BG_i^0$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Составим теперь ряд

$$G = G_0 \supset G_1^0 \supset \ldots \supset G_{k-1}^0 \supset G_k^0 \supset e, \tag{6}$$

и покажем, что он будет $\overline{FC}$-рядом. В самом деле, факторгруппа

$$G_i/G_{i+1} = BG_i^0/BG_{i+1}^0 \cong G_i^0/(BG_{i+1}^0 \cap G_i^0)$$

является $\overline{FC}$-группой. Кроме того,

$$G_i^0/(BG_{i+1}^0 \cap G_i^0) \cong (G_i^0/G_{i+1}^0)/(BG_{i+1}^0 \cap G_i^0/G_{i+1}^0).$$

Так как

$$G_{i+1}^0 \subset (BG_{i+1}^0 \cap G_i^0) \subset BG_{i+1}^0$$

и факторгруппа BG_{i+1}^0 / G_{i+1}^0 компактна, то компактной будет и группа $(BG_{i+1}^0 \cap G_i^0) / G_{i+1}^0$. Таким образом, группа G_i^0 / G_{i+1}^0 является расширением компактной группы $(BG^0_{i+1} \cap G^0_i) / G^0_{i+1}$ с помощью $\overline{FC}$-группы $G^0_i / (BG^0_{i+1} \cap G^0_i)$ и будет поэтому $\overline{FC}$-группой ([11], лемма 2). Следовательно, ряд (6) удовлетворяет требованиям леммы.

ТЕОРЕМА. *Связная локально компактная группа G тогда и только тогда будет $\overline{FC}$-разрешимой, когда она является расширением связной разрешимой группы с помощью связной компактной полупростой группы.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что *радикалом* группы G мы будем называть ее максимальный связный разрешимый нормальный делитель и полупростой — группу, у которой радикал тривиален.

Докажем сначала теорему для связных $\overline{FC}$-разрешимых групп Ли. Пусть G — связная $\overline{FC}$-разрешимая групппа Ли и

$$E = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{k-1} \subset G_k = G \tag{7}$$

— ее $\overline{FC}$-разрешимый ряд. На основании леммы 2 можно считать, что все члены этого ряда являются связными группами и факторы G_{i+1}/G_i — связные $\overline{FC}$-группы, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Если длина ряда равна единице, то теорема справедлива ([8], теорема 1). Далее будем вести доказательство индукцией по длине ряда (7). Предположим, что для всех $i < k$ теорема уже доказана. Так как все члены нашего ряда есть связные группы Ли, то для G_{k-1} имеет место разложение: $G_{k-1} = R_{k-1} \cdot P_{k-1}$, где R_{k-1} — радикал группы G_{k-1} и P_{k-1} — полупростая группа Ли. По предположению индукции, подгруппа P_{k-1} является связной компактной полупростой группой Ли. Фактор-группа $G_k/G_{k-1} = G/G_{k-1} = \widetilde{G}$ будет связной $\overline{FC}$-группой Ли. Если $\widetilde{N}$ — радикал группы $\widetilde{G}$, то $\widetilde{G}/\widetilde{N}$ — компактная полупростая группа Ли ([8], теорема 1). Обозначим через N полный прообраз группы $\widetilde{N}$ в группе G при естественном гомоморфизме группы G на $\widetilde{G} = G/G_{k-1}$. Пусть R — радикал группы G. Подгруппа $R \cdot G_{k-1}$ будет замкнутым нормальным делителем группы G, так как $RG_{k-1} = R \cdot R_{k-1} \cdot P_{k-1} = R \cdot P_{k-1}$, т. е. представляет собой произведение замкнутой подгруппы R и компактной P_{k-1}, откуда следует его замкнутость (R_{k-1} содержится в R, так как R_{k-1} характеристична в G_{k-1} и поэтому является нормальным делителем в G). Кроме того, подгруппа

$R \cdot G_{k-1}$ содержится в N, так как из изоморфизма

$$RG_{k-1}/G_{k-1} \cong R/(R \cap G_{k-1}) \qquad ([6], \S\ 20,\ G)$$

следует, что RG_{k-1}/G_{k-1} — связный разрешимый нормальный делитель группы G/G_{k-1}; но группа $N/G_{k-1} = \widetilde{N}$ — радикал группы G/G_{k-1} и поэтому $RG_{k-1}/G_{k-1} \subset N/G_{k-1}$, откуда $RG_{k-1} \subset N$. Так как

$$(G/R)\ /\ (N/R) \cong G/N \cong \widetilde{G}/\widetilde{N} \text{ и } \widetilde{G}/\widetilde{N}$$

компактна, то нам достаточно доказать компактность группы N/R. Имеет место изоморфизм

$$(N/R)/(RG_{k-1}/R) \cong N/RG_{k-1}.$$

Нормальный делитель RG_{k-1}/R компактен, так как

$$RG_{k-1}/R \cong G_{k-1}/(R \cap G_{k-1}) = (G_{k-1}/R_{k-1})/(R \cap G_{k-1}/R_{k-1}),$$

где G_{k-1}/R_{k-1} — компактна по предположению индукции. Далее, из того, что N — нормальный делитель группы G и из характеристичности радикала в группе N следует, что R будет радикалом группы N. Так как радикал группы N/R тривиален, а нормальный делитель RG_{k-1}/R компактен, то группа Ли N/RG_{k-1} полупроста ([3], предложение 9, стр. 73). С другой стороны,

$$(N\ /\ G_{k-1})\ /\ (RG_{k-1}\ /\ G_{k-1}) \cong N\ /\ RG_{k-1}$$

и группа N/RG_{k-1} является $\overline{FC}$-группой, как фактор-группа $\overline{FC}$-группы N/G_{k-1}. Таким образом, мы получили, что группа N/RG_{k-1} является связной полупростой $\overline{FC}$-группой Ли и, следовательно, компактна ([8], теорема 1) (Связность N/RG_{k-1} следует из того, что группа N связна, ибо $N/G_{k-1} = \widetilde{N}$ связна и G_{k-1} также связна.) Тогда группа N/R также будет компактной группой, так как она является расширением компактной группы RG_{k-1}/R с помощью компактной группы $N/R \cdot G_{k-1}$. Этим завершается доказательство теоремы для связных $\overline{FC}$-разрешимых групп Ли.

Пусть теперь G — произвольная связная локально компактная $\overline{FC}$-разрешимая группа. Обозначим через R радикал группы G. Так как группа G проективно лиева, то существует компактный нормальный делитель B такой, что $G/B = \widetilde{G}$ есть группа Ли. RB будет замкнутым нормальным делителем группы G. Так как

$$G/RB \cong (G/R)/(BR/R)$$

и радикал группы G/R тривиален, а нормальный делитель BR/R компактен, то группа Ли G/RB — полупростая ([3], предложение 9, стр. 73). Далее, из изоморфизма $RB/B \cong R/(R \cap B)$ заключаем, что RB/B является связным разрешимым нормальным делителем группы G/B. Из того, что

$$(G/B)/(RB/B) \cong G/RB,$$

и так как группа G/RB полупроста, следует, что RB/B будет радикалом группы G/B. Для $\overline{FC}$-разрешимой группы Ли G/B теорема уже доказана и поэтому группа G/RB является компактной. Итак, мы получили, что группа G/R является расширением компактной группы BR/R с помощью компактной группы G/RB, откуда следует компактность группы G/R.

Обратное утверждение теоремы очевидно.

С л е д с т в и е 1. *Связная локально компактная $\overline{FC}$-разрешимая группа, радикал которой тривиален, компактна.*

Впрочем, имеет место более общее

С л е д с т в и е 2. *Локально компактная компактно порождаемая периодическая $\overline{FC}$-разрешимая группа компактна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть группа G удовлетворяет указанным условиям и

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{n-1} \supset G_n \supset \{e\}$$

— ее $\overline{FC}$-разрешимый ряд. Так как группа G_0/G_1 периодическая и компактно порождаемая $\overline{FC}$-группа, то она компактна ([9], теорема 1). Тогда компактно порождаемой будет и группа G_1 (см. [10]). Двигаясь по $\overline{FC}$-разрешимому ряду группы G, мы докажем компактную порождаемость всех его членов, в том числе и группы G_n. Но группа G_n является периодической $\overline{FC}$-группой и, следовательно, компактна. Компактной будет и группа G_{n-1}/G_n, а поэтому и группа G_{n-1}. Через конечное число шагов мы дойдем до группы G, доказав ее компактность.

В заключение автор пользуется случаем поблагодарить своего научного руководителя В. И. Ушакова.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
8.VII.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Глушков В. М., Локально нильпотентные локально бикомпактные группы, Труды Моск. матем. об-ва, 4 (1955), 291—332.

[2] Duguid A. M., McLain D. H., *FC*-nilpotent and *FC*-solvable groups, Proc. Cambridge philos. Soc., 52, № 3 (1956), 391—398.

[3] Hofmann K. H., Mostert P., Splitting in topological groups, Memoirs Amer. Math. Soc., 43 (1963).

[4] Iwasawa K., On some types of topological groups, Ann. of Math., 50, № 3 (1949), 507—558.

[5] Nishigôri N., On *FC*-solvable groups, J. sci. Hiroshima Univ., S. A., 25, № 2 (1961), 367—368.

[6] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М., 1954.

[7] Ушаков В. И., Классы сопряженных элементов в топологических группах, Украинский матем. журн., 14, № 4 (1962), 366—371.

[8] Ушаков В. И., Топологические $\overline{FC}$-группы, Сибирский матем. ж., 4, № 5 (1963), 1162—1174.

[9] Ушаков В. И., Топологические группы, близкие к бикомпактным, Сибирский матем. ж., 4, № 3 (1963), 689—694.

[10] MacBeath A. M., Swirczkowski S., On the set of generators of a subgroup, Indagationes math., 21, № 3 (1959), 280—281.

[11] Ушаков В. И., Топологические группы с бикомпактными классами сопряженных подгрупп, Матем. сб., 63, № 2 (1964), 277—283.

Математические заметки, том 5, выпуск 3 (1969)

Редактор *В. И. Битюцков, Ю. А. Горьков.*

Техн. редактор *В. С. Никифорова.* Корректор *Н. Д. Дорохова*

Сдано в набор 3/I 1969 г. Подписано к печати 17/III 1969 г. Бумага 84×108 1/32

Физ. печ. л. 4 Условн. печ. л. 6,72. Уч.-изд. л. 6,17

Тираж 1260 экз. Т-04820 Цена 60 коп. Заказ № 1560

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10