Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. И. Перельман, Адаптивный подход к взвешиванию информации при оценке ненаблюдаемых дрейфующих параметров,
Автомат. и телемех., 1977, выпуск 4, 88–100

https://www.mathnet.ru/at7330

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
6 декабря 2025 г., 19:23:23

УДК 681.3

АДАПТИВНЫЙ ПОДХОД К ВЗВЕШИВАНИЮ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ОЦЕНКЕ НЕНАБЛЮДАЕМЫХ ДРЕЙФУЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

И. И. ПЕРЕЛЬМАН

(Москва)

Рассматривается задача текущей оценки параметров уравнения объекта по наблюдениям его входных и выходных сигналов. С целью повышения точности оценок предлагается и исследуется адаптивный алгоритм, изменяющий свои свойства в зависимости от скорости дрейфа оцениваемых параметров и от мощности погрешностей измерения выходного сигнала.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оценки текущего значения J-мерного вектора параметров $\theta_n=(\theta_{n,1};\ \theta_{n,2};\ldots;\ \theta_{n,J})^{\mathrm{т}}$ объекта с дискретным временем, описываемого уравнением регрессии

$$v_n=y_n+\varphi_n,\ y_n=\boldsymbol{\theta}_n^{\mathrm{т}}\mathbf{x}_n,\ n=1,2,\ldots, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_n=(x_{n,1};\ x_{n,2};\ldots;\ x_{n,j})^{\mathrm{т}}$ — вектор наблюдаемых входов в момент времени n, v_n — наблюдаемый выходной сигнал, φ_n — случайная помеха, «т» — знак транспонирования. Исходными данными для оценивания вектора $\boldsymbol{\theta}_n$ служат априори известная структура модели (1) и совокупность наблюдений сигналов x_j и v_j при $j=1,2,\ldots,n$. Предполагается, что $\{\mathbf{x}_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ — случайные последовательности, статистически независимые друг от друга и от $\{\theta_n\}$, причем без ущерба для общности дальнейшего рассмотрения можно считать, что помеха φ_n центрирована. Далее там, где это не вызывает недоразумений, индекс n у переменных x_n, θ_n и т. д. опускается.

Способы и точность решения задачи оценивания θ_n зависят прежде всего от статистических свойств входящих в (1) сигналов и от имеющейся априорной информации об этих свойствах. Так, в ряде работ (например, [1, 2]) указанная задача решалась для случая, когда θ_n изменяется во времени по известному (с точностью до конечного числа постоянных параметров) закону. В [3] рассматривался случай, когда закон изменения θ представляет собой решение данного дифференциального уравнения с неизвестными начальными условиями. Наконец, если $\{\theta_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ — случайные последовательности с заданными корреляционными функциями и, тем более, с заданными законами распределениями, то в этих условиях может быть решена задача оптимального оценивания текущего θ (см., например, [4, 5]).

Однако в большинстве реальных задач управления необходимой информации о статистических характеристиках $\boldsymbol{\theta}$ и φ не имеется. Это обусловливается тем, что, во-первых, указанные переменные в нормальных условиях ненаблюдаемы и их свойства могут определяться только лишь косвенным путем на основании соответствующих оценок; во-вторых, требования быстрейшего внедрения автоматики ограничивают сроки предварительного обследования объекта с целью определения необходимых статистических характеристик.

Отсутствие необходимой априорной информации обусловливает целесообразность создания и использования полуэвристических алгоритмов оценивания текущих значений параметров объекта, основанных на общих «физических» представлениях об объекте и характере изменений переменных θ и φ, при этом вместо требований оптимальности, которые в данных условиях теряют всякий смысл, указанные алгоритмы должны удовлетворять требованию сохранения своей работоспособности в широком диапазоне изменений соответствующих характеристик.

К числу таких априорных физических представлений следует, прежде всего, отнести гипотезу о квазирегулярности объекта. Это справедливое для весьма широкого круга реальных задач предположение означает, что все характеристики объекта изменяются достаточно медленно (т. е. «дрейфуют во времени»). Применительно к (1) условие квазирегулярности сводится к следующему: априори известна некоторая постоянная величина $N_р$, которая достаточно велика по сравнению с временем затухания автокорреляционных функций сигналов $\mathbf{x}$ и φ. В то же время в пределах скользящего отрезка $[n-N_р, n]$, $n=1, 2, \ldots$ объект (1) можно с приемлемой точностью аппроксимировать стационарной моделью

$$v_j \cong \theta_n \mathbf{x}_j + \varphi_j(n), \quad \forall j \in [n-N_р, n], \tag{2}$$

где $\varphi_j(n)$ — выборка из стационарной центрированной случайной последовательности $\{\varphi_j(n), j=1, 2\ldots\}$ с дисперсией

$$M(\varphi_j^2(n)) = D_\varphi(n) = M(\varphi_n^2). \tag{3}$$

Эти условия позволяют применять для оценивания параметров объекта процедуру текущего регрессионного анализа [1], согласно которой $\widetilde{\theta}_n$-оценка θ_n определяется из условия

$$\widetilde{\theta}_n = \arg\min_{\theta} \sum_{j=1}^{n} (v_j - \theta^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_j)^2 g(n-j), \tag{4}$$

где $g(i)$ — неотрицательная, невозрастающая весовая функция, учитывающая старение информации из-за дрейфа параметров объекта. Наибольшее распространение получили два следующих варианта этой функции:

а) «скользящее окно» заданной длительности N

$$g(i) = \begin{cases} 0, & i \geqslant N, \\ 1, & i < N, \end{cases} \tag{5}$$

б) экспоненциальное взвешивание с заданной скоростью α

$$g(i) = \alpha^i \quad (0 < \alpha < 1). \tag{6}$$

Выбор параметров N и α в (5) и (6) определяется априорной информацией о величине $N_р$ отрезка стационарности модели (2), причем погрешность оценки (4)

$$\delta\theta_n = \widetilde{\theta}_n - \theta_n \tag{7}$$

зависит от правильности такого выбора. При чрезмерном увеличении N (или α) точность оценки (4) падает из-за влияния дрейфа характеристик объекта. Наоборот, при малом N (или α) оценка ухудшается из-за влияния помехи φ. Между тем обычно в реальных условиях величину $N_р$ можно задать только лишь очень приближенно, как из-за отсутствия достаточной априорной информации, так и по той причине, что эту постоянную приходится задавать с большим «запасом», чтобы перекрыть весь диапазон возможных условий дрейфа характеристик объекта.

В связи с этим возникает задача адаптации функции $g(i)$ (и, в частности, адаптации параметров N и α в (5) и (6)) к текущему характеру дрейфа параметров объекта (1), т. е. задача повышения точности оценки $\widetilde{\theta}_n$

путем замены (4) алгоритмом

$$\tilde{\theta}_n = \arg\min_{\theta} \sum_{j=1}^{n} (v_j - \theta^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_j)^2 g(n, n-j), \tag{8}$$

где

$$g(n, i) = g(i, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, v_1, v_2, \ldots v_{n-1}). \tag{9}$$

Очевидно, что для построения адаптивной процедуры (8), (9) необходимы некоторые дополнительные априорные гипотезы о характере дрейфа объекта (1), причем по причинам, о которых уже говорилось выше, в основу таких гипотез должны быть положены простейшие «физические» соображения. Цель настоящей работы — построение адаптивного алгоритма типа (8), (9) на базе гипотезы о направленном характере дрейфа вектора параметров θ_n. Будем говорить, что квазирегулярный объект (1), (2) характеризуется направленным дрейфом параметров, если для него можно подобрать такую (в общем случае априори неизвестную) разбивку оси времени на последовательность примыкающих друг к другу целочисленных отрезков

$$\ldots, [n_{i-1}+1; n_i], [n_i+1; n_{i+1}], [n_{i+1}+1; n_{i+2}], \ldots, \tag{10}$$

которая удовлетворяет следующим двум требованиям:

а) все или большая часть отрезков (10) велики по сравнению с упоминавшейся выше величиной N_{p} (т. е. $n_{i-1} - n_i \gg N_{\mathrm{p}}$),

б) в пределах каждого из этих отрезков изменения θ происходят по траектории, близкой к прямолинейной, т. е. при всех n_i выполняется условие

$$\sum_{j=n_i+2}^{n_{i+1}} |\theta_j - \theta_{j-1}| / |\theta_{n_{i+1}} - \theta_{n_i+1}| \approx 1.$$

В промышленных объектах причинами появления направленного дрейфа являются либо большие, но редкие скачкообразные изменения θ (например, из-за изменения источника сырья, переключения агрегатов и т. п.), либо медленно возрастающие возмущения (например, из-за износа оборудования, отравления катализаторов, изменения окружающей температуры и т. п.)

С целью конкретизации изложения далее будем рассматривать только задачу адаптации «ширины окна» N. Однако предлагаемый ниже подход можно без труда перенести и на случай регулирования параметра α.

2. Регулирование «окна» с помощью отрицательной обратной связи

Как известно, получаемая на основании (4), (5) текущая оценка параметров

$$\tilde{\theta}_n = \mathbf{P}_n \mathbf{X}_n \mathbf{v}_n, \tag{11}$$

где $\mathbf{P}_n = (\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^{\mathrm{T}})^{-1}$; $\mathbf{X}_n = [\mathbf{x}_n | \mathbf{x}_{n-1} | \ldots | \mathbf{x}_{n-N+1}]$;

$$\mathbf{x}_n = (x_{n,1}; x_{n,2}; \ldots; x_{n,J})^{\mathrm{T}}; \ \mathbf{v}_n = (v_n; v_{n-1}; \ldots; v_{n-N+1})^{\mathrm{T}}.$$

Погрешность (7) этой оценки

$$\delta\theta_n = \mathbf{P}_n \mathbf{X}_n (\varphi_n + \psi_n), \tag{12}$$

где $\varphi_n = (\varphi_n; \varphi_{n-1}; \ldots; \varphi_{n-N+1})^{\mathrm{T}}$, $\psi_n = (\psi_n; \psi_{n-1}; \ldots; \psi_{n-N+1})^{\mathrm{T}}$, $\psi_{n-s} = (\theta_{n-s} - \theta_n)^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_{n-s}$.

Рассмотрим статистические свойства погрешности (12) в зависимости от величины параметра N. Ввиду статистической независимости $\mathbf{x}$, φ и θ друг от друга имеем

$$M_{\varphi}(\delta\theta_n^2) \equiv \eta(n, N) = \eta^{(\varphi)}(n, N) + \eta^{(\theta)}(n, N). \tag{13}$$

Здесь $M_\varphi(i)$ — символ условного математического ожидания по ансамблю сигналов φ, $\eta^{(\varphi)}$ и $\eta^{(\theta)}$ — неотрицательные функции случайных аргументов x и θ, отражающие соответственно влияние помехи φ и влияние дрейфа вектора θ. Слагаемое $\eta^{(\varphi)}$ не зависит от θ, пропорционально средней мощности помехи и стремится к нулю при $N\to\infty$. В частности, если φ удовлетворяет условиям стационарности (3), то, как известно [6],

$$\eta^{(\varphi)}=\frac{D_\varphi(n)}{N}c(n,N),$$

где $c(n, N)\to\text{const}$ при $N\to\infty$. Слагаемое $\eta^{(\theta)}$ не зависит от φ и находится в прямой зависимости от модуля вектора $(\theta_n-\theta_{n-N})$ и, следовательно (ввиду направленного характера дрейфа), в прямой зависимости от N.

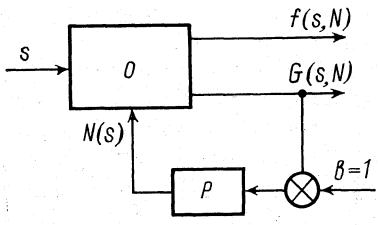

Рис. 1

Заметим теперь следующее обстоятельство. Пусть на полуоси $N\in[0, \infty]$ и множестве параметров s задано семейство

$$f(s, N)=f_1(s, N)+f_2(s, N), \tag{14}$$

где f_1 и f_2 — положительно определенные функции, причем при любом фиксированном s $f_1(s, N)$ — невозрастающая, а $f_2(s, N)$ — неубывающая функции от N, для которых справедливы условия

$$f_1(s, 0)/f_2(s, 0)\geqslant A>1;$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{f_1(s,N)}{f_2(s,N)}\leqslant B<1.$$

Тогда, как нетрудно видеть, справедливы следующие утверждения.

Все функции семейства

$$G(s, N)\equiv f_1(s, N)\ /\ f_2(s, N)$$

являются невозрастающими на полуоси $[0, \infty]$.

Для любого b, удовлетворяющего условиям

$$A\geqslant b\geqslant 1\geqslant 1/b\geqslant B,$$

справедливо неравенство

$$f_{\text{мин}}(s)\geqslant\frac{1}{1+b}f(s,N),\qquad \forall N\in[N^*(s,b),N^*(s,1/b)],$$

где $f_{\text{мин}}(s)=\inf\limits_{N\in[0,\infty)} f(S, N)$, $N^*(s, b)$ и $N^*(s, 1/b)$ — корни уравнений $G(s, N)=b$ и $G(s, N)=1/b$ соответственно. Другими словами, взяв любое N из диапазона $[N^*(s, b), N^*(s, 1/b)]$, получим величину $f(s, N)$, не более чем в $(1+b)$ раз превосходящую минимум (14) при данном s.

Отсюда следует, что система с обратной связью (рис. 1), осуществляющая стабилизацию $G(s, N)$ в окрестности точки $G=b=1$, позволяет при всех s поддерживать (14) на уровне, не более чем в два раза превышающем минимально возможный, не используя при этом непосредственных измерений функции $f(s, N)$. Приняв во внимание, что характер зависимости (13) от N аналогичен (14), можно обоснованно высказать следующее предположение. Если имеется доступная экспериментальному наблюдению в момент времени n характеристика $\tilde{G}(n, N)$, зависимости которой от N, дрейфа параметров и мощности помехи достаточно точно воспроизводят аналогичные зависимости ненаблюдаемой характеристики

$$G(n, N)=\eta^{(\varphi)}(n, N)/\eta^{(\theta)}(n, N), \tag{15}$$

то погрешность оценки параметров (11) можно в существенной мере подавить, осуществив стабилизацию сигнала $\widetilde{G}(n, N)$ по схеме, аналогичной рис. 1.

3. Построение $\widetilde{G}(n, N)$ с помощью характеристики извилистости траектории оценок

С изменением времени n конец вектора (11) движется в пространстве параметров по некоторой траектории. Задав целочисленную постоянную k ($k>1$), введем функцию

$$\Gamma(n, N)=\sum_{i=0}^{k-1}|\tilde{\theta}_{n-i}-\tilde{\theta}_{n-i-1}|^2/|\tilde{\theta}_n-\tilde{\theta}_{n-k}|^2, \tag{16}$$

характеризующую извилистость годографа вектора (11) на скользящем отрезке времени $[n-k, n]$. Очевидно, что минимум (16) достигается тогда, когда траектория оценок (11) прямолинейна, и что (16) растет по мере увеличения извилистости этой траектории.

Подставив (11) в (16), получим зависимость $\Gamma(n, N)$ от дрейфа параметров и от помехи φ:

$$\Gamma(n, N)=\frac{\sum_{i=0}^{k-1}[\psi_{n-i}(1)+\delta\psi_{n-i}(1)]^{\mathrm{T}}[\psi_{n-i}(1)+\delta\psi_{n-i}(1)]}{[\psi_n(k)+\delta\psi_n(k)]^{\mathrm{T}}[\psi_n(k)+\delta\psi_n(k)]}, \tag{17}$$

где

$$\psi_n(m)=\mathbf{P}_n\mathbf{X}_n\chi_n-\mathbf{P}_{n-m}\mathbf{X}_{n-m}\chi_{n-m},$$
$$\delta\psi_n(m)=\mathbf{P}_n\mathbf{X}_n\varphi_n-\mathbf{P}_{n-m}\mathbf{X}_{n-m}\varphi_{n-m},$$
$$\chi_n=(\chi_n;\ \chi_{n-1};\ \ldots;\ \chi_{n-N+1})^{\mathrm{T}};\ \chi_{n-i}=\theta_{n-i}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_{n-i}.$$

Обозначим

$$\Gamma^0(n, N)=\frac{\sum_{i=0}^{k-1}\psi_{n-i}^{\mathrm{T}}(1)\psi_{n-i}(1)}{\psi_n{}^{\mathrm{T}}(k)\psi_n(k)},\quad \overline{\Gamma}(n, N)=\frac{\sum_{i=0}^{k-1}\delta\psi_{n-i}^{\mathrm{T}}(1)\delta\psi_{n-i}(1)}{\delta\psi_n{}^{\mathrm{T}}(k)\delta\psi_n(k)}. \tag{18}$$

Из рассмотрения (17) и входящих в правую часть (13) слагаемых следует, что при изменении отношения $\eta^{(\varphi)}/\eta^{(\theta)}$ от 0 до ∞ вид функции $\Gamma(n, N)$ изменяется от Γ^0 до Γ:

$$\Gamma(n, N)=\begin{cases}\Gamma^0(n, N) \text{ при } \theta_j\neq\theta_n,\ \varphi_j\equiv 0;\ j=\overline{(n-N-k), n},\\ \Gamma(n, N) \text{ при } \theta_j\equiv\theta_n,\ \varphi_j\neq 0;\ j=\overline{(n-N-k), n}.\end{cases} \tag{19}$$

Таким образом, чтобы определить диапазон изменений извилистости (16) в зависимости от варьирования отношения $\eta^{(\varphi)}/\eta^{(\theta)}$, необходимо исследовать функции (18). Рассмотрим (18) при следующих дополнительных ограничениях на характер случайных сигналов θ, $\mathbf{x}$ и φ:

1. Дрейф параметров объекта обладает направленным поступательным характером, т. е.

$$\Delta\theta_j\equiv\theta_j-\theta_{j-1}=\mathbf{r}_n\gamma_j;\ j=\overline{(n-N-k), n}.$$

Здесь r_n — случайный единичный вектор, $\{\gamma_j\}$ — последовательность скалярных случайных величин, ограниченных неравенствами

$$0<\underline{\gamma}<\gamma_j<\overline{\gamma},$$

$\underline{\gamma}$ и γ — некоторые постоянные.

2. Помеха φ представляет собой последовательность независимых, центрированных случайных величин, обладающих одинаковой дисперсией D,

и симметрично распределенных относительно нуля, т. е.

$$p(\varphi_j\varphi_i)\equiv p(\varphi_j)\,p(\varphi_i),\ p(\varphi_j=\varphi)\equiv p(\varphi_j=-\varphi),$$

$$M(\varphi_j^2)=M(\varphi_n^2)=D_\varphi,\ j=(\overline{n-N-k},\ n).$$

3. Случайная векторная последовательность входных сигналов $\{\mathbf{x}_j\}$ является стационарной и эргодической по отношению к своим первым двум моментам; при этом будем пользоваться обозначениями

(20) $$\mathbf{Z}_j\equiv x_j x_j^{\mathrm{T}},\ \mathbf{R}\equiv M(\mathbf{Z}_j),\ \mathbf{U}=M(\mathbf{Z}_j^2).$$

Можно показать (доказательство опускается), что в этих условиях для (18) справедливы следующие предельные (при n, $N\to\infty$, $n-N>0$) вероятностные отношения

(21) $$\bar{\Gamma}(n,N)\xrightarrow{p}S_n'S_n'',$$

где S_n' и S_n'' — неотрицательные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$p[S_n'\geqslant{}^1/_2]\geqslant{}^1/_2,\qquad S_n''\xrightarrow{p}1\qquad\text{при}\qquad k\to\infty,$$

(22) $$\Gamma^0(n,N)\xrightarrow{p}\frac{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}_n\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}}{\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{W}_n\mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}},$$

где

$$\mathbf{Q}_n=\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{H}_{i,n}^2,\qquad \mathbf{W}_n=\left(\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{H}_{i,n}\right)^2,$$

(23) $$\mathbf{H}_{i,\,n}=\mathbf{Z}_{n-N+1}+\mu_n(\mathbf{Z}_{n-N-i}-\mathbf{Z}_{n-i}),$$

μ_n — скалярная случайная переменная

(24) $$0<\mu_n<1.$$

Учитывая тот факт, что входящие в (22) случайные переменные r и μ ненаблюдаемы, попытаемся оценить правую часть (22) с помощью только лишь результатов измерений входного сигнала x и статистических характеристик этого сигнала (20) (если последние известны). Первоначально оценим (22) без привлечения характеристик (20). Введем переменную $\rho=R^{-1}r$. Поскольку Q_n и W_n — положительно-определенные матрицы, то, как известно [7],

(25) $$\min_{\rho}\frac{\rho^{\mathrm{T}}Q_n\rho}{\rho^{\mathrm{T}}W_n\rho}=\bar{\lambda}_n,\qquad \max_{\rho\neq0}\frac{\rho^{\mathrm{T}}Q_n\rho}{\rho^{\mathrm{T}}W_n\rho}=\bar{\bar{\lambda}}_n,$$

где $\bar{\lambda}$ и $\bar{\bar{\lambda}}$ — наименьший и наибольший корни характеристического уравнения

(26) $$|\mathbf{Q}_n-\lambda\mathbf{W}_n|=0.$$

Как видно из (23), коэффициенты уравнения (26) зависят от доступных экспериментальному измерению переменных $\mathbf{Z}$ и от ненаблюдаемых переменных μ. Чтобы избавиться от последней зависимости, введем следующую «точечную» оценку для правой части (22):

(27) $$\Gamma^0(n,N)={}^1/_2[\bar{\lambda}_n(0{,}5)+\bar{\bar{\lambda}}_n(0{,}5)],$$

где $\bar{\lambda}_n(0{,}5)$ и $\bar{\bar{\lambda}}_n(0{,}5)$ — наименьший и наибольший корни уравнения (26) при подстановке в него

$$(28)\qquad \mathbf{Q}_n=\sum_{i=0}^{k-1}(3\mathbf{Z}_{n-N-i}-\mathbf{Z}_{n-i})^2,\qquad \mathbf{W}_n=\left[\sum_{i=0}^{k-1}(3\mathbf{Z}_{n-N-i}-\mathbf{Z}_{n-i})\right]^2.$$

Матрицы (28) получаются из (23) при задании $\mu=0{,}5$, что соответствует середине диапазона (24) возможных значений μ.

Введем, кроме того, величины

$$(29)\qquad \lambda_n^{(\text{мин})}=\min_{0\leqslant\mu\leqslant1}\bar{\lambda}_n(\mu),\qquad \lambda_n^{(\text{макс})}=\max_{0\leqslant\mu\leqslant1}\bar{\bar{\lambda}}_n(\mu).$$

Тогда на основании (22), (25), (29) получим не зависящую от неизвестных характеристик дрейфа «интервальную» оценку для $\Gamma^0(n, N)$:

$$(30)\qquad p\{\lambda_n^{(\text{мин})}\leqslant\Gamma^0(n,N)\leqslant\lambda_n^{(\text{макс})}\}\to1 \text{ при } N\to\infty.$$

Можно показать, что величины (29) обладают тем свойством, что при одновременном выполнении условий $1/k\to0$ и $k/N\to0$ наряду с (30) справедлива также формула

$$p\{1+\hat{\lambda}\leqslant k\Gamma^0(n, N)\leqslant1+5\hat{\hat{\lambda}}\}\to1,$$

где $\hat{\lambda}$ и $\hat{\hat{\lambda}}$ — наименьший и наибольший корни характеристического уравнения

$$(31)\qquad |\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{U}-\mathbf{R}^2)\mathbf{R}^{-1}-\lambda\mathbf{I}|=0,$$

$\mathbf{R}$ и $\mathbf{U}$ соответствует (17), $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Таким образом, если матрицы (20) известны, а параметры k и N взяты достаточно большими, так что

$$(32)\qquad 1/k\ll1\ll N/k,$$

то величины (29) можно определить как

$$(33)\qquad \lambda_n^{(\text{мин})}\approx\frac{1}{k}(1+\hat{\lambda}),\qquad \lambda_n^{(\text{макс})}\approx\frac{1}{k}(1+5\hat{\lambda}).$$

Возвратимся теперь к задаче построения алгоритма адаптации ширины окна по схеме регулирования, приведенной на рис. 1.

На основании априорных соображений пределы регулирования параметра N могут быть ограничены некоторым диапазоном

$$(34)\qquad N_{\text{мин}}\leqslant N\leqslant N_{\text{макс}},$$

нижняя граница которого $N_{\text{мин}}$ достаточно велика по сравнению со временем затухания статистических связей в стохастических последовательностях $\{x_j\}$ и $\{\varphi_j\}$. Ненаблюдаемую характеристику (15) заменим функцией

$$(35)\qquad \tilde{G}(n, N)=\Gamma(n, N)/\tilde{\Gamma}^0(n, N),$$

где Γ и Γ^0 соответствуют (16) и (27). Из приведенного выше рассмотрения этих выражений следует, что Γ и $\tilde{\Gamma}^0$ являются случайными переменными, причем статистические свойства $\tilde{\Gamma}^0$ не зависят от N, φ и θ и при достаточно большой величине параметра k изменения $\tilde{\Gamma}^0$ происходят в узких пределах, определяемых величинами (33). Напротив, свойства $\Gamma(n, N)$ зависят от N, мощности помехи φ и от скорости дрейфа параметров. Так, для объекта с поступательным дрейфом (18) и некоррелированной помехой рост функции $G(n, N)$ от 0 до ∞ сопровождается изменением $\Gamma(n, N)$ от $\Gamma^0(n, N)\approx\tilde{\Gamma}^0(n, N)$ до $\bar{\Gamma}(n, N)$. Указанное обстоятельство с учетом (21), (30) и (34) позволяет прийти к выводу, что путем выбора достаточно большого k (т. е. при условии (32)), можно сконструировать такую функцию (35), которая с вероятностью, близкой к единице, изменяется в прямой зависимости от $G(n, N)$ (15), при этом диапазон изме-

нений функции (35) будет от ≈ 1 до величины, пропорциональной k. Следовательно, по мере увеличения k указанный диапазон может быть сделан сколь угодно большим.

Перечисленные свойства функции (35) позволяют построить на ее базе адаптивную систему (рис. 2), представляющую собой сочетание алгоритма регулирования, приведенного на рис. 1, с процедурой текущего МНК (4), (5). Алгоритм рис. 2 отличается от (4), (5) тем, что постоян-

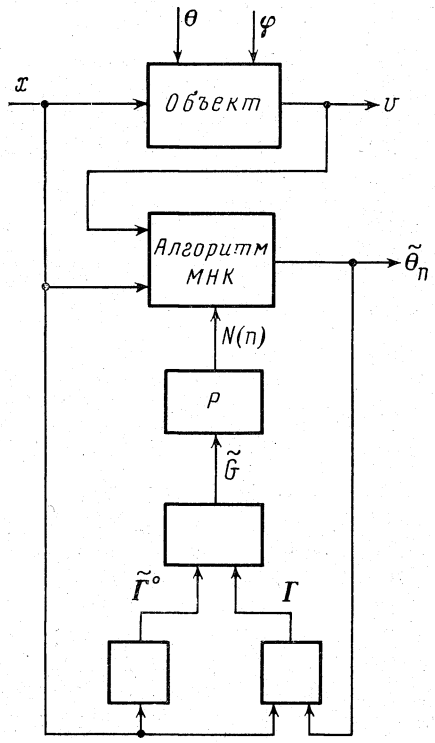

Рис. 2

ный параметр N заменяется варьируемой в пределах (34) переменной величиной $N(n)$. Последняя получается в результате преобразования сигнала (35) с помощью регулятора P, причем, чтобы обеспечить реагирование системы только лишь на закономерную, т. е. зависящую от (15), часть сигнала (35) и подавить случайные вариации этого сигнала, регулятор P целесообразно сконструировать астатическим. Ниже приводится один из возможных вариантов такого построения.

При заданном значении параметра k переменная $N(n)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию от n

$$N(n)=Nq \text{ при } n=\overline{N_0+qk,\ N_0+(q+1)k-1}, \tag{36}$$

где $q=1, 2, \ldots$; N_q — переменная, изменяющаяся в моменты времени $n=kq$ по следующему рекуррентному закону:

$$N_q=N_{q-1}+\Delta N\Phi_q\xi_q, \tag{37}$$

ΔN — целочисленный параметр, Φ_q — функция от $\tilde{G}(N_{q-1},\ kq)$ и N_{q-1}, причем

$$\Phi_q=\begin{cases} 1, \text{ если } \tilde{G}(N_{q-1}, kq)\geqslant c_1 \text{ и } N_{q-1}<N_{\text{макс}}-\Delta N, \\ -1, \text{ если } \tilde{G}(N_{q-1}, kq)\leqslant c_2 \text{ и } N_{q-1}>N_{\text{мин}}+\Delta N, \\ 0 \text{ во всех остальных случаях,} \end{cases} \tag{38}$$

c_1 и c_2 — заданные постоянные ($c_1 > c_2 > 1$),

$$\xi_q = \begin{cases} 1 \text{ при } \bar{\bar{\lambda}}_{qk}(0{,}5) < c_3, \\ 0 \text{ при } \bar{\bar{\lambda}}_{qk}(0{,}5) \geqslant c_3, \end{cases} \tag{39}$$

$\bar{\bar{\lambda}}_n(0{,}5)$ соответствует (27), c_3 — постоянная, задаваемая на основании имеющейся априорной информации о свойствах входного сигнала **x**. В простейшем случае $\xi_q \equiv 1$ (что соответствует заданию $c_3 = \infty$).

Смысл функции (37) при $\xi_q \equiv 1$ состоит в осуществлении астатического закона регулирования по схеме, изображенной на рис. 1, с учетом ограничений (34). Зона нечувствительности регулятора $[c_2, c_1]$ создается для подавления случайных колебаний сигнала $\tilde{G}$. Для этой же цели в (37) вводится дополнительный сомножитель (39). Он служит для выключения алгоритма регулирования N в тех случаях, когда характеристика извилистости возрастает из-за плохой обусловленности матрицы $\mathbf{W}_n$ (28).

4. Результаты статистического моделирования

Проведенное выше теоретическое рассмотрение было направлено только лишь на выявление определенных качественных тенденций, свойственных функции извилистости; полученные при этом обоснования схемы адаптации (рис. 2) базировались на ряде весьма существенных ограничительных допущений. В частности, было сделано предположение о поступательном дрейфе параметров (19), о возможности использования асимптотических (справедливых при $k/N \to 0$ и $1/k \to 0$) формул и т. д. Однако, как это показывают ниже экспериментальные результаты, предложенный метод адаптации не критичен к перечисленным допущениям и сохраняет свою эффективность в широком диапазоне отличных от них условий.

Экспериментальная проверка схемы рис. 2 проводилась путем статистического моделирования на ЦВМ при следующих условиях. Воспроизводились и сравнивались между собой результаты работы схемы на отдельных, независимых друг от друга реализациях процесса текущей идентификации. В пределах каждой такой реализации объект (1) задавался в виде

$$v_j = \sum_{i=1}^{2} \theta_{j,i} x_{j,i} + \varphi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_M, \tag{40}$$

где n_M — заданное число тактов статистического моделирования, $\{\theta_{j,i}\}$, $\{x_{j,i}\}$, $\{\varphi_j\}$ — дискретные последовательности, генерируемые по следующим законам:

$$\theta_{j,i} = \theta_{j-1,i} + \Delta\theta_{j,i}, \qquad \Delta\theta_{j,i} = A_i \Delta\theta_{j-1,i} + B_i \varepsilon_{j,i}, \qquad \theta_{0,i} = 0, \tag{41}$$
$$\Delta\theta_{0,i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \ldots, n_M,$$

$$x_{j,i} = m_i x_{j-1,i} + p_i \sigma_{j,i}, \qquad x_{0,i} = 0, \qquad i = 1, 2, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_M, \tag{42}$$

$$\varphi_j = \lambda \varphi_{j-1} + \alpha \omega_j, \qquad \varphi_0 = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_M. \tag{43}$$

Здесь A_i, B_i, m_i, p_i, λ, α — заданные для каждой отдельной реализации процесса идентификации постоянные, $\{\varepsilon_{j,i}\}$, $\{\sigma_{j,i}\}$ и $\{\omega_j\}$ — пять независимых друг от друга псевдослучайных последовательностей, каждая из которых обладает свойствами дискретного белого шума с равномерным распределением в интервале $[-1/2, 1/2]$ (т. е. с нулевым средним и дисперсией $D = 1/12$).

Текущие оценки переменных $\theta_{j,i}$ определялись в схеме рис. 2 как

$$\bar{\theta}_n = (\bar{\theta}_{n,1}, \bar{\theta}_{n,2})^{\mathrm{T}} = \arg\min_{\theta} \sum_{j=n-N(n)}^{n} (v_j - \theta_{n,1} x_{j,1} - \theta_{n,2} x_{j,2})^2, \tag{44}$$

где $N(n)$ изменяется в соответствии с (36)—(39) при следующих значениях параметров этого алгоритма:

$$c_1=6,\quad c_2=1{,}5,\quad c_3=20,\quad k=30,$$
$$N_{\text{мин}}=30,\quad N_{\text{макс}}=600,\quad \Delta N=20. \tag{45}$$

Начальное значение N (величина N_0 в (36)) было взято равным $N_0=150$. Таким образом, изменение переменной $N(n)$ производилось в моменты времени

$$n=N_0+qk=150+30q,\quad q=1, 2, \ldots, M. \tag{46}$$

Величина $M=50$, т. е. общее количество тактов моделирования на каждой реализации, бралась равной

$$n_M=N_0+kM=150+30\cdot 50=1650.$$

В результате моделирования на каждой реализации вычислялись величины

$$N_{\text{ср}}\equiv\frac{1}{50}\sum_{q=1}^{50}N_q, \tag{47}$$

$$\eta\equiv\frac{1}{2\cdot 1500}\sum_{n=151}^{1650}(\theta_n-\tilde{\theta}_n)^{\text{т}}(\theta_n-\tilde{\theta}_n). \tag{48}$$

Для сравнения качества оценок (44) и обычных оценок текущего МНК на каждой из реализаций процесса (40) наряду с оценками (44) вычислялся вектор

$$\tilde{\theta}^*_n=(\tilde{\theta}^*_{n,1},\tilde{\theta}^*_{n,2})^{\text{т}}=\arg\min_{\theta_n}\sum_{j=n-N}^{n}(v_j-\theta_{n,1}x_{j,1}-\theta_{n,2}x_{j,2})^2 \tag{49}$$

при $N=N_0=150$, $n=151, 152, \ldots, 1650$. Качество оценки (49) определялось аналогично (48):

$$\eta^*\equiv\frac{1}{2\cdot 1500}\sum_{n=151}^{1650}(\theta_n-\tilde{\theta}_n^*)^{\text{т}}(\theta_n-\tilde{\theta}_n^*). \tag{50}$$

Приведенные ниже результаты моделирования были получены при следующем способе задания параметров последовательностей (41)—(43):

$$A_1=A_2=A,\quad m_1=m_2=m,$$
$$B_1=B_2=\sqrt{1-A^2},\quad p_1=p_2=\sqrt{1-m^2}, \tag{51}$$

где A и m — варьируемые параметры. Таким образом, дисперсия случайных последовательностей $\{\Delta\theta_{n,i}\}$ и $\{x_{n,i}\}$ оставалась все время равной 1 при изменении соответствующих автокорреляционных функций. Дисперсия последовательности $\{\varphi_n\}$

$$D_\varphi=\frac{\alpha^2}{1-\lambda^2}D\qquad (D={}^1/_{12}) \tag{52}$$

изменялась путем варьирования α при постоянном λ.

На рис. 3—5 приведены графики зависимости $N_{\text{ср}}$ от D_φ при различных значениях A, m и λ. Как видно из рисунков, $N_{\text{ср}}$ монотонно возрастает с ростом D_φ, что подтверждает работоспособность адаптивного алгоритма.

На рис. 6 приведены графики зависимости отношения η^*/η от вели-

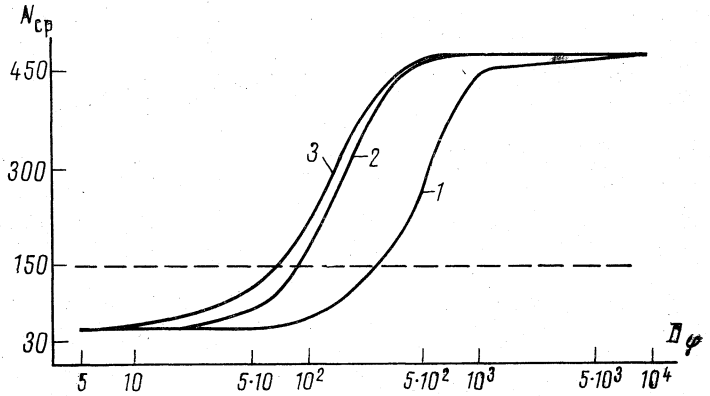

Рис. 3. $m_1=m_2=0{,}4$, $\lambda=0$. *1* — $A=0{,}99$, *2* — $A=0{,}8$, *3* — $A=0{,}7$

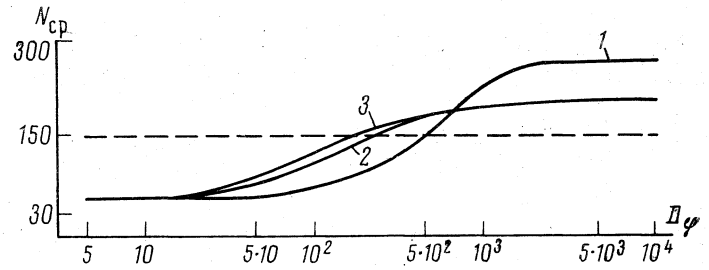

Рис. 4. $m_1=m_2=0{,}6$, $\lambda=0{,}5$. *1* — $A=0{,}99$, *2* — $A=0{,}8$, *3* — $A=0{,}7$

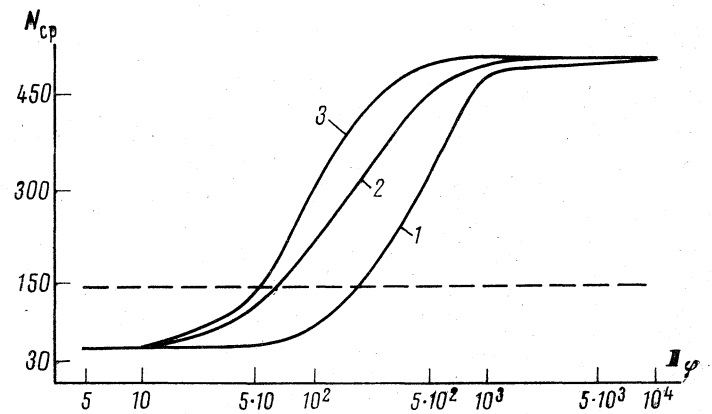

Рис. 5. $m_1=m_2=0$, $\lambda=0$. *1* — $A=0{,}99$, *2* — $A=0{,}8$, *3* — $A=0{,}7$

чины D_φ, построенные для различных значений A при $\lambda=0$, $m=0{,}4$ (т. е. при коррелированном входном сигнале и помехе φ в виде белого шума). Как видно из рисунка, каждая кривая обладает минимумом, в окрестности которого $\eta^*/\eta<1$. Наличие этого минимума обусловлено тем, что при данных m и A существует некоторое значение $D_\varphi=D_\varphi(N_0, m, A)$, при котором параметр $N=N_0=150$ в (49) является оптимальным в смысле обеспечения минимума критерия (50). В то же время при указанном значении D_φ алгоритм адаптации вырабатывает величины $N(n)$, отличающиеся от N_0. Однако, как это видно из рисунка, по мере отклонения D_φ от априори неизвестного значения $D_\varphi(N_0, m, A)$ величина η^*/η быстро растет, так что в большей части диапазона варьирования D_φ имеет место $\eta^*/\eta\gg1$, что свиде-

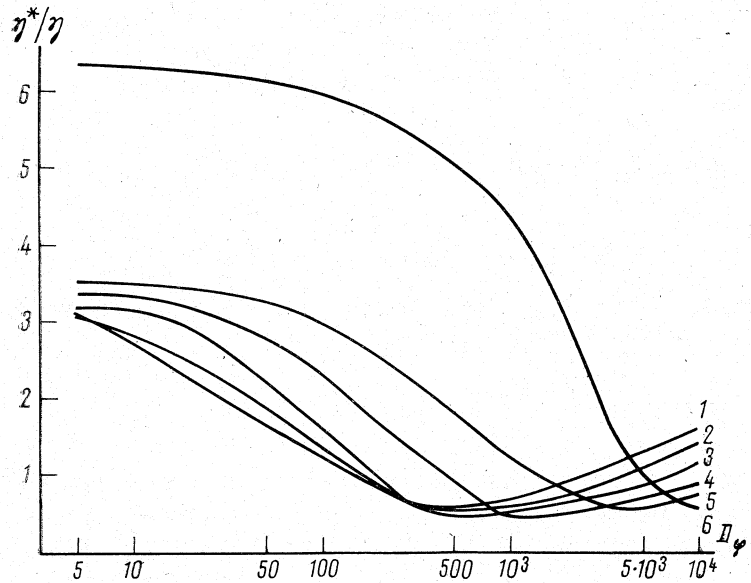

Рис. 6. $m_1=m_2=0{,}4$, $\lambda=0$. *1* — $A=0{,}1$, *2* — $A=0{,}3$, *3* — $A=0{,}5$, *4* — $A=0{,}7$, *5* — $A=0{,}8$, *6* — $A=0{,}99$

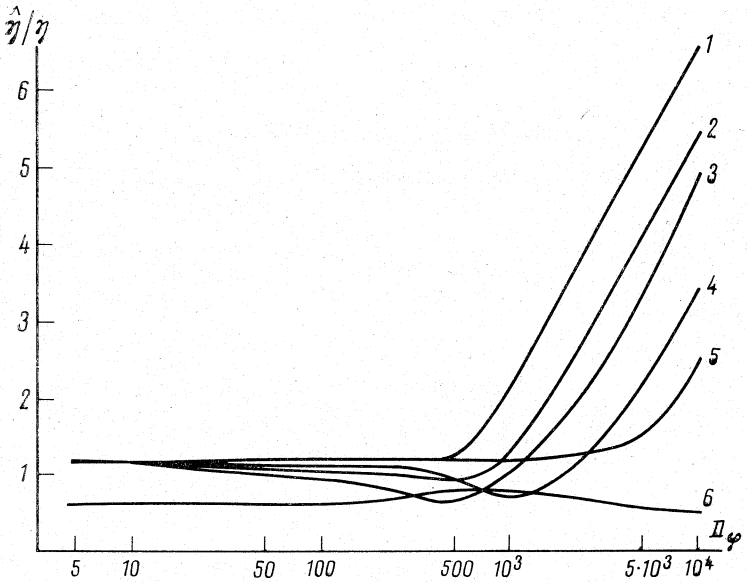

Рис. 7. $m_1=m_2=0{,}4$, $\lambda=0$. *1* — $A=0{,}1$, *2* — $A=0{,}3$, *3* — $A=0{,}5$, *4* — $A=0{,}7$, *5* — $A=0{,}8$, *6* — $A=0{,}99$

тельствует о получении существенного выигрыша в точности при использовании адаптивных оценок.

Как это видно из рис. 6, преимущества адаптивного алгоритма по сравнению с алгоритмом (49) возрастают с ростом величины A. С другой стороны, из (51) следует, что при $A\to1$ последовательность (41) приближается к линейной функции времени:

$$\theta_{j,i}\cong\theta_{n,i}-(n-j)\Delta\theta_{n,i},\quad i=\overline{1,2},\quad j=n,\ n-1,\ldots,\ n-N, \tag{53}$$

где $\Delta\theta_{n,1}$, $\Delta\theta_{n,2}$ — некоторые ненаблюдаемые переменные. В связи с этим возникает следующий вопрос: нельзя ли вместо применения описанной

адаптивной схемы достичь такого же повышения точности оценок параметров $\theta_{n,1}$ и $\theta_{n,2}$ за счет применения модели типа (53), т. е. путем использования в качестве текущих оценок $\theta_{n,i}$ величин $\hat{\theta}_{n,1}$ и $\hat{\theta}_{n,2}$, определяемых как

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{\theta}_{n,1}, \hat{\theta}_{n,2}, \Delta\hat{\theta}_{n,1}, \Delta\hat{\theta}_{n,2})^{\mathrm{T}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}_n} \sum_{j=n-N_0}^{n} [v_j - (\theta_{n,1} - (n-j)\Delta\theta_{n,1})x_{j,1} - (\theta_{n,2} - (n-j)\Delta\theta_{n,2})x_{j,2}]^2. \tag{54}$$

Точность полученных таким образом оценок охарактеризуем аналогично (48), (50) величиной

$$\hat{\eta} = \frac{1}{2\cdot 1500}\sum_{n=151}^{1650} [(\theta_{n,1}-\hat{\theta}_{n,1})^2 + (\theta_{n,2}-\hat{\theta}_{n,2})^2]. \tag{55}$$

В процессе статистических испытаний наряду с вычислением $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_n$ и $\tilde{\theta}_n^*$ проводилось определение (54) и (55). На рис. 7 приведены кривые $\hat{\eta}/\eta$ в функции от D_φ, построенные при тех же условиях, что и кривые рис. 6. Как видно из рис. 7, при всех $A \leqslant 0{,}8$ и относительно малых значениях D_φ имеет место $\hat{\eta} \cong \eta$. Однако с ростом D_φ отношение $\hat{\eta}/\eta$ быстро возрастает. Это свидетельствует о преимуществах адаптивного алгоритма по сравнению не только с обычными МНК оценками, но и с оценками типа (54), учитывающими возможность линейного изменения параметров.

Поступила в редакцию
2 апреля 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Перельман И. И.* Текущий регрессионный анализ и его применение в некоторых задачах автоматического управления. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, № 2, стр. 122–131, 1960.
2. *Цыпкин Я. З., Каплинский А. И., Ларионов К. А.* Алгоритмы адаптации и обучения в нестационарных условиях. Техническая кибернетика, № 5, стр. 9–21, 1970.
3. *Цыпкин Я. З.* Алгоритмы динамической адаптации. Автоматика и телемеханика, № 1, стр. 68–77, 1972.
4. *Ли Р.* Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. «Наука», 1966.
5. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. И.* Статистика случайных процессов. «Наука», 1974.
6. *Перельман И. И.* Асимптотические свойства регрессионных моделей объектов управления. Автоматика и телемеханика, № 4, стр. 56–63, 1975.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. Физматгиз, 1966.

AN ADAPTIVE APPROACH TO DATA WEIGHTING IN ESTIMATION OF UNOBSERVABLE DRIFTING PARAMETERS

I. I. PEREL'MAN

The paper is concerned with current estimate of plant equation parameters on the knowledge of observations of its input an output parameters. To improve the estimate accuracy and an adaptive algorithm is studied which changes its properties with the rate of drift of the parameters being estimated and with the errors in measurement of the output signal.