В. Г. Яхно, Многомерная обратная динамическая задача изотропной упругости, *Докл. АН СССР*, 1989, том 304, номер 3, 582–585

Интегрируя (14) по углам наблюдения ($|\theta| < \pi/2$), получаем выражение для энергии, рассеянной в верхнее полупространство,

$$(18)\quad \Pi_+^\Gamma = \frac{ac}{\pi} E_0^2 \frac{\beta^3}{|\epsilon|} [1 + O(\kappa^{-1})].$$

Отношение этой величины к полной рассеянной энергии убывает с ростом $|\epsilon|$ пропорционально $\beta|\epsilon|^{-1/2}\cos(\delta/2)$. Следовательно, большая часть рассеянной лентой энергии (порядка $|\epsilon|^{-1/2}$) рассеивается в нижнее полупространство, превращаясь при $\delta \neq 0$ в омические потери.

8. Полученные аналитические соотношения (случай горизонтальной поляризации) являются удобными как для физического анализа, так и для вычислений на ЭВМ. Они позволяют дать качественную и количественную оценку физическим явлениям, связанным с исследованием различных свойств подстилающих поверхностей, рассмотрение которых приведено, например, в [4, 5].

Поступило
30 X 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400 с. 2. *Сологуб В.Г.* – ЖВМиМФ, 1971, т. 11, вып. 4, с. 837. 3. *Хёнл Х., Мауэ А., Вестфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с. 4. *Шутко А.М.* СВЧ-радиометрия водной поверхности и почвогрунтов. М.: Наука, 1986. 189 с. 5. *Арманд Н.А., Крапивин В.Ф., Мкртчян Ф.А.* Методы обработки данных радиофизического исследования окружающей среды. М.: Наука, 1987. 270 с.

УДК 517.946 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В.Г. ЯХНО

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 24 IX 1987)

Изотропная неоднородная упругая среда полностью характеризуется тремя функциями точки пространства: параметрами Ламе $\mu(x)$, $\lambda(x)$ и плотностью $\rho(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Определение этих характеристик среды внутри заданной области D по измерениям волнового процесса в точках ее границы S, возникшего в результате точечных воздействий на эту границу, является важнейшей прикладной задачей [1, 2]. Задача определения всех функций $\mu(x_3)$, $\lambda(x_3)$, $\rho(x_3)$ для вертикально-неоднородного изотропного полупространства по измерениям на границе волнового процесса исследовалась ранее в работах [2–8]. В [4, 5, 9, 10] изучены задачи определения многомерных аддитивных малых добавок к уже известным одномерным характеристикам среды $\mu(x_3)$, $\lambda(x_3)$, $\rho(x_3)$. Предмет исследования настоящей работы составляет задача определения неизвестных гладких функций трех пространственных переменных $\mu(x)$, $\lambda(x)$, $\rho(x)$ при $x = (x_1, x_2, x_3) \in D(H) = \{x \in R^3 \mid |x| < H\}$, $H > 0$, по измерениям волнового процесса на границе $S(H) = \{x \in R^3 \mid |x| = H\}$. Волновой процесс возникает в результате точечных воздействий на поверхность $S(H)$. Решение этой задачи состоит в последовательном определении скоростей продольной и поперечной волн

$$v_1(x) = \sqrt{(\lambda(x) + 2\mu(x))/\rho(x)}, \quad v_2(x) = \sqrt{\mu(x)/\rho(x)}$$

и плотности $\rho(x)$. Функции $v_1(x), v_2(x)$ находятся как решения обратных кинематических задач. Исследованию таких задач посвящены работы ряда авторов (см. [4, 11–13] и цитированную там литературу). Оставался открытым вопрос об определении только плотности $\rho(x)$ при уже известных $v_1(x), v_2(x)$. Основной результат работы состоит в обосновании устойчивости решения задачи определения плотности в некотором классе функций.

Рассмотрим при $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $t \in R$, систему дифференциальных уравнений Ламе

$$\text{(1)} \quad \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \mu}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_l} + \nabla \mathbf{u}_l \right) + \mathbf{f}(x, t, x^0),$$

где $\mathbf{u}(x, t, x^0) = (\mathbf{u}_1(x, t, x^0), \mathbf{u}_2(x, t, x^0), \mathbf{u}_3(x, t, x^0))$ – вектор смещений; $\mathbf{f}(x, t, x^0)$ – вектор плотности внешних сил; $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ – параметр.

Далее h, H_1, H – заданные положительные числа, $h < H_1 < H$, а упругие параметры $\lambda = \lambda(x)$, $\mu = \mu(x)$ и плотность $\rho = \rho(x)$ – гладкие, ограниченные функции класса C^r $(r \geqslant 18)$, причем эти функции на множестве $R^3 \setminus D(H_1)$ принимают постоянные значения λ_0, μ_0, ρ_0. Пусть $\tau_i(x, x^0)$ – расстояния между точками x и x^0 в римановых метриках, элемент длины в которых вычисляется по формулам

$$\text{(2)} \quad d\tau_i = \frac{1}{v_i(x)} \left(\sum_{j=1}^{3} (dx_j)^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Будем предполагать, что $v_1(x)$, $v_2(x)$ удовлетворяют следующим требованиям. Геодезические метрики, порожденные функциями $v_1(x)$, $v_2(x)$, регулярны в R^3. Кроме того, в области $D(h, H_1) = \{x \in R^3 \mid h < |x| < H_1\}$ справедливы соотношения

$$m(x) = |x|/v_1(x), \quad 0 < a \leqslant m(x) \leqslant b < \infty,$$

$$a \leqslant \frac{d}{dr} (m(x)|_{x = r\gamma}) \leqslant b, \quad |v_1^2(x) - 2v_2^2(x)| \geqslant r_0 > 0,$$

a, b, r_0 – некоторые положительные числа; $\gamma = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.

Замечание 1. Используя результаты работы [14], можно показать, что в сделанных предположениях луч $\mathcal{T}(x^1, x^0)$, определяемый метрикой (2) при $i = 1$ и для точек $x^1, x^0 \in S(H)$ целиком лежащий между двух сфер $S(h)$, $S(H)$ и удовлетворяющий условию $\mathcal{T}(x^1, x^0) \cap D(h, H_1) \neq \phi$, можно записать единственным образом в виде кривой

$$L(\alpha, \eta, \beta) = \{x \in R^3 \mid x = r\gamma, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad r = r(t, \alpha, \eta, \beta),$$
$$\gamma = \gamma(t, \alpha, \eta, \beta), \quad t_1(\alpha, \eta, \beta) \leqslant t \leqslant t_2(\alpha, \eta, \beta)\},$$

где

$$\alpha \in S_1 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \mid \alpha_1 = \cos\varphi_0 \sin\theta_0, \quad \alpha_2 = \sin\varphi_0 \sin\theta_0,$$
$$\alpha_3 = \cos\theta_0, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi), \quad \theta_0 \in [0, \pi]\},$$
$$\beta \in S_1(\alpha) = \{\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in S_1 \mid \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0\},$$
$$\eta \in [h, H_1], \quad 0 < h < H_1 < H.$$

Эта кривая $L(\alpha, \eta, \beta)$ соединяет точки x^1 и x^0 поверхности $S(H)$ и имеет в точке $x = \eta\alpha$ вершину, в которой направление касательного вектора к $L(\alpha, \eta, \beta)$ совпадает с направлением вектора β.

Систему дифференциальных уравнений (1) будем рассматривать совместно с условием

(3) $\quad \mathbf{u}|_{t<0} = 0.$

Для заданных $\mu(x)$, $\rho(x)$, $\lambda(x)$, $f(x, t, x^0)$, входящих в систему (1), вектор-функцию $u(x, t, x^0)$, удовлетворяющую равенствам (1), (3), будем называть решением прямой задачи (1), (3). Предметом изучения настоящей работы является следующая обратная задача.

Обратная задача. *Пусть* $\mathbf{f}(x, t, x^0) = \nabla_x \delta(x - x^0) \cdot \delta(t)$, $\delta(x - x^0) = \delta(x_1 - x_1^0)\delta(x_2 - x_2^0)\delta(x_3 - x_3^0)$, $\delta(\cdot)$ *– дельта-функция Дирака;* h, H_1, H, ϵ *– фиксированные положительные числа,* $h < H_1 < H$; $v_1(x)$, $v_2(x)$ *– заданные функции, удовлетворяющие ранее описанным условиям. Требуется определить неизвестную при* $x \in D(h, H_1)$ *функцию* $\rho(x)$, *входящую в систему дифференциальных уравнений* (1), *если относительно решения прямой задачи* (1), (3) $u(x, t, x^0)$ *известно, что*

$$\operatorname{div}_x \mathbf{u}(x, t, x^0) = \mathcal{F}(x, t, x^0),$$

где $\mathcal{F}(x, t, x^0)$ *– заданная (измеряемая) при* $x \in S(H)$, $x^0 \in S(H)$, $\tau_1(x, x^0) - \epsilon < t < \tau_1(x, x^0) + \epsilon$, *функция.*

Замечание 2. Система дифференциальных уравнений (1) с вектор-функцией $\mathbf{f}(x, t, x^0) = \nabla_x \delta(x - x^0) \cdot \delta(t)$ описывает процесс возникновения и распространения упругих волн, возникающих от мгновенного источника типа взрыва, сосредоточенного в точке $x = x^0$ в момент времени $t = 0$.

Для заданных положительных чисел h, H_1, ρ_0, ρ_1 ($h \leqslant H_1$, $\ln\rho_0 \leqslant \rho_1$) и натурального числа N введем класс функций $\mathcal{R}$ следующим образом:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(h, H_1, \rho_0, \rho_1, N) = \{\rho(r, \theta_0, \varphi_0) \mid \rho(r, \theta_0, \varphi_0) =$$
$$= \exp(R(r, \theta_0, \varphi_0)), \quad R(r, \theta_0, \varphi_0) \in C^{18}([0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)),$$
$$|R(r, \theta_0, \varphi_0)| \leqslant \rho_1,$$

при $r \geqslant H_1$ справедливо равенство $R(r, \theta_0, \varphi_0) = \ln\rho_0$, а при $r \in [h, H_1]$ имеет место представление

$$R(r, \theta_0, \varphi_0) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}(r) \cos m\varphi_0 + B_{nm}(r) \sin m\varphi_0) P_n^{(m)}(\cos\theta_0)\}.$$

Здесь $P_n^{(m)}(x)$, $n = 0, 1, \ldots, N$; $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ – присоединенные функции Лежандра.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть заданные положительные числа* h, H_1, H, ρ_0, ρ_1, N *и функции* $v_1(x)$, $v_2(x)$ *удовлетворяют ранее описанным условиям. Тогда если* $\rho(r, \theta_0, \varphi_0)$, $\rho_*(r, \theta_0, \varphi_0) \in \mathcal{R}(h, H_1, \rho_0, \rho_1, N)$ *– решение обратной задачи, отве-*

чающие соответственно информациям $\mathcal{F}(x, t, x^0)$, $\mathcal{F}_*(x, t, x^0)$, *то выполняются оценки*

$$\sup_{\theta_0 \in [0,\pi]} \sup_{\varphi_0 \in [0,2\pi)} \left| \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, \theta_0, \varphi_0) - \frac{\partial}{\partial r} \rho(r, \theta_0, \varphi_0) \right| \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{\alpha \in S_1} \sup_{\beta \in S_1(\alpha)} |\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha, r, \beta)|,$$

где C *– некоторая постоянная, зависящая от величин* h, H_1, ρ_0, ρ_1, N; *функция* $\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha, \eta, \beta)$ *определяется формулой*

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\alpha, \eta, \beta) = \int_h^\eta \frac{ds}{\sqrt{\eta - s}} \left\{ \lim_{\omega \to +0} \lim_{t \to \tau_1(x, x^0) + 0} \int_{\tau_1(x, x^0) - \omega}^{t} (t - z) \times \right.$$
$$\left. \times [\mathcal{F}(x, z, x^0) - \mathcal{F}_*(x, z, x^0)]\, dz \right\} \Bigg|_{x = [r\gamma]_1,\ x_0 = [r\gamma]_2}.$$

В последней формуле

$$[r\gamma]_1 = r(t_1, \alpha, \eta, \beta)\gamma(t_1, \alpha, \eta, \beta), \quad [r\gamma]_2 = r(t_2, \alpha, \eta, \beta)\gamma(t_2, \alpha, \eta, \beta)$$

суть точки луча $L(\alpha, \eta, \beta)$, лежащие на поверхности $S(H)$.

Доказательство теоремы основано на сведении решения поставленной обратной задачи к решению интегродифференциального уравнения и обосновании устойчивости решения этого уравнения. Из-за громоздкости выкладок это сведение опущено. Отметим, что возможность такого сведения становится понятной, если получить структуру сингулярной и регулярной частей решения прямой задачи (1), (3).

Институт математики
Сибирского отделения
Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
26 XI 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М.М.* В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1967, с. 3–8. 2. *Алексеев А.С.* Там же, с. 9–84. 3. *Благовещенский А.С.* В кн.: Проблемы математической физики. Л., 1966, вып. 1, с. 68–81. 4. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. 264 с. 5. *Романов В.Г., Волкова Е.А.* – ДАН, 1982, т. 267, № 4, с. 780–783. 6. *Яхно В.Г.* – ДАН, 1985, т. 285, № 2, с. 339–342. 7. *Яхно В.Н.* – ДАН, 1986, т. 286, № 6, с. 1369–1372. 8. *Яхно В.Г.* Одномерные обратные динамические задачи для анизотропных упругих сред. Новосибирск, 1985. 105 с. 9. *Романов В.Г.* В кн.: Численные методы в сейсмических исследованиях. Новосибирск: Наука, 1983, с. 51–78. 10. *Яхно В.Г.* – ДАН, 1984, т. 276, № 2, с. 314–318. 11. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с. 12. *Аниконов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978. 118 с. 13. *Бухгейм А.Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 208 с. 14. *Романов В.Г.* В кн.: Математические проблемы геофизики. Новосибирск, 1973, с. 140–164.