



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Лукьянов, Г. Л. Никитин, О рассеянии электромагнитных волн в плоском волноводе с двухсторонней диафрагмой,  
*ЖТФ*, 1984, том 54, выпуск 5, 865–872

<https://www.mathnet.ru/jtf1777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

17 мая 2025 г., 22:13:22



УДК 53:51

## О РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ДВУХСТОРОННЕЙ ДИАФРАГМОЙ

*В. Д. Лукьянов, Г. Л. Никитин*

Строится точное решение задачи о стационарном рассеянии нормальной волны в плоском волноводе с двухсторонней диафрагмой сведением к матричной задаче Римана для двух пар аналитических функций. Факторизация матрицы-функции второго порядка производится в замкнутой форме с использованием результатов работ [1, 2]. Получены выражения для коэффициентов отражения и трансформации падающей нормальной волны. Отметим, что в настоящее время в зарубежной литературе [3-5] решен ряд задач, в которых матричная задача Римана решена методом, описанным в [1, 2], без ссылки на эти более ранние работы.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается распространение стационарных электромагнитных волн (скалярная задача) в плоском бесконечном волноводе с двухсторонней диафрагмой (рис. 1). Стенки волновода, как и поперечная диафрагма, представляют собой проводники с бесконечной проводимостью.

Пусть искомая функция  $E_z = U(x, y)$  (составляющая электрического поля, перпендикулярная плоскости  $xOy$ ) удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца внутри волновода

$$(\Delta + k^2)U(x, y) = 0.$$

Здесь  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\omega$  — круговая частота,  $c$  — скорость света (множитель  $\exp(-i\omega t)$ , задающий зависимость процессов от времени, везде для краткости опущен).

На стенках волновода и диафрагмах выполнено граничное условие  $U/s = 0$ .

Колебания в среде возбуждаются набегающей со стороны положительных значений  $x$ , симметричной относительно оси волновода, распространяющейся нормальной волной с номером  $n$

$$\Psi_n(x, y) = \varphi_n(y) e^{-i\lambda_n x},$$

где

$$\lambda_n = \sqrt{k^2 + \gamma_n^2}, \quad \gamma_n = -i \frac{\pi(2n-1)}{2H}, \quad \varphi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cos \frac{\pi(2n-1)y}{2H}.$$

Рассеяное поле  $V(x, y) = U(x, y) - \Psi_n(x, y)$  строится в соответствии с принципом предельного поглощения и должно удовлетворять условию Мейкснера [6] на концах диафрагм и в точках сочленения со стенками волновода

В силу симметрии модели четное по  $y$  падающее поле возбуждает только четные отраженные волны, поэтому достаточно построить решение в верхней части волновода  $0 \leq y \leq H$ . Кроме того, симметрия модели и условие Дирихле на диафрагмах приводят к тому, что диффрактированное поле является

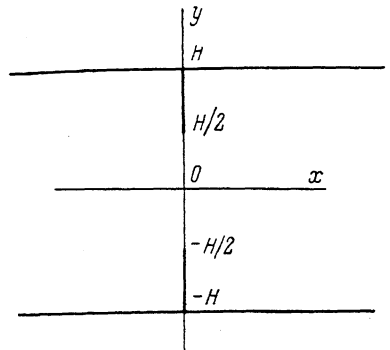


Рис. 1.

четным по  $x$ . Действительно, представим полное поле  $U(x, y)$  в виде суммы четной (симметричной) функции

$$U_s(x, y) = \frac{1}{2} [\Psi_n(x, y) + \Psi_n(-x, y)] + \frac{1}{2} [V(x, y) + V(-x, y)]$$

и нечетной (антисимметричной) функции

$$U_a(x, y) = \frac{1}{2} [\Psi_n(x, y) - \Psi_n(-x, y)] + \frac{1}{2} [V(x, y) - V(-x, y)]$$

относительно переменной  $x$ . Для нечетной части условие Дирихле с диафрагмы продолжается на отверстие, и поэтому

$$U_a(x, y) = \frac{1}{2} [\Psi_n(x, y) - \Psi_n(-x, y)]$$

является решением нечетной части задачи. Следовательно,  $V(x, y) - V(-x, y) \equiv 0$ , что эквивалентно равенству  $V(x, y) = V(-x, y) = V(|x|, y)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} U(x, y) &= U_s(x, y) + U_a(x, y) = \Psi_n(x, y) + \frac{1}{2} [V(x, y) + V(-x, y)] = \\ &= \Psi_n(x, y) + V(|x|, y). \end{aligned}$$

Для отыскания  $V(|x|, y)$  достаточно решить задачу для  $U_s(x, y)$  в полуполосе  $\{0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq H\}$  при следующих граничных условиях:

$$\partial U_s(x, 0) / \partial y = 0 \quad (x > 0), \quad (1)$$

$$U_s(x, H) = 0 \quad (x > 0), \quad (2)$$

$$\partial U_s(0, y) / \partial x = 0 \quad (0 < y < H/2), \quad (3)$$

$$U_s(0, y) = 0 \quad (H/2 < y < H). \quad (4)$$

## 2. Построение решения

Будем искать поле  $U_s(x, y)$  при  $x > 0$  в виде

$$U_s(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\Psi_n(x, y) + \Psi_n(-x, y)] + V_1(x, y) & (0 < y < \frac{H}{2}), \\ \frac{1}{2} [\Psi_n(x, y) - \Psi_n(-x, y)] + V_2(x, y) & (\frac{H}{2} < y < H). \end{cases}$$

Введенные таким образом новые неизвестные функции  $V_1(x, y)$  и  $V_2(x, y)$  в отличие от  $V(x, y)$  должны удовлетворять, согласно условиям (3) и (4), однородным граничным условиям на торце полуполосы

$$\partial V_1(0, y) / \partial x = 0 \quad (0 < y < H/2), \quad (5)$$

$$V_2(0, y) = 0 \quad (H/2 < y < H). \quad (6)$$

Удовлетворяя однородному уравнению Гельмгольца, будем искать  $V_1(x, y)$  и  $V_2(x, y)$  в виде разложения по плоским волнам

$$V_1(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(\lambda) \operatorname{ch}[\gamma(\lambda)y] e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (7)$$

$$V_2(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(\lambda) \frac{\operatorname{sh}[\gamma(\lambda)(H-y)]}{\gamma(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (8)$$

где  $\gamma = \gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ . Гиперболические функции обеспечивают выполнение условий (1) и (2) для  $V_1(x, y)$  и  $V_2(x, y)$  соответственно.

Для удовлетворения условию Мейкснера потребуем выполнения следующих оценок при  $|\lambda| \rightarrow +\infty$ :

$$p_1(\lambda) = O(\lambda^{-1-\varepsilon} e^{-\gamma H/2}), \quad p_2(\lambda) = O(\lambda^{-\varepsilon} e^{-\gamma H/2}). \quad (9)$$

Граничные условия (5) и (6) на торце полуполосы будут выполнены, если предположить, что  $p_1(\lambda)$  четная, а  $p_2(\lambda)$  нечетная функции переменной  $\lambda$ . Запишем эти условия в матричной форме

$$P(-\lambda) = QP(\lambda), \quad (10)$$

где

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} p_1(\lambda) \\ p_2(\lambda) \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из условий непрерывности  $U_s(x, y)$  и  $\partial U_s(x, y)/\partial y$  на луче  $0 < x < +\infty$ ,  $y = H/2$  получим следующие интегральные уравнения для  $p_1(\lambda)$  и  $p_2(\lambda)$  при  $x > 0$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ p_1(\lambda) \operatorname{ch} \frac{\gamma H}{2} - p_2(\lambda) \frac{\operatorname{sh} \frac{\gamma H}{2}}{\gamma} \right] e^{i\lambda x} d\lambda + \Psi_n(-x, \frac{H}{2}) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ p_1(\lambda) \gamma \operatorname{sh} \frac{\gamma H}{2} + p_2(\lambda) \operatorname{ch} \frac{\gamma H}{2} \right] e^{i\lambda x} d\lambda + \frac{\partial \Psi_n(-x, H/2)}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Учитывая соотношение

$$e^{i\lambda_n x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} d\lambda}{\lambda - \lambda_n - i0} \quad (x > 0),$$

на основании теоремы Винера—Пэли заключаем, что

$$A(\lambda) P(\lambda) + f(\lambda) = \Phi^+(\lambda). \quad (13)$$

Здесь использованы обозначения

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{\gamma H}{2} & -\frac{1}{\gamma} \operatorname{sh} \frac{\gamma H}{2} \\ \gamma \operatorname{sh} \frac{\gamma H}{2} & \operatorname{ch} \frac{\gamma H}{2} \end{pmatrix},$$

$$\Phi^+(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+(\lambda) \\ \Phi_2^+(\lambda) \end{pmatrix}, \quad f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}(\lambda - \lambda_n - i0)} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{\gamma_n H}{2} \\ \gamma_n \operatorname{sh} \frac{\gamma_n H}{2} \end{pmatrix}.$$

причем  $\Phi_1^+(\lambda)$  и  $\Phi_2^+(\lambda)$  являются аналитическими функциями в верхней полуплоскости переменной  $\lambda$  ( $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ ).

Согласно оценкам (9), при  $|\lambda| \rightarrow +\infty$  имеем

$$\Phi_1^+(\lambda) = O(\lambda^{-1-\varepsilon}), \quad \Phi_2^+(\lambda) = O(\lambda^{-\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0). \quad (14)$$

Меняя знак у аргумента в (13), получим при  $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$

$$A(-\lambda) P(-\lambda) + f(-\lambda) = \Phi^+(-\lambda). \quad (15)$$

Здесь  $\Phi^+(-\lambda)$  — вектор-функция, аналитическая в нижней полуплоскости переменной  $\lambda$  ( $\operatorname{Im} \lambda \leq 0$ ).

Исключим из соотношений (10), (13), (15)  $P(\lambda)$  и  $P(-\lambda)$ . Для функций  $\Phi^+(\lambda)$  и  $\Phi^+(-\lambda)$  получится линейное соотношение на вещественной оси переменной  $\lambda$

$$\Phi^+(\lambda) - f(\lambda) = A(\lambda) Q A^{-1}(\lambda) Q^2 (\Phi^+(-\lambda) - f(-\lambda)). \quad (16)$$

Здесь учтено, что  $A(-\lambda) = A(\lambda)$  и  $Q^2 = I$ , где  $I$  — единичная матрица.

Введем обозначения  $G(\lambda) = A(\lambda)QA^{-1}(\lambda)Q$ ,  $\Phi^-(\lambda) = Q\Phi^+(-\lambda)$ ,  $g(\lambda) = f(\lambda) - G(\lambda)Qf(-\lambda)$ , тогда векторная задача (16) запишется в стандартной форме [7]

$$\Phi^+(\lambda) = G(\lambda)\Phi^-(\lambda) + g(\lambda). \quad (17)$$

Ключевым моментом решения задачи Римана (17) является решение однородной задачи  $G_+(\lambda) = G(\lambda)G_-(\lambda)$  в классе неособых матриц, что эквивалентно факторизации матрицы  $G(\lambda) = G_+(\lambda)G_-^{-1}(\lambda)$ . Искомые матрицы  $G_+(\lambda)$  и  $G_-(\lambda)$  аналитичны вместе со своими обратными в верхней и нижней полуплоскостях переменной  $\lambda$  соответственно.

Поскольку неособая матрица  $G(\lambda)$  представима в виде

$$G(\lambda) = \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma H} I + \frac{\operatorname{th} \gamma H}{\gamma} C(\lambda), \quad C(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma^2(\lambda) & 0 \end{pmatrix},$$

где  $C(\lambda)$  — матрица с полиномиальными элементами, причем  $\det C(\lambda) = O(\lambda^2)$  при  $|\lambda| \rightarrow +\infty$ , она допускает коммутативную факторизацию в замкнутой форме

$$G(\lambda) = G_+(\lambda)G_-^{-1}(\lambda) = G_-^{-1}(\lambda)G_+(\lambda). \quad (18)$$

Возможность факторизации таких матриц была впервые указана в [1, 2]. Для получения представления (18) вычислим

$$\ln G(\lambda) = \omega(\lambda)C(\lambda), \quad \text{где } \omega(\lambda) = \frac{1}{i\gamma} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{i\gamma H}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Используя формулы Сохоцкого

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= \Omega^+(\lambda) - \Omega^-(\lambda), \\ \Omega^\pm(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega(\tau) d\tau}{\tau - \lambda \mp i0}, \end{aligned} \quad (19)$$

получим

$$G(\lambda) = \exp[\ln G(\lambda)] = \exp[\omega(\lambda)C(\lambda)] = \exp[\Omega^+(\lambda)C(\lambda)] \exp[\Omega^-(\lambda)C(\lambda)].$$

Здесь  $\Omega^+(\lambda)$  и  $\Omega^-(\lambda)$  — предельные значения функций, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях переменной  $\lambda$  соответственно. Вычисление интеграла в (19) произведено в п. 4.

Таким образом,

$$G_\pm(\lambda) = \exp[\Omega^\pm(\lambda)C(\lambda)] = \cos[\gamma\Omega^\pm(\lambda)]I + \frac{\sin[\gamma\Omega^\pm(\lambda)]}{\gamma}C(\lambda). \quad (20)$$

Отметим следующее следствие четности функции  $\omega(\lambda)$ :

$$G_+(-\lambda) = G_-^{-1}(\lambda). \quad (21)$$

Для интеграла (19) легко получить следующую асимптотическую формулу:

$$\Omega^+(\lambda) = -\frac{i}{2\gamma} \ln \frac{\lambda + \gamma}{k} + O(1/\lambda), \quad |\lambda| \rightarrow +\infty. \quad (22)$$

Используя формулу (22), получим асимптотику матричных элементов  $G_\pm(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow +\infty$

$$G_\pm(\lambda) = O \left( \begin{pmatrix} \lambda^{1/2} & \lambda^{-1/2} \\ \lambda^{3/2} & \lambda^{1/2} \end{pmatrix} \right).$$

Из этой асимптотики видно, что фундаментальные матрицы решений не являются каноническими.

Для получения канонических матриц решений  $X_\pm(\lambda)$  однородной задачи воспользуемся методом, описанным в [7]. Домножим матрицы  $G_\pm(\lambda)$  справа на матрицу с полиномиальными элементами и единичным определителем

$$X_\pm(\lambda) = G_\pm(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Здесь

$$a = k \exp \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\tau)} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{i\gamma(\tau)H}{2} + \frac{\pi}{4} \right) d\tau \right\}.$$

Асимптотика матриц  $X_{\pm}(\lambda)$  при  $|\lambda| \rightarrow +\infty$

$$X_{\pm}(\lambda) = O \left( \left\| \begin{array}{cc} \lambda^{-1/2} & \lambda^{-1/2} \\ \lambda^{1/2} & \lambda^{-1/2} \end{array} \right\| \right) \quad (24)$$

показывает, что данная система решений является канонической.

Используя каноническую факторизацию

$$G(\lambda) = X_+(\lambda) X_-^{-1}(\lambda),$$

перепишем уравнение (17) в виде

$$\begin{aligned} X_+^{-1}(\lambda) \Phi^+(\lambda) + [X_+^{-1}(\lambda) - X_+^{-1}(\lambda_n)] f(\lambda) - X_-^{-1}(-\lambda_n) Q f(-\lambda) = \\ = X_-^{-1}(\lambda) \Phi^-(\lambda) + [X_-^{-1}(\lambda) - X_-^{-1}(-\lambda_n)] Q f(-\lambda) - X_+^{-1}(\lambda_n) f(\lambda). \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно теореме Римана об аналитическом продолжении через контур, левая и правая части в равенстве (25) задают вектор-функцию, аналитическую на всей комплексной плоскости  $\lambda$ . Оценки (14) и (24) позволяют заключить, что эта вектор-функция есть нуль вектор. Таким образом,

$$\Phi^+(\lambda) = X_+(\lambda) X_+^{-1}(-\lambda_n) Q f(-\lambda) - [I - X_+(\lambda) X_+^{-1}(-\lambda_n)] f(\lambda),$$

и в соответствии с (13)

$$P(\lambda) = A^{-1}(\lambda) [\Phi^+(\lambda) - f(\lambda)] = A^{-1}(\lambda) X_+(\lambda) [X_-^{-1}(-\lambda_n) Q f(-\lambda) + X_+^{-1}(\lambda_n) f(\lambda)].$$

### 3. Исследование решения

Переходя в (7) и (8) от интеграла к сумме вычетов, получим разложение дифрагированного поля по нормальным волнам (достаточно провести вычисления для  $V_1(x, y)$ , поскольку  $V_2(x, y)$  получается аналитическим продолжением по  $y$ ). Отметим, что формальное решение неоднородной задачи Римана с использованием неканонической факторизации приводит в [3-5, 8] к расходящимся интегралам. Однако полученная в [8] окончательная формула для искомого поля в виде разложения по нормальным волнам верна.

Для поля  $U(x, y) = U_a(x, y) + U_s(x, y)$  имеем ( $|y| < H$ )

$$U(x, y) = \begin{cases} \Psi_n(x, y) + \sum_{l=1}^{\infty} r_{ln} \Psi_l(-x, y), & x > 0, \\ \sum_{l=1}^{\infty} t_{ln} \Psi_l(x, y), & x < 0. \end{cases}$$

Здесь  $r_{nn}$  и  $t_{nn}$  — коэффициенты отражения и прохождения падающей волны  $\Psi_n(x, y)$ , а  $r_{ln} = t_{ln}$  ( $l \neq n$ ) — коэффициенты трансформации ее в нормальную волну с номером  $l$ . Они вычисляются по формулам

$$r_{ln} = -\frac{1}{2} \delta_{ln} + \frac{\gamma_l}{\sqrt{\lambda_l \lambda_n} H \operatorname{sh} \gamma_l H} \left\| C_l, \frac{S_l}{\gamma_l} \right\| X_+(\lambda_l) \left[ \frac{X_+^{-1}(\lambda_n)}{\lambda_l - \lambda_n} - \frac{X_-^{-1}(-\lambda_n) Q}{\lambda_l + \lambda_n} \right] \left\| \begin{array}{c} C_n \\ \gamma_n S_n \end{array} \right\|,$$

$$t_{nn} = 1 + r_{nn},$$

где  $\delta_{ln}$  — символ Кронекера,

$$C_l = \operatorname{ch} \gamma_l \frac{H}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2} \right); \quad S_l = \operatorname{sh} \gamma_l \frac{H}{2} = i \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2} \right)$$

и учтено, что  $\gamma(\lambda_n) = \gamma_n$ .

Отметим следующие полезные тождества:

$$(-1)^l C_l = -i S_l, \quad (-1)^l S_l = i C_l, \quad \operatorname{sh} \gamma_l H = i (-1)^l. \quad (26)$$

Используя (21), (23) и (26), получим

$$r_{ln} = -\frac{1}{2} \delta_{ln} + \frac{2iC_n C_l [\gamma_n \lambda_l (-1)^n - \gamma_l \lambda_n (-1)^l]}{(\lambda_l^2 - \lambda_n^2) \sqrt{\lambda_n \lambda_l} H} A_{ln}, \quad (27)$$

где

$$A_{ln} = \exp i [(-1)^l \gamma_l \Omega^+(\lambda_l) + (-1)^n \gamma_n \Omega^+(\lambda_n)].$$

Формула (27) обладает свойством  $r_{ln} = r_{nl}$ , которое является следствием теоремы взаимности.

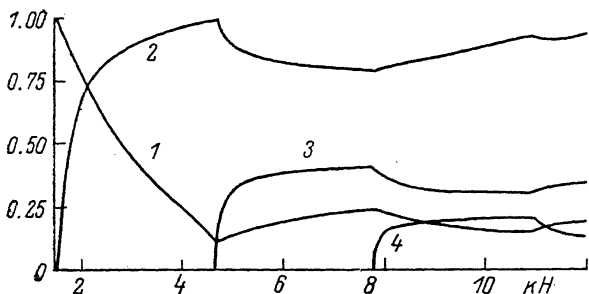


Рис. 2.

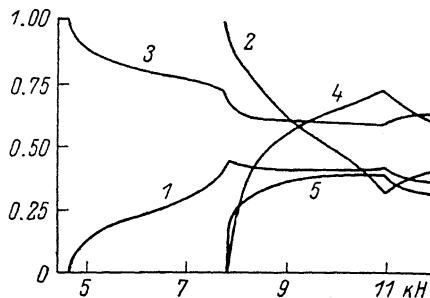


Рис. 3.

При вычислении коэффициента отражения  $r_{nn}$ , раскрывая неопределенность при  $\lambda_l \rightarrow \lambda_n$ , получим выражение

$$r_{nn} = -\frac{1}{2} - \frac{ik^2}{2\lambda_n^2 \gamma_n H} A_{nn}. \quad (28)$$

На основании формул (27) и (28) производилось численное исследование зависимости коэффициентов отражения, прохождения и трансформации от безразмерной частоты  $kH$ . Результаты расчетов приведены на рис. 2, 3. На рис. 2 приведены графики модулей коэффициентов отражения  $|r_{11}|$  (1) и прохождения  $|t_{11}|$  (2) и коэффициентов трансформации  $|r_{21}|$  (3),  $|r_{31}|$  (4). На рис. 3 даны зависимости модулей коэффициентов отражения  $|r_{22}|$  (1),  $|r_{33}|$  (2),  $|t_{22}|$  (3),  $|t_{33}|$  (4), а также модуля коэффициента трансформации  $|r_{32}|$  (5) от  $kH$ .

Отметим, что самостоятельный интерес представляет задача отражения нормальной волны  $\Psi_n(x, y)$  от торца полубесконечного волновода  $x > 0$ ,  $|y| < H$  с кусочно-однородными условиями на торце

$$\begin{aligned} \partial U_1(0, y) / \partial x &= 0, & |y| < H/2, \\ U_1(0, y) &= 0, & H/2 < |y| < H \end{aligned}$$

и условием Дирихле  $U(x, \pm H) = 0$  ( $x > 0$ ) на боковых стенках волновода. Решение этой задачи дается формулами

$$U_1(x, y) = 2U_s(|x|, y) = \Psi_n(x, y) + \sum_{l=1}^{\infty} R_{ln} \Psi_l(-x, y),$$

где  $R_{ln} = \delta_{ln} + 2r_{ln}$ .

На рис. 4 изображены зависимости модулей коэффициентов отражения  $|R_{11}|$  (1),  $|R_{22}|$  (2),  $|R_{33}|$  (3) от безразмерной частоты  $kH$ . Отметим, что  $R_{ln} = 2r_{ln}$  при  $l \neq n$ , и, следовательно,  $|R_{ln}| = 2|r_{ln}|$ . Поэтому графики  $|R_{ln}|$  ( $l \neq n$ ) получаются из соответствующих графиков  $|r_{ln}|$  на рис. 2, 3 с учетом множителя 2.

В заключение отметим, что решение нечетной по переменной задачи для случая, когда на границе волновода выполнено граничное условие Неймана, получается аналогично.

Решение задачи, когда диафрагма заполняет среднюю часть волновода  $x=0, |y| < H/2$ , дается формулами п. 2. если в них заменить матрицу  $Q$  на  $-Q$ .

Задачи о распространении в волноводе с условием Дирихле (Неймана) на стенках волновода нечетной (четной) по  $y$  волны рассмотрены в [9] сведением к скалярной задаче Римана.

Приложение. Для вычисления интеграла в (19) учтем, что

$$\ln \operatorname{tg} \left( \frac{i\gamma H}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = i \int_0^{\gamma H} \frac{d\mu}{\operatorname{ch} \mu}.$$

Используя известное разложение [10]

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \mu} = \frac{2}{i} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\gamma_n H}{\mu^2 - (\gamma_n H)^2},$$

получим

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{i\gamma(\lambda)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{\gamma_n - \gamma(\lambda)}{\gamma_n + \gamma(\lambda)}. \quad (\text{II. 1})$$

Подставим представление (II. 1) для функции  $\omega(\lambda)$  в (19). Меняя порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\Omega_{\pm}^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \Omega_{\pm}^{\pm}(\lambda),$$

где

$$\Omega_{\pm}^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma(\tau)} \ln \left[ \frac{\gamma_n - \gamma(\tau)}{\gamma_n + \gamma(\tau)} \right] \frac{d\tau}{\tau - \lambda \mp i0}.$$

Рассмотрим подробнее вычисление интеграла для  $\Omega_{\pm}^{\pm}(\lambda)$ . Деформируя контур интегрирования в нижнюю полуплоскость переменной  $\lambda$ , получим интеграл по контуру, охватывающий разрез, который исходит из точки  $-\lambda_n = -\sqrt{k^2 + \gamma_n^2}$  и уходит произвольно в бесконечность  $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow -\infty$ . Переходя к интегралу по левому берегу этого разреза ( $\Gamma_-$ ) и учитывая, что

$$\int \frac{d\tau}{\gamma(\tau)(\tau - \lambda)} = \frac{1}{\gamma(\lambda)} \ln \frac{(\gamma(\lambda) + \lambda) - (\gamma(\tau) + \tau)}{(\gamma(\lambda) - \lambda) + (\gamma(\tau) + \tau)} + C,$$

имеем

$$\Omega_{\pm}^{\pm}(\lambda) = \int_{\Gamma_-} \frac{d\tau}{\gamma(\tau)(\tau - \lambda)} = \frac{1}{\gamma(\lambda)} \ln \left[ \frac{1 - \beta_{\pm}^{\pm}(\lambda)}{1 + \beta_{\pm}^{\pm}(\lambda)} \right],$$

где

$$\beta_{\pm}^{\pm} = \frac{\lambda \pm \gamma(\lambda)}{\lambda_n - \gamma_n}.$$

Для вычисления  $G_{\pm}(\lambda)$  по формуле (20) приведем представление  $\exp[i\gamma(\lambda)\Omega^{\pm}(\lambda)]$  в виде бесконечных произведений

$$e^{i\gamma(\lambda)\Omega^{\pm}(\lambda)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + \beta_{\pm n-1}^{\pm}(\lambda)}{1 + \beta_{\pm n-1}^{\pm}(\lambda)} \right) \left( \frac{1 + \beta_{\pm n}^{\pm}(\lambda)}{1 + \beta_{\pm n}^{\pm}(\lambda)} \right).$$

#### Литература

- [1] Чеботарев Г. Н. О решении матричного уравнения  $e^B e^C = e^{B+C}$ . — ДАН СССР, 1954, т. 96, с. 6.
- [2] Храпков А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил. — ПММ, 1971, т. 35, с. 4.



- [3] *Daniele V. G.* On the factorization of Wiener-Hopf matrices in problem solvable with Hurd's method. — IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1978, v. AP-26, p. 4.
- [4] *Hurd R. A., Luneburg E.* Scattering by hard and soft parallel half-planes. — Can. J. Phys., 1981, v. 59, p. 12.
- [5] *Luneburg E.* Diffraction by an infinite set of Soft/hard parallel half-planes: the Riemann approach. — Can. J. Phys., 1982, v. 60, p. 8.
- [6] *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
- [7] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [8] *Лукьянов В. Д.* Точное решение задачи о дифракции на решетке наклонно падающей плоской волны. — ЖТФ, 1981, т. 51, с. 10.
- [9] *Вайнштейн А. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966.
- [10] *Градштейн А. А., Рыжик И. И.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1968.

Поступило в Редакцию  
15 августа 1983 г.

---