К. А. Жевлаков, Замечания о локально нильпотентных кольцах с условиями обрыва,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 2, 121–126

https://www.mathnet.ru/mzm9857

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 2 (1972), 121—126

УДК 519.4

ЗАМЕЧАНИЯ О ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ КОЛЬЦАХ С УСЛОВИЯМИ ОБРЫВА *)

К. А. Жевлаков

Показано, что локально нильпотентное кольцо с условием максимальности для двусторонних идеалов нильпотентно. Снимается ограничение на характеристику в одной из теорем автора, опубликованной ранее. Односторонний ниль-идеал альтернативного кольца, удовлетворяющего условию максимальности для правых идеалов, является нильпотентным кольцом. Построен пример коммутативного локально нильпотентного кольца A с условием минимальности для идеалов, которое идемпотентно: $A = A^2$. Библ. 3 назв.

A — произвольное (без всяких предположений об ассоциативности или коммутативности) Ф-операторное локально нильпотентное кольцо. Напомним, что кольцо R называется нильпотентным (индекса n), если существует такое натуральное число n, что произведение любых n элементов из R при любой расстановке скобок равно нулю, и локально нильпотентным, если нильпотентно каждое его конечнопорожденное подкольцо (разумеется, каждое — своего индекса). В следующих ниже замечаниях обсуждается вопрос, обязано ли A быть нильпотентным, если оно удовлетворяет одному из условий обрыва цепей двусторонних идеалов — условию максимальности или минимальности?

З а м е ч а н и е 1. Если локально нильпотентное кольцо A удовлетворяет условию максимальности для двусторонних идеалов, то A — нильпотентное кольцо.

Через U_x, $x \in A$ обозначается оператор умножения (левого или правого) на элемент x, т. е. либо $aU_x = ax$,

*) Статья была подготовлена к печати автором и поступила в редакцию после его смерти, последовавшей 24 февраля 1972 г.

либо $aU_x = xa$. Через $[a]$ обозначается идеал кольца A, порожденный всевозможными элементами вида aU_x, через A^n — Ф-модуль, порожденный множеством всех произведений из n элементов кольца A со всевозможными расстановками скобок.

1. *Если* $a \neq 0$, *то* $a \notin [a]$.

В самом деле, предположим, что $a \in [a]$. Тогда существуют такие элементы $x_{ij} \in A$, что

$$a = \sum_{i=1}^{m} aU_{x_{i1}}U_{x_{i2}} \ldots U_{x_{ik_i}}, \qquad (1)$$

где $k_i \geqslant 1$ для любого i.

Пусть индекс нильпотентности подкольца, порожденного в A элементами $a, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1k_1}, x_{21}, \ldots, x_{mk_m}$, равен s. Тогда, подставив в каждое $aU_{x_{i1}}, U_{x_{i2}} \ldots U_{x_{ik_i}}$ вместо a s раз его выражение (1), получим, что $a = 0$.

2. *Если существует такое натуральное число* s, *что*

$$A^s = A^{s+1} = \ldots = A^{2s}, \qquad \textit{то } A^s = 0.$$

Предположим противное. Пусть

$$A^s = A^{s+1} = \ldots = A^{2s} \neq 0.$$

Возьмем $0 \neq x \in A^s$ и идеал I кольца A такой, что $x \notin I$. Такой идеал I всегда существует, например, $[x]$. Так как $x \in A^s = A^{2s}$, то существуют такие элементы $0 \neq x_i \in A^s$ и элементы $0 \neq y_i \in A$, что $x = \Sigma x_i U_{y_i}$, а так как $x \notin I$, то, по крайней мере, один элемент $x_i\, U_{y_i}$ — без ограничения общности $x_1 U_{y_i}$ — не принадлежит $I : x_1 U_{y_1} \notin I$, тем более, $x_1 \notin I$. Возьмем сейчас идеал $I_1 = I + [x_1]$, $x_1 \notin I_1$. В самом деле, в противном случае существовали бы такие элементы $y_{ij} \in A$ и такой элемент $q \in I$, что

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} x_1 U_{y_{i1}} U_{y_{i2}} \ldots U_{y_{ik_i}} + q. \qquad (2)$$

Пусть индекс нильпотентности подкольца, порожденного в A элементами $x_1, y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1k_1}, y_{21}, \ldots, y_{mk_m}$, равен t. Тогда, подставив в каждое $x_1 U_{y_{i1}}\, U_{y_{i2}} \ldots U_{y_{ik_i}}$ t раз вместо x_1 его выражение (2), получим, что $x_1 \in I$ вопреки условию.

Итак, имеем $I \subset I_1$ — включение строгое, так как $x_1 U_{y_1} \notin I$, но $x_1 U_{y_1} \in [x_1] \subseteq I_1$. При этом существует такой элемент $x_1 \in A^s = A^{2s}$, что $x_1 \notin I_1$.

Ситауция повторяется. Повторяя для элемента x_1 и идеала I_1 все те рассуждения, которые только что были проведены для элемента x и идеала I, получаем, что существует идеал I_2 кольца A такой, что $I_1 \subset I_2$, и элемент $x_2 \in A^s = A^{2s}$ такой, что $x_2 \notin I_2$.

Получается, следовательно, что в кольце A есть бесконечная строго возрастающая цепочка идеалов $I \subset I_1 \subset \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$ Это противоречит условию максимальности для идеалов кольца A. Стало быть, $A^s = 0$.

Следовательно, цепочка $A \supseteq A^2 \supseteq \ldots \supseteq A^s \supseteq \ldots$ может стабилизироваться только на 0.

3. Рассмотрим фактор-кольцо $\bar{A} = A/A^2$. Так как $\bar{A}$ удовлетворяет условию максимальности для идеалов и каждый Ф-подмодуль в $\bar{A}$ является идеалом, то $\bar{A}$ как Ф-модуль удовлетворяет условию максимальности для подмодулей и, следовательно, имеет конечный базис: $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$. Возьмем в A по прообразу каждого $\bar{b}_i$: $b_1, b_2, \ldots \ldots, b_n$. Эти элементы порождают в A подкольцо B, которое, по условию, нильпотентно: $B^s = 0$. Пусть $A \neq B$. Тогда в A есть непустое множество C таких элементов $\{c\}$, что $c \notin B$, $c \in A^2$. Возьмем теперь произвольный элемент $w \in A^s$, $w = \sum_{i=1}^{t} w_i$, где $w_i = (a_{i1} a_{i2} \ldots a_{is})$ (скобки как-то расставлены) и либо $a_{ik} \in B$, либо $a_{ik} \in C$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Если бы все $a_{ik} \in B$, то $w_i = 0$. Поэтому можно считать, что для каждого i существует такое k, что $a_{ik} \in C$. Но так как в этом случае $a_{ik} \in A^2$, то $w_i \in A^{s+1}$. Значит, $w \in A^{s+1}$. Ввиду произвольности элемента $w \in A^s$ это означает, что $A^s = A^{s+1}$. По этой же причине $A^s = A^{s+1} = \ldots = A^{2s} = \ldots$. Но, как показано в п. 2, в этом случае $A^s = 0$. Таким образом, во всех случаях $A^2 = 0$, т. е. кольцо A нильпотентно. Отсюда и из [2] вытекает следующее

Следствие. *Односторонний ниль-идеал B альтернативного кольца A, удовлетворяющего условию максимальности для правых идеалов, является нильпотентным кольцом.*

В самом деле, такой результат доказан в [2] (теорема 1) при следующем ограничении: предполагается что в аддитивной группе кольца A нет элементов порядка 2 и 3.

Доказательство распадается на две части (соответственно — леммы 1 и 2 в [2].) Вторая часть (лемма 2):

Пусть C — двусторонний идеал альтернативного кольца A, удовлетворяющего условию максимальности для двусторонних идеалов, содержащихся в C, и C^2 нильпотентен. Тогда C нильпотентен.

Доказательство этого утверждения, приведенное в [2], как легко убедиться, не требует никаких ограничений на аддитивную группу кольца.

Первая же часть доказательства состоит в следующем (лемма 1):

Пусть B — односторонний ниль-идеал альтернативного кольца A, удовлетворяющего условию максимальности для правых идеалов; тогда B содержится в разрешимом радикале $N(A)$ кольца A.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, как это и сделано в лемме 1 в [2], что фактор-кольцо $\bar{A} = A/N(A)$ аппроксимируется кольцами Кэли — Диксона и первичными ассоциативными кольцами. Но $\bar{A}$, как кольцо без тривиальных идеалов, аппроксимируется первичными альтернативными кольцами A_α. Каждое A_α является либо кольцом Кэли — Диксона либо первичным ассоциативным кольцом, либо (есть еще такая гипотетическая возможность) некоторым исключительным, локально нильпотентным кольцом [3]. Однако легко заметить, что эта последняя возможность не может быть реализована: A_α как локально нильпотентное кольцо с условием максимальности для идеалов по замечанию 1 обязано быть нильпотентным и, следовательно, не может быть первичным. Поэтому доказательство леммы 1 в [2] тоже проходит без всяких ограничений на аддитивную группу кольца A.

Это и доказывает справедливость следствия.

Примечание. Для справедливости замечания 1 очень существенно, что в определении нильпотентности на произведении из n элементов скобки должны быть расставлены всеми возможными способами — это показывает построенный в [1] пример простой локально право-нильпотентной алгебры. Напомним, что кольцо R называется право-нильпотентным, если существует такое число n, что для любых элементов

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in R \; \{[(x_1, x_2)\, x_3]\, x_4 \ldots\}\, x_n = 0.$$

Замечание 2. Существуют коммутативные локально нильпотентные алгебры, которые удовлетворяют условию минимальности для идеалов, но идемпотентны.

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное поле и A — бесконечномерное пространство над $\mathcal{F}$ с базисом $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. Обозначим 0 через e_0 и зададим в A умножение, определив его на $\mathcal{E}$ следующим образом:

$$e_i e_j = e_{\min\{i, j\}-1}.$$

Очевидно, что A — коммутативная алгебра и что A — локально нильпотентна, так как любое конечное подмножество из $\mathcal{E}$ $\{e_1, \ldots, e_n\}$ порождает нильпотентную (индекса n) подалгебру в A, а любая конечнопорожденная подалгебра содержится в подалгебре такого типа.

Пусть теперь I — идеал A и $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in I$, где $\alpha_i \in \mathcal{F}$, $\alpha_n \neq 0$. Докажем, что тогда $e_i \in I$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

В самом деле, $aU_{e_{n-1}}^{n-1} \in I$, но $aU_{e_{n+1}}^{n-1} = \alpha_n e_1$, поэтому $e_1 \in I$. Пусть уже доказано, что $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1} \in I$. Возьмем тогда $aU_{e_{n+1}}^{n-k}$. Этот элемент принадлежит I и, в то же время,

$$a\, U_{e_{n+1}}^{n-k} = \alpha_n e_k + \alpha_{n-1} e_{k-1} + \ldots + \alpha_{n-k+1} e_1.$$

А отсюда следует, что $e_k \in I$.

Из только что доказанного вытекает, что любой собственный идеал алегбры A совпадает с конечномерным подпространством, натянутым на $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ для некоторого n. Но в этом случае A очевидным образом удовлетворяет условию минимальности для идеалов.

Таким образом, коммутативная алгебра A локально нильпотентна и удовлетворяет условию минимальности для идеалов. Однако A — идемпотентная алгебра: $A = A^2$, так как для любого i e_i равняется, например, e_{i+1}^2.

Примечание. Доказанные в этой работе утверждения — замечания 1 и 2 — естественным образом могут быть переформулированы и перенесены на Ω-группы.

Институт математики
Сибирское отделение АН СССР

Поступило
30.III.1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж е в л а к о в К. А., Замечания о простых альтернативных кольцах, Алгебра и логика, **6**, № 2 (1967), 21—33.

[2] Ж е в л а к о в К. А., Ниль-идеалы альтернативного кольца, удовлетворяющего условию максимальности, Алгебра и логика, **6**, № 4 (1967), 19—26.

[3] S l a t e r M., Prime alternative rings II, J. Algebra, **15**, N 2 (1970) 244—251