Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Н. Гайфутдинов, Вариационные свойства обратных краевых задач фильтрации в земляных плотинах,
Тр. сем. по краев. задачам, 1990, выпуск 25, 94–103

https://www.mathnet.ru/kukz36

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.174
11 июля 2025 г., 09:23:47

В таблице 3 с точностью до 0,01 приведены решения неравенства $\cos q - A(q, n) \geq 0$.

Таблица 3

n	3	4	5	6
q^*	0,94	1,08	1,16	1,22

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.П. Достаточные признаки однолистности отображений односвязных областей и их приложения. - Автореф. дис. ...канд. физ.-мат.наук. - Ростов-на-Дону, 1982. - 11 с.

2. Тихонов А.П. Достаточные условия однолистности отображения внешности единичного круга. - Изв. вузов. Матем., 1985 (рукопись деп. в ВИНИТИ 30 мая 1985, № 3776-85 Деп.)

Доложено на семинаре 30 марта 1987 года.

УДК 532.546

Гайфутдинов А.Н.

ВАРИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ЗЕМЛЯНЫХ ПЛОТИНАХ

В настоящей работе устанавливаются вариационные теоремы для обратных краевых задач фильтрации в земляных плотинах, когда формы низового откоса с участком высачивания и депрессионной кривой находятся по заданному на искомом откосе закону проницания жидкости [1, 2]. В этих теоремах исследуется характер изменения решения (формы низового откоса, депрессионной кривой, напора, скорости фильтрации) при определенных изменениях формы заданных участков границы, граничных условий. Доказанные ниже теоремы могут быть использованы как при теоретическом исследовании задач, так и для получения численных оценок

искомых параметров на основе известных решений. Можно отметить, что из доказательства теорем следует единственность решения таких задач, к которым теоремы относятся. Методы исследования настоящей работы близки к разработанным в [3].

I. Постановка задачи. Рассматривается плоская установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости через земляную плотину на проницаемом основании, которое подстилается снизу водоупором. Считается, что грунт изотропный и фильтрация подчиняется закону Дарси. Тогда функция напора $h(x,y)$ в области течения Ω удовлетворяет уравнению $div(æ\, grad\, h) = 0$, где коэффициент фильтрации $æ(x,y)$ непрерывно дифференцируемая функция в Ω, кроме некоторых линий, являющихся дугами Ляпунова, на которых $æ$ может иметь разрыв, причем $0 < a \leq æ \leq b < \infty$ в Ω (a и b - постоянные). На линиях разрыва $æ$, делящих Ω на подобласти, выполняется условие

$$æ^{+}\frac{\partial h^{+}}{\partial n^{+}} = -æ^{-}\frac{\partial h^{-}}{\partial n^{-}} \quad . \qquad (I)$$

Здесь знаки $^{+}$ и $^{-}$ относятся к подобластям по разные стороны от линии разрыва, n - внутренняя нормаль.

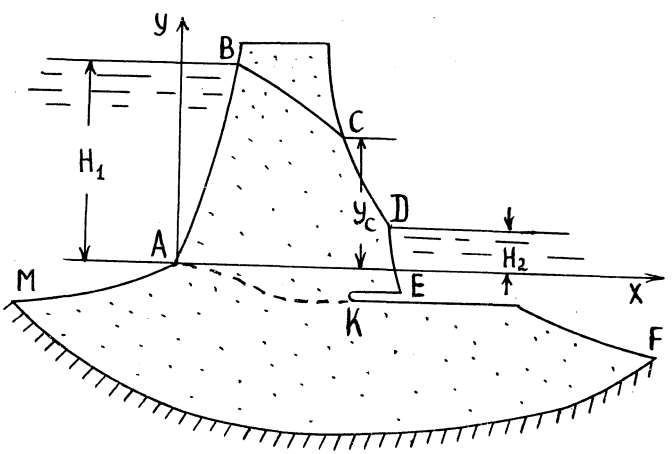

Рис.I

Схема области фильтрации изображена на рис.I. Известны формы линий MAB, MF, FKA, коэффициент фильтрации $\varkappa(x,y)$, уровни воды в бьефах H_1 и H_2, высота участка высачивания y_c, полный фильтрационный расход Q. Плотина может иметь горизонтальный дренаж KE под низовым откосом. Требуется определить форму низового откоса CDE с участком высачивания CD, положение точки K (конца дренажа) и найти депрессионную кривую BC по заданному на CDE распределению функции тока $\psi=f(y)$ $(y_E \leq y \leq y_C)$. Здесь $f(y)$ некоторая монотонно возрастающая функция, имеющая первую производную на интервалах $y_E < y < y_D$, $y_D < y < y_C$. При этом $f(y)$ предполагается такой, что линии CD, DE являются дугами Ляпунова. Если обозначить через L_H и L_h соответственно проницаемые участки MAB и EKF, а через L_N – водоупор MF, то условия на границе Ω можно записать в виде: $h=H_1$ на L_H; $h=y$, $\psi=0$ на BC; $h=y$, $\psi=f(y)(H_2 \leq y \leq y_C)$ на CD; $h=H_2$, $\psi=f(y)$ $(y_E \leq y \leq H_2)$ на DE; $h=H_2$ на L_h; $\psi=-Q$ на L_N.

Считается, что заданная часть границы (участки L_H, L_N, L_h) состоит из конечного числа дуг Ляпунова. Область Ω может быть неограниченной. Наконец, последнее общее ограничение заключается в требовании $\rho=h-y>0$ в Ω. Некоторые достаточные условия для выполнения этого требования приведены в [3].

2. <u>Вариационные теоремы</u>. Эти теоремы предполагают сравнение решений двух отличающихся чем-то задач. Обе задачи – исходная и измененная – должны удовлетворять всем перечисленным в постановке задачи условиям. Используемое в теоремах понятие вдавливания означает, что точки измененного участка лежат внутри исходной области течения.

Обозначения, соответствующие исходному решению, будем помечать одной, а измененному – двумя звездочками.

<u>Теорема I</u>. При вдавливании участка L_H, замене части участка L_N участком L_H, а также при увеличении H_1 депрессионная кривая поднимается, низовой откос выдавливается, дренаж смещается вправо. Значения h увеличиваются в Ω^*, на L_N, значения скорости уменьшаются на неизменной части L_H (кроме случая увеличения H_1) и увеличиваются на неизменной части L_h.

<u>Теорема 2</u>. При вдавливании участка L_h, а также при замене части участка L_N участком L_h депрессионная кривая поднимается, низовой откос выдавливается, дренаж смещается вправо. Значения h уменьшаются на L_N^{**}, значения ψ увеличиваются на L_H,

значения скорости увеличиваются вблизи точки M на L_H, L_N и уменьшаются вблизи точки B на L_H.

Теорема 3. При вдавливании водоупора L_N депрессионная кривая опускается, низовой откос вдавливается, дренаж смещается влево. Значения ψ уменьшаются на L_H и неизменной части L_h, имеющей общий конец с L_N. Значения h на L_N увеличиваются со стороны L_H от измененного участка и уменьшаются со стороны L_h, значения скорости уменьшаются вблизи L_N на L_H и L_h, увеличиваются вблизи точки B на L_H.

Теорема 4. При увеличении Q депрессионная кривая опускается, низовой откос вдавливается, дренаж смещается влево. Значения h уменьшаются в Ω^{**}, на L_N, значения скорости увеличиваются на L_H и уменьшаются на неизменной части L_h. Увеличивается расход через всякую связную часть L_H.

Теорема 5. Пусть эпюра $f(y)$ увеличивается так, что $f^{**}(y) > f^{*}(y)$ при $y' < y < y''$ и $f^{**}(y) = f^{*}(y)$ при $y_E \le y \le y'$ и $y'' \le y \le y_C$, где y' и y'' – некоторые значения ($y_E \le y' < y'' \le y_C$). При таком изменении депрессионная кривая поднимается, низовой откос выдавливается на участке $y'' < y < y_C$ и вдавливается на участке $y_E < y \le y'$, дренаж смещается влево. Значения h уменьшаются на L_N, значения ψ увеличиваются на L_H. Значения скорости уменьшаются на неизменной части L_h, имеющей общий конец с L_N и вблизи точки B на L_H, увеличиваются вблизи точки M на L_H и L_N.

Теорема 6. Пусть уменьшается высота участка высачивания, то есть $H_2 \le y_C^{**} < y_C^{*}$, причем $f^{**}(y) > f^{*}(y)$ при $y' < y \le y_C^{**}$ и $f^{**}(y) = f^{*}(y)$ при $y_E \le y \le y'$, где $y_E \le y' < y_C^{**}$. При таком изменении депрессионная кривая поднимается, низовой откос вдавливается на участке $y_E < y \le y'$, дренаж смещается влево. Значения h уменьшаются на L_N, значения ψ увеличиваются на L_H. Значения скорости уменьшаются на неизменной части L_h, имеющий общий конец с L_N и вблизи точки B на L_H, увеличиваются вблизи точки M на L_H и L_N.

Доказательство теорем. Теоремы доказываются исследованием разностей $h_0 = h^{**} - h^{*}$ и $\psi_0 = \psi^{**} - \psi^{*}$ в пересечении Ω_0 областей Ω^{**} и Ω^{*}. Во всех теоремах функции h_0 и ψ_0 удовлетворяют тем же уравнениям, что h и ψ, а также условию (I) на линиях разрыва $\varkappa$ и таким же образом соответствуют

друг другу. Обозначим через L искомую часть границы области течения (без дренажа). При доказательстве сначала предполагается возможность различных пересечений L^* и L^{**}. Заметим, что у несовпадающих тождественно решений линии L^* и L^{**} не могут иметь общих участков, за исключением участков изменения эпюры $f(y)$ (иначе на них было бы $h_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, что возможно лишь при $h_0 \equiv 0$, $\psi_0 \equiv 0$ в Ω_0). В дальнейшем принято обозначение Γ^- для совокупности участков границы Ω_0, совпадающих с L^{**}, и обозначение Γ^+ – для совпадающих с L^*. Из условий $p > 0$ и $h > H_2$ в Ω следует, что $h_0 > 0$ на Γ^+, $h_0 < 0$ на Γ^-. При неизменной эпюре $f(y)$ имеем $h_0 = 0$, $\psi_0 = 0$ в точках стыка Γ^+ и Γ^-.

На границе $\partial\Omega_0$ области Ω_0 должны иметь место следующие условия: $h_0 = 0$ на неизменных участках L_H и L_h ($h_0 = H_1^{**} - H_1^* > 0$ на всем участке L_H в теореме I при увеличении H_1), $\psi_0 = -Q_0 = const$ на неизменной части L_N (в частности, $\psi_0 = 0$ при $Q^* = Q^{**}$), $h_0 > 0$ на Γ^+, $h_0 < 0$ на Γ^-.

Доказательство теорем проводится по единой методике, опирающейся на следующее свойство.

<u>Лемма</u>. Пусть имеется некоторая область Ω^+, в которой $h_0 > 0$. Тогда при положительном обходе по участку ее границы с условием $h_0 = 0$ (то есть при движении по участку границы в направлении, когда область остается слева) значения ψ_0 строго монотонно возрастают. При положительном обходе области Ω^-, в которой $h_0 < 0$, по такому же участку значения ψ_0 строго монотонно убывают. При отрицательном обходе изменение ψ_0 становится обратным.

Такого рода свойство было использовано в [3]. Доказательство леммы можно провести на основе геометрических соображений, используя свойства обобщенно-аналитической функции $w_0 = -h_0 + i\psi_0$ [4].

Рассмотрим доказательство теоремы I. На основе свойств функции h [3] при указанных в условии теоремы изменениях на измененных участках имеем $h_0 > 0$. Предположим, что существует некоторый участок Γ^-. В силу непрерывности h_0 он является граничным участком некоторой области Ω^-, в которой $h_0 < 0$ ($\Omega^- \subset \Omega_0$). При положительном обходе $\partial\Omega^-$ за Γ^- обязательно должен следовать участок с условием $h_0 = 0$. По лемме при положительном обходе Ω^- по участку с условием $h_0 = 0$ значения ψ_0 монотонно убывают, а поскольку в начале этого участка всегда $\psi_0 = 0$, то на другом его конце должно быть $\psi_0 < 0$. Исходя из граничных условий на $\partial\Omega_0$,

заключаем, что такой обход можно осуществить лишь в случае, когда дренаж смещается влево, то есть на L_h имеется участок с условием $h_0 < 0$, который принадлежит $\partial\Omega^-$. Тогда, используя лемму, можно показать, что в остальной части области Ω_0 и границы $\partial\Omega_0$ точек с условием $h_0 < 0$ быть не может. Это означает, что часть L_h, соединяющая L_N и границу области Ω^- (с условием $h_0 = 0$), полностью принадлежит границе области, где $h_0 > 0$. Так как на этой части L_h имеет место $h_0 = 0$, то по лемме значения ψ_0 на L_h при движении от L_N должны расти. На L_N имеем $\psi_0 = 0$, поэтому на другом конце этого участка должно выполняться условие $\psi_0 > 0$. Однако там при обходе области Ω^- уже имели $\psi_0 < 0$. Итак, пришли к противоречию. Так как участки с условием $h_0 > 0$ обязательно существуют, это означает, что наше предположение о существовании участка Γ^- неверно. После этого аналогичными рассуждениями можно показать, что только смещение дренажа влево также невозможно.

Из принципа максимума для эллиптических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами [5] следует, что минимум функции h_0 в $\bar{\Omega}_0$ может достигаться только на $\partial\Omega_0$. В тех точках участка L_N, где определена нормальная производная, имеем $\frac{\partial h_0}{\partial n} = 0$, поэтому в этих точках по принципу Заремба-Жиро [6] минимум h_0 невозможен. Предположим, что в некоторой отдельной точке s_0, принадлежащей L_N, значение h_0 минимально и равно $h_{0\,min}$. Очевидно, найдется такое значение h_0', что граница области Ω_0', где $h_{0\,min} < h_0 < h_0'$, кроме точек участка L_N (с точкой s_0) состоит лишь из линий, на которых $h_0 = h_0'$. Нетрудно убедиться, что при положительном обходе области Ω_0' по участку границы с условием $h_0 = h_0'$ значения ψ_0 строго монотонно убывают (см. лемму). Однако, так как в начале и конце этого участка $\psi_0 = 0$, обхода области Ω_0' осуществить нельзя. Таким образом, область Ω_0' не может существовать и минимум h_0 в точке s_0 не может иметь места. На остальных участках границы Ω_0 имеем $h_0 \geq 0$, откуда следует $h_0 > 0$ в $\Omega_0 \equiv \Omega^*$ и на L_N.

Рассмотрим положительный обход области Ω_0. Так как в начале участка L_h имеем $\psi_0 = 0$, а в конце – $\psi_0 \leq 0$, этот обход можно осуществить лишь в том случае, когда на L_h имеются точки с условием $h_0 > 0$. Это означает, что дренаж обязательно сместится вправо. Покажем, что не может быть и точек касания L^* и L^{**} внутри участков BC, CD, DE. Если бы точка касания была, то в ней имел

бы место минимум h_0, откуда при сделанных относительно искомой границы предположениях $\frac{\partial h_0}{\partial n} > 0$ в точке касания. Однако, когда точка касания находится на участке BC, там имеем $\frac{\partial h_0}{\partial n} = \frac{\partial h^{**}}{\partial n} - \frac{\partial h^{*}}{\partial n} = 0$. Если же эта точка находится на участках CD, DE имеем

$$\frac{\partial h_0}{\partial n} = \frac{1}{æ}\frac{\partial \psi_0}{\partial s} = \frac{1}{æ}\frac{dy}{ds}\left(f^{**\prime} - f^{*\prime}\right) = 0,$$ так как $\frac{dy}{ds} < \infty$, а $f^{**} = f^{*}$. Значит, указанных точек касания быть не может.

Разность величин скоростей на неизменных частях потенциальных линий можно записать в виде $v_0 = v^{**} - v^{*} = -æ\frac{\partial h_0}{\partial N}$, где N – нормаль к данной потенциальной линии по направлению течения. Учитывая, что на L_H направление N совпадает с направлением n, на L_h направления N и n противоположны и $\frac{\partial h_0}{\partial n} > 0$ на этих линиях (кроме случая увеличения H_1, когда неравенство не выполняется на L_H), справедливо утверждение о изменении величин скоростей.

Теорема I доказана.

Теоремы 2–4 доказываются аналогично теореме I с учетом следующего: в теореме 2 на измененных частях участков L_h, L_N выполняется условие $h_0 < 0$; в теореме 3 имеем $\psi_0 < 0$ на вдавленном участке L_N; в теореме 4 на всем участке L_N имеет место условие $\psi_0 = Q^{*} - Q^{**} < 0$.

В условиях теорем 5 – 6, в отличие от рассмотренных выше, в точках пересечения L^{*} с L^{**} должно иметь место условие $\psi_0 > 0$, $h_0 = 0$, если эти точки лежат на участке изменения эпюры $f(y)$.

Докажем теорему 5. Предположим, что на участке границы Ω_0, соответствующем L при $y > y''$, найдутся точки, где $h_0 < 0$. Граница соответствующей области Ω^{-}, в которой $h_0 < 0$, должна, ввиду равенства $h_0 = 0$ на L_H, содержать участок, на котором $h_0 = 0$, начинающейся на L при $y > y''$. Так как в его начале $\psi_0 = 0$, то в его конце по лемме должно быть $\psi_0 < 0$ при $h_0 = 0$. Этот участок может окончиться лишь на той части L_h, которая имеет общий конец с L_N (когда дренаж смещается влево). При этом указанный участок отделяет от Ω_0 некоторую область Ω_0', примыкающую к L_N. Используя принципы максимума и Заремба–Жиро, нетрудно убедиться, что $h_0 > 0$ в Ω_0'. Тогда при обходе Ω_0' по участку L_h значения ψ_0 должны расти, то есть в точке L_h, которая является

общей для границ областей Ω^- и Ω_0', должно выполняться условие $\psi_0 > 0$. Однако там при обходе области Ω^- имели $\psi_0 < 0$. Итак, пришли к противоречию и наше предположение о существовании участков Γ^- при $y > y''$ неверно. После этого аналогичными рассуждениями доказывается, что не существуют участки Γ^+ при $y < y'$, и дренаж смещается влево.

Остальные утверждения теоремы получаются так же, как в предыдущих теоремах.

При доказательстве теоремы 6 надо учесть, что на участке $y_c^{**} \leq y \leq y_c^{*}$ могут быть пересечения депрессионной кривой измененного решения с низовым откосом исходного решения. В этих точках пересечения имеем условия $h_0 = 0$ и $\psi_0 \geq 0$, что позволяет доказать теорему 6 теми же методами, что и теорему 5.

3. Примеры применения теорем. Кроме непосредственного применения при исследовании обратных краевых задач, доказанные теоремы могут послужить основой для получения оценок искомого решения. Пусть, например, решается задача для однородной плотины, расположенной на горизонтальном водоупоре, причем верхний откос AB криволинейный (рис.2). Тогда, пользуясь теоремой I, можно получить оценку сверху

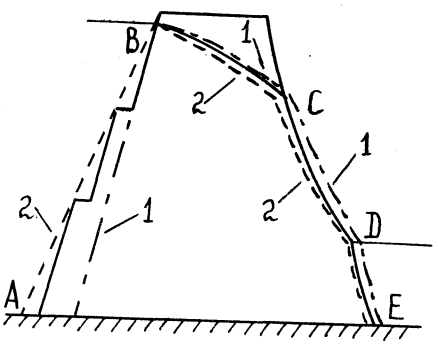

Рис.2

для депрессионной кривой и справа для низового откоса, если вдавить откос AB до некоторой прямой (I на рис.2), оценку снизу для депрессионной кривой и слева для низового откоса, если выдавить AB тоже до некоторой прямой (2 на рис.2). Решение задачи с прямолинейным верхним откосом известно [I], поэтому такие оценки получаются сравнительно просто.

В качестве второго примера рассмотрим решение задачи, когда проницаемое основание подстилается криволинейным водоупором (рис.3).

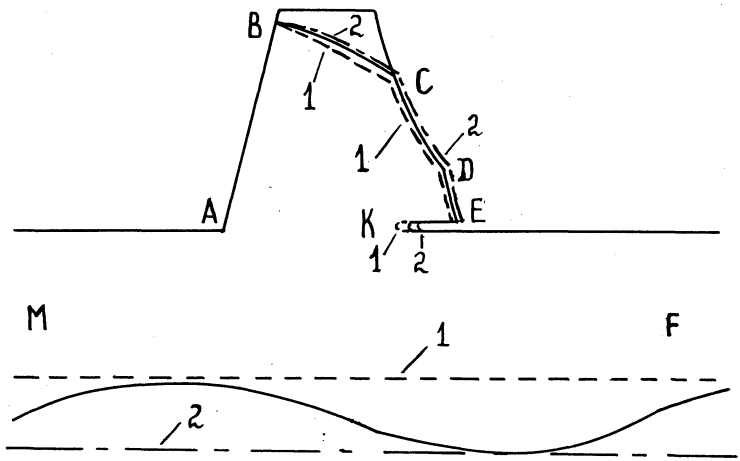

Рис.3

Тогда можно определить минимальные размеры плотины и найти оценку снизу для депрессионной кривой, если вдавить криволинейный водоупор до горизонтального (I на рис.3). Если же выдавить водоупор до горизонтального, то определятся максимальные размеры плотины и оценка сверху для депрессионной кривой (2 на рис.3). Решение задачи с горизонтальным водоупором на некоторой глубине T в случае однородного грунта также известно [2], поэтому указанные оценки получаются просто.

Возможны и другие применения теорем.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ильинский Н.Б., Якимов Н.Д. Обратная задача фильтрации в земляной плотине. - В кн.: Труды семинара по краевым задачам. Казань, 1973, вып.9, с.103 - 111.

2. Якимов Н.Д. Обратные смешанные краевые задачи фильтрации в земляных плотинах. - В кн.: Краевые задачи теории фильтрации. Киев, 1973, с.99 - 109.

3. Якимов Н.Д. Вариационные теоремы для задач с кривыми депрессии. - В кн.: Труды семинара по краевым задачам. Казань, 1976, вып.13, с.258 - 275.

4. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959. - 628 с.

5. Олейник О.А. Решение основных краевых задач для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. - ДАН СССР, 1959, 124, № 6, с.1219 - 1222.

6. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. О принципе максимума для эллиптико-параболического уравнения 2-го порядка. - Сибир. матем. журнал, 1972, т.13, № 4, с.773 - 789.

Доложено на семинаре 30 января 1987 года.

УДК 532.5 + 621.9.047

Гарфанов Р.Ф., Насибулин В.Г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПРИ ЭХО КАТОДОМ СО ЩЕЛЬЮ

В настоящей статье определяется поле скоростей в плоском межэлектродном промежутке (МЭП) при стационарной электрохимической размерной обработке (ЭХО) детали инструментом, имеющем щель для подачи электролита. Знание поля скоростей необходимо для расчета касательных напряжений на стенках, определения точек отрыва, зон кавитации и т.п.

Основная трудность при решении данной задачи состоит в том, что форма МЭП заранее не известна и ее нужно определить в ходе решения. В первом приближении можно считать, что гидродинамические процессы не оказывают значительного влияния на съем металла при ЭХО. В этом случае решение исходной задачи можно свести к последовательному решению двух задач: а) решая уравнения электростатики, определить форму МЭП; б) считая жидкость идеальной и несжимаемой, рассчитать поле скоростей в полученном криволинейном канале. Найденное поле скоростей можно затем использовать при решении задачи о движении вязкой жидкости в приближении пограничного слоя.

Определение МЭП. Прежде всего перейдем к безразмерным перемен-