

МНОГООБРАЗИЯ НАД ПЛЮРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ И ПОЛУКАСАТЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ

В. В. Вишнеvский

Отличительной особенностью касательных расслоений, этого наиболее известного класса расслоенных пространств, являются существующие в них интегрируемые аффинорные структуры, определяющие в этих расслоениях в каждом случае представление некоторой алгебры плюральнх чисел ([27], [8]). С алгебраической точки зрения это представление относится к классу кратных регуляpному. За счет голоморфного продолжения функций в плюральную область удалось дать весьма прозрачную трактовку теории лифтов объектов в касательное расслоение ([27]). Возникает естественный интерес установить, возможны ли обобщения касательных расслоений, в которых аффинорная структура имела бы алгебраическое строение самого общего вида, и можно ли определить в них лифты и рассмотреть другие задачи, аналогичные уже решенным в касательных расслоениях? Известно, что аффинорные структуры такого «неправильного» алгебраического строения уже изучались в работах ([8], [9], [11], [12], [13], [14]), и за счет сужения действующей в этих многообразиях группы оказалось возможным получить указанные обобщения. Систематическое построение этой теории вместе с изложением новейших результатов, полученных в этой области, и является предметом рассмотрения настоящей обзорной статьи.

§ 1. ПЛЮРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ФУНКЦИИ

Алгеброй плюральнх чисел порядка $m+1$ над полем действительных чисел \mathbf{R} называется множество

$$\mathbf{R}(\varepsilon^m) = \{a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_m\varepsilon^m \mid a_0, \dots, a_m \in \mathbf{R}, \varepsilon^{m+1} = 0\}.$$

При $m=1$ имеем алгебру дуальных, а при $m=2$ — триальных чисел. Она ассоциативна, коммутативна, унитарна (имеет главную единицу $\delta=1$) и относится к классу фробениусовых ([35]). Последнее свойство оказывается особенно существенным при изучении модулей и дифференцируемых многообразий

$$\frac{\partial f^1}{\partial x^0} = \dots = \frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^{m-2}} = \frac{\partial f^m}{\partial x^{m-1}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^0} = \frac{\partial f^m}{\partial x^1},$$

причем

$$F' = \frac{dF}{dX} = \frac{\partial f^0}{\partial x^0} + \varepsilon \frac{\partial f^1}{\partial x^0} + \varepsilon^2 \frac{\partial f^2}{\partial x^0} + \dots + \varepsilon^m \frac{\partial f^m}{\partial x^0}. \quad (1.5)$$

К уравнениям (1.4) можно придти также из следующих соображений. Рассмотрим регулярное представление алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$, которое ([35], [23]) осуществляется матрицами:

$$a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots + \varepsilon^m a_m \cong \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & \vdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Для того, чтобы функция (1.2) была голоморфной, как это следует из работ Шеффера ([112]) и А. П. Широкова ([74]), необходимо и достаточно, чтобы якобиева матрица системы функций f^j коммутировала с матрицами регулярного представления (1.6), т. е. сама имела бы вид (1.6), что равносильно системе (1.4).

Система (1.4) может быть проинтегрирована для определения вида функций f^j , входящих в (1.2), но вследствие громоздкости этого процесса для произвольного m рассмотрим вначале частный случай голоморфной функции (1.2), требуя, чтобы $F(X)|_{X=x^0} = f(x^0)$, где f — достаточно гладкая функция от x^0 . Тогда из (1.4) функции f^j могут быть получены в следующем виде ([23], стр. 98): построим вещественную функцию

$$F(t) = f(x^0 + tx^1 + t^2x^2 + \dots + t^mx^m),$$

тогда

$$f^p = \frac{1}{p!} \frac{d^{(p)}F(t)}{dt^p} \Big|_{t=0} \quad (1.7)$$

при $p=0, 1, \dots, m$ определяют голоморфную функцию (1.2), удовлетворяющую тому условию, что при $X=x^0$ имеем $F(X) = f(x^0)$. Ее называют естественным продолжением вещественной функции $f(x^0)$ в область $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$. Что касается строения общей голоморфной функции, то оно таково ([23], [1], [2]):

$$F(X) = f(X) + \varepsilon g^1(X) + \varepsilon^2 g^2(X) + \dots + \varepsilon^m g^m(X), \quad (1.8)$$

где $f(X), g^1(X), \dots, g^m(X)$ — естественные продолжения некоторых гладких вещественных функций f, g^1, \dots, g^m в алгебру $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$.

В качестве примеров рассмотрим строение голоморфной функции для случая алгебр $\mathbf{R}(\varepsilon)$ и $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$. Интегрируя (1.4)

при $m=1$, имеем $F(x^0 + \varepsilon x^1) = f(x^0) + \varepsilon \left[\frac{df}{dx^0} x^1 + \varphi(x^0) \right]$; при $\varphi(x^0) \equiv 0$ получаем естественное продолжение вещественной функции $f(x^0)$ в алгебру $R(\varepsilon)$. Аналогичным путем для $R(\varepsilon^2)$ находим $F(x^0 + \varepsilon x^1 + \varepsilon^2 x^2) = f(x^0) + \varepsilon \left[\frac{df}{dx^0} x^1 + \varphi(x^0) \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{(dx^0)^2} (x^1)^2 + \frac{df}{dx^0} x^2 + \frac{d\varphi}{dx^0} x^1 + \psi(x^0) \right]$, а естественное продолжение $f(x^0)$ в область $R(\varepsilon^2)$ возникает, если при интегрировании (1.4) положить $\varphi(x^0) \equiv \psi(x^0) \equiv 0$. С помощью аналогичных приемов легко получают естественные продолжения вещественных функций нескольких переменных.

Рассмотрим подмножества элементов из $R(\varepsilon^m)$:

$$R(\varepsilon^{h,m}) = \{b_1 \varepsilon^h + b_2 \varepsilon^{h+1} + \dots + b_{m-h+1} \varepsilon^m \mid b_a \in R, \varepsilon^{m+1} = 0\} \quad (1.9)$$

для $h=0, 1, \dots, m$. Очевидно, что $R(\varepsilon^{0,m}) = R(\varepsilon^m)$, а $R(\varepsilon^{1,m})$ является максимальным по размерности из числа нильпотентных идеалов (1.9) и служит радикалом в $R(\varepsilon^m)$. Т. к. имеет место фильтрация $R(\varepsilon^{m,m}) \subset R(\varepsilon^{m-1,m}) \subset \dots \subset R(\varepsilon^{1,m})$, то идеалы (1.9) мы будем называть подрадикалами алгебры $R(\varepsilon^m)$. Отметим, что все идеалы (1.9) — главные ([23]), т. е. порождены каждым произведением одного элемента $\varepsilon^h \in R(\varepsilon^m)$ на величины из этой алгебры. Легко видеть также, что $R(\varepsilon^{h,m})$ служит аннулятором для $R(\varepsilon^{m-h+1,m})$, и наоборот,

Пусть теперь функция (1.2) голоморфна по переменной из $R(\varepsilon^{h,m})$

$$X = x^1 \varepsilon^h + x^2 \varepsilon^{h+1} + \dots + x^{m-h+1} \varepsilon^m, \quad (1.10)$$

тогда из (1.3) следует, что $df^0 = \dots = df^{h-1} = 0$, а производная dF/dX определяется с точностью до произвольного слагаемого из $R(\varepsilon^{m-h+1,m})$:

$$\frac{dF}{dX} = \frac{\partial f^h}{\partial x^1} + \varepsilon \frac{\partial f^{h+1}}{\partial x^1} + \dots + \varepsilon^{m-h} \frac{\partial f^m}{\partial x^1} + C \varepsilon^{m-h+1}, \quad (1.11)$$

где C — константа из $R(\varepsilon^m)$. Производная (1.11) уже не допускает дифференцирование по (1.10), и чтобы повторное дифференцирование было возможно, умножим обе части (1.11) на ε^h . Будем иметь

$$F_X = \varepsilon^h \frac{dF}{dX} = \varepsilon^h \frac{\partial f^h}{\partial x^1} + \varepsilon^{h+1} \frac{\partial f^{h+1}}{\partial x^1} + \dots + \varepsilon^m \frac{\partial f^m}{\partial x^1}. \quad (1.12)$$

Величину F_X будем называть голоморфной производной F по переменной (1.10). Вместо (1.3) теперь будем иметь

$$dF = \frac{F_X}{\varepsilon^h} dX. \quad (1.13)$$

Условия голоморфности (1.4) в этом случае изменяются существенно, и мы их не приводим. Общий вид голоморфной функции переменной (1.10) также может быть получен из (1.8) с учетом того, что коэффициенты f, g^1, \dots, g^{h-1} в (1.8) не зависят от X .

Подобно тому, как определена голоморфная функция одного плурального переменного (1.1) или (1.10), вводится понятие голоморфной функции нескольких переменных из $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$ (см. [23]), которые могут, в частности, принадлежать и подрадикалам. Мы укажем теперь удобную модель системы таких функций.

Зададимся линейным оператором (аффинором) вейерштрассовой характеристики ([79])

$$[(\underbrace{m_1+1, \dots, m_1+1}_{l_1}, \underbrace{m_2+1, \dots, m_2+1}_{l_2}, \dots, \dots, \underbrace{m_\alpha+1, \dots, m_\alpha+1}_{l_\alpha})], \quad (1.14)$$

где $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_\alpha = m$, а числа, заключенные в круглые скобки, означают размерности жордановых клеток с общим собственным значением в каноническом виде матрицы аффинора. Предполагая без ограничения общности рассуждений, что собственное значение аффинора равно нулю, получим, что простейший вид матрицы аффинора, отличающийся от жорданова лишь нумерацией координат, будет следующим:

$$(\gamma) = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & & \\ E_{l_1} & \ddots & \\ & \ddots & E_{l_1} 0 \end{array}} \} m_1+1 \text{ блоков} \\ \hline \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & & \\ E_{l_2} & \ddots & \\ & \ddots & E_{l_2} 0 \end{array}} \} m_2+1 \text{ блоков} \\ \vdots \\ \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & & \\ E_{l_\alpha} & \ddots & \\ & \ddots & E_{l_\alpha} 0 \end{array}} \} m_\alpha+1 \text{ блоков} \\ \hline \end{array} \quad (1.15)$$

где E_s — единичный блок порядка s , 0 — нулевой блок, а пустые места замещены нулями. Размерность области \mathcal{D} , в которой

определен γ , таким образом, будет $\bar{N} = \sum_{i=1}^{\alpha} (m_i + 1) l_i$. Аффинор

γ задает представление $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$, порожденное этой алгеброй и ее подрадикалами, которое будет в общем случае нерегулярным, но непременно точным, т. е. изоморфно представляющим алгебру $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$. Отметим также, что для $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$ представление, определяемое аффинором (1.15), будет самого общего вида.

Пусть теперь $f^A(x^1, \dots, x^{\bar{N}})$ — система достаточно гладких функций, отображающих \mathcal{D} в некоторую область \mathcal{D}' (здесь и далее $A, B, C, \dots = 1, \dots, \bar{N}$). Потребуем, чтобы якобиана матрица $J = \left(\frac{\partial f^A}{\partial x^B} \right)$ этой системы функций коммутировала с ма-

рицей (1.15): $J\gamma = \gamma J$. Тогда применяя известную теорию коммутативных матриц ([24]), которая в нашем случае несколько видоизменяется ввиду того, что мы предпочитаем использовать нижнюю жорданову форму, приходим к следующему строению матрицы J :

$$(\mathfrak{J}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{[diagonal block]} & \text{[diagonal block]} & \dots & \text{[diagonal block]} \\ \hline \text{[diagonal block]} & \text{[diagonal block]} & \dots & \text{[diagonal block]} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \text{[diagonal block]} & \text{[diagonal block]} & \dots & \text{[diagonal block]} \\ \hline \end{array} \quad (1.16)$$

Каждый блок матрицы (1.16) по отношению к матрице (1.15) обладает тем свойством, что его произведения слева и справа на диагональные блоки подходящей размерности из (1.15) совпадают, вследствие чего блоки в (1.16) имеют специфическое строение, которое обнаруживается следующим путем. Рассмотрим блок матрицы (1.16), стоящий на пересечении i -й горизонтальной и j -й вертикальной полос матрицы (1.16) ($i, j = 1, \dots, \alpha$). Разобьем его на $m_i + 1$ горизонтальных полос шириной l_i и на $m_j + 1$ вертикальных полос шириной l_j . Тогда из того, что при умножении слева на диагональный блок из (1.15) каждая клетка блока из (1.16) смещается на один ряд вниз, а при умножении справа на такой же блок она смещается на один ряд влево, следует, что рассматриваемый блок J_{ij} матрицы J должен иметь следующее строение:

а) При $i < j$

$$\mathfrak{J}_{ij} = \begin{bmatrix} A_1 0 \dots \dots \dots 0 \\ A_2 \dots \dots \dots \vdots \\ \vdots \dots \dots \dots \vdots \\ A_{m_i+1} \dots \dots A_2 A_1 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

б) При $i > j$

$$\mathfrak{J}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \dots \dots \dots 0 \\ \vdots \dots \dots \dots \vdots \\ 0 \dots \dots \dots \vdots \\ A_1 \dots \dots \dots \vdots \\ A_2 \dots \dots \dots \vdots \\ \vdots \dots \dots \dots \vdots \\ A_{m_j+1} \dots \dots A_2 A_1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

с) При $i=j$ из (1.17) и (1.18) получим квадратную матрицу нижней треугольной формы.

Характерным во всех трех случаях является наличие в каждом блоке матрицы (1.16) треугольника из вообще говоря ненулевых клеток в левом нижнем углу блока, у которого на трансверселях, параллельных главной диагонали матрицы (1.16), расположены равные клетки. Если приравнять между собой частные производные, стоящие на одинаковых местах в равных клетках, и к нулю частные производные в нулевых клетках блоков (1.17) и (1.18), то мы получим системы дифференциальных уравнений типа (1.4), выражающие собой необходимые и достаточные условия того, что функции

$$F^{\lambda,i} = f^{s_{\lambda}+i} \varepsilon^{m-m_{\lambda}} + f^{s_{\lambda}+i_{\lambda}+i} \varepsilon^{m-m_{\lambda}+1} + \dots + f^{s_{\lambda}+i_{\lambda}m_{\lambda}+i} \varepsilon^m, \quad (1.19)$$

где $s_{\lambda} = \sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} (m_{\sigma} + 1) l_{\sigma}$, $i=1, \dots, l_{\lambda}$, $\lambda=1, \dots, \alpha$, голоморфны по переменным

$$X^{\mu,j} = x^{s_{\mu}+j} \varepsilon^{m-m_{\mu}} + x^{s_{\mu}+i_{\mu}+j} \varepsilon^{m-m_{\mu}+1} + \dots + x^{s_{\mu}+i_{\mu}m_{\mu}+j} \varepsilon^m. \quad (1.20)$$

Функции (1.19), как и аргументы (1.20), вообще говоря, определяются в подрадикалах алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$, и только последняя серия при $\lambda=\alpha$ (соответственно $\mu=\alpha$) — во всей $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$. Они будут все определяться в алгебре $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$ при условии, что в (1.14) $l_1=l_2=\dots=l_{\alpha-1}=0$, т. е. в характеристике аффинора присутствуют только равные числа, а в каноническом виде матрицы γ — только жордановы клетки одинаковой размерности $m+1$, и следовательно, представление $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$, определяемое аффинором γ , тогда является кратным регулярному. Поскольку очевидным образом из голоморфности функций (1.19) по переменным (1.20) следует строение (1.16) якобиевой матрицы, то имеет место следующая

Теорема. Для того, чтобы якобиева матрица системы функций f_{λ} коммутировала с матрицей (1.15), необходимо и достаточно, чтобы $N=l_1+l_2+\dots+l_{\alpha}$ функций (1.19) из $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$ были голоморфны по переменным (1.20).

При $|J| \neq 0$ определяется обратное отображение $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$, причем поскольку обратная матрица J^{-1} также коммутирует с γ , то обратное отображение обладает аналогичными свойствами с точки зрения его интерпретации в алгебре $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$.

Рассмотрим теперь модули над $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$. Простейшим из них будет регулярный, определяемый матрицами вида (1.6). Наиболее общий модуль над $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$ строится следующим образом.

Пусть $\mathcal{L}_{l_1, \dots, l_{\alpha}}^{m_1, \dots, m_{\alpha}}(\varepsilon^m) = \{X\}$, где

$$X = (x_{11}, \dots, x_{1l_1}; x_{21}, \dots, x_{2l_2}; \dots; x_{\alpha 1}, \dots, x_{\alpha l_{\alpha}}), \quad (1.21)$$

— множество строк длины $N=l_1+\dots+l_{\alpha}$, в которых $x_{\lambda i} \in \mathbf{R}(\varepsilon^{m-m_{\lambda}, m})$. Вводя обычным образом операции сложения

строк и умножения их на величины из $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$, мы получаем, что $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$ удовлетворяет известным аксиомам модуля над $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$. Он будет конечно-порожденным, т. к. обладает системой образующих $A_{\lambda i}$, у которых все элементы строки (1.21) равны нулю, кроме $x_{\lambda i} = \varepsilon^{m-m_\lambda}$ ($\lambda=1, \dots, \alpha$; $i=1, \dots, l_\lambda$), а произвольная строка (1.21) тогда представима в виде разложения

$$X = \sum_{\lambda=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{l_\lambda} x_{\lambda i} A_{\lambda i}. \quad (1.22)$$

Коэффициенты $x_{\lambda i}$ здесь определяются с точностью до произвольного слагаемого из $\mathbf{R}(\varepsilon^{m_\lambda+1, m})$, откуда непосредственно вытекает, что $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$ — несвободный модуль. Его система образующих $\{A_{\lambda i}\}$ — линейно-зависима:

$$\sum_{\lambda=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{l_\lambda} a_{\lambda i} A_{\lambda i} = 0, \quad \forall a_{\lambda i} \in \mathbf{R}(\varepsilon^{m_\lambda+1, m}).$$

Называя элементы этого модуля плюральными векторами, укажем его вещественную реализацию.

Пусть $\mathcal{L}_{\bar{N}}$ — вещественное векторное пространство, в котором задан аффинор γ характеристики (1.14) с матрицей (1.15) в некотором базисе. Сопоставляя вектору $x \in \mathcal{L}_{\bar{N}}$ с координатами x^i ($i=1, \dots, \bar{N}$) строку (1.21) из $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$, с помощью соотношений $x_{\mu j} = X^{\mu, j}$ и формул (1.20) легко заключаем, что при этом сумма строк (1.21) изображается суммой их образов в $\mathcal{L}_{\bar{N}}$, а произведение строки (1.21) на действительное число a — произведением образа в $\mathcal{L}_{\bar{N}}$ на a . Несколько сложнее интерпретируется умножение строки (1.21) на $\varepsilon \in \mathbf{R}(\varepsilon^m)$, при котором степени ε в (1.20) возрастают на единицу, а последний член аннулируется. Нетрудно видеть, что к этому же результату мы придем, действуя аффинором γ на вектор x , т. к. в силу (1.15) в каждой серии координат вектора x , входящих в (1.20), происходит их перемещение на одно место вправо с замещением освободившегося слева места нулем. Таким образом, умножение строки (1.21) на ε равносильно воздействию на соответствующий вектор из $\mathcal{L}_{\bar{N}}$ оператором γ , представляющим ε в нашем $\mathcal{L}_{\bar{N}}$, и следовательно, умножение ее на $a_0 + \varepsilon a_1 + \dots + \varepsilon^m a_m \in \mathbf{R}(\varepsilon^m)$ равносильно переходу $x \rightarrow a_0 x + a_1 \gamma x + \dots + a_m \gamma^m x$. Отсюда непосредственно вытекает, что вещественной реализацией (т. е. изоморфной вещественной моделью) модуля $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$ будет служить $\mathcal{L}_{\bar{N}}$ с фиксированным нильпотентным аффинором γ характеристики (1.14), которое мы будем обозначать символом $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$.

Нетрудно видеть, что канонические координаты в $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$, в которых его матрица имеет вид (1.15), определяются с точностью до линейных преобразований, матрицы которых перестановочны с (1.15). При этом происходят линейные преобразования в модуле $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$, обратимость которых равнозначна обратимости их образов в $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$. Таким образом, коммутаторная группа аффинора γ вещественно реализует фундаментальную группу модуля $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$. Ясно, что дифференциал отображения $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$, осуществляемого с помощью системы голоморфных функций с якобиевой матрицей (1.16), принадлежит к рассматриваемому классу преобразований.

Перейдем к рассмотрению сопряженного к $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$ модуля и его вещественной реализации. Поскольку $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$ — фробениусова алгебра (т. е. ее структурные константы c_{ij}^k таковы, что имеются q_k , при которых матрица $Q = (c_{ij}^k q_k)$ не вырождается), то существование такого сопряженного модуля тем самым обеспечено ([23]). Его модель в пространстве $\mathcal{L}_{\bar{N}}^*$, сопряженном $\mathcal{L}_{\bar{N}}$, строится вполне аналогично рассмотренной, с той лишь разницей, что теперь умножение плюрального ковектора на ε должно интерпретироваться операцией $w_k \gamma_j^k$, т. е. умножением вещественной строки w_k на матрицу (1.15) справа. Это приводит к следующему выражению координат плюрального ковектора через координаты вещественного образа:

$$W_{\mu, j} = w_{s_\mu + l_\mu m_\mu + i} \varepsilon^{m - m_\mu} + w_{s_\mu + l_\mu (m_\mu - 1) + i} \varepsilon^{m - m_\mu + 1} + \dots \\ \dots + w_{s_\mu + i} \varepsilon^m. \quad (1.23)$$

Взаимный след вектора из $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$ с координатами (1.20) на плюральном ковекторе (1.23) из дуального модуля $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$ (или операция спаривания элементов этих модулей) определяется следующим соотношением, которое вытекает из ([23], форм. (2.13)) и является конкретизацией последней для алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$ при условии, что фробениусова метрика в $\mathbf{R}(\varepsilon^m)$ задается (см. [23], форм. (2.18)) с помощью матрицы $Q = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$:

$$\langle\langle W, X \rangle\rangle = \langle w, \gamma^m x \rangle + \langle w, \gamma^{m-1} x \rangle \varepsilon + \dots + \langle w, x \rangle \varepsilon^m, \quad (1.24)$$

где

$$\langle\langle W, X \rangle\rangle = \frac{1}{\varepsilon^{m-m_1}} (W_{11} X^{11} + W_{12} X^{12} + \dots + W_{1l_1} X^{1l_1}) + \\ + \frac{1}{\varepsilon^{m-m_2}} (W_{21} X^{21} + W_{22} X^{22} + \dots + W_{2l_2} X^{2l_2}) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^{m-m_\alpha}} (W_{\alpha_1} X^{\alpha_1} + W_{\alpha_2} X^{\alpha_2} + \dots + W_{\alpha_{l_\alpha}} X^{\alpha_{l_\alpha}}). \quad (1.25)$$

Для удобства суммирования в (1.25) введем следующий оператор

$$\overset{*}{\Delta}_{\mu j}^{\lambda i} = \frac{1}{\varepsilon^{m-m_\mu}} \delta_{\mu}^{\lambda} \delta_j^i, \quad \delta_q^p = \begin{cases} 1, & p=q, \\ 0, & p \neq q, \end{cases} \quad (1.26)$$

тогда спаривание (1.25) примет вид

$$\langle\langle W, X \rangle\rangle = W_{\lambda, i} \overset{*}{\Delta}_{\mu j}^{\lambda i} X^{\mu, j}, \quad (1.27)$$

причем следует иметь в виду, что оператор (1.26) имеет смысл лишь в свертывании, т. к. содержит идеальные элементы $\frac{1}{\varepsilon^{m-m_\mu}}$, которые можно интерпретировать как соответствующее понижение степени ε . С применением (1.26) дифференциалы голоморфных функций (1.19) по переменным (1.20) удобно теперь записать в виде

$$dF^{\lambda i} = \frac{\partial F^{\lambda i}}{\partial X^{\mu j}} \overset{*}{\Delta}_{\nu h}^{\mu j} dX^{\nu h}, \quad (1.28)$$

где $\partial F^{\lambda i} / \partial X^{\mu j}$ — голоморфные частные производные в смысле сказанного выше.

Имея модули $\mathcal{L}_{l_1, \dots, l_\alpha}^{m_1, \dots, m_\alpha}(\varepsilon^m)$ и $\overset{*}{\mathcal{L}}_{l_1, \dots, l_\alpha}^{m_1, \dots, m_\alpha}(\varepsilon^m)$, нетрудно определить тензоры более высоких порядков как линейные отображения декартовых произведений этих модулей в алгебру $\mathbb{R}(\varepsilon^m)$. Их вещественными реализациями в $\mathcal{L}_{l_1, \dots, l_\alpha}^{m_1, \dots, m_\alpha}(\gamma)$ будут тензоры тех же порядков, обладающие свойством чистоты относительно γ , т. е. перестановочности по любой паре своих индексов (или аргументов) с аффинором γ . Свойства чистоты тензоров относительно аффинорных структур изучались рядом авторов ([113], [73], [74], [80], [33], [37], [10], [11], [14], [15], [39]) и наиболее подробно освещены в [23].

§ 2. АФФИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ И МНОГООБРАЗИЯ НАД АЛГЕБРОЙ ПЛЮРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть M — вещественное или комплексное дифференцируемое многообразие класса C^∞ , на котором задано (1,1)-тензорное поле γ того же класса гладкости, тогда говорят, что на M задана аффинорная структура γ . В дальнейшем будем предполагать, что γ интегрируема, т. е. на M существует такой гладкий атлас локальных карт, что матрица γ имеет в любой карте этого атласа постоянные компоненты; различные признаки интегрируемости аффинорных структур исследованы в работах [72], [101]—[104], [25], [70], [98], [99], [32], [33]. В этом случае в некоторой допустимой локальной карте матрица γ примет квазидиагональный вид

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & \\ & \gamma_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \gamma_p \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где по главной диагонали расположены постоянные матрицы с одним собственным значением, а пустые места заполнены нулями. При всех преобразованиях допустимых локальных координат, сохраняющих матрицу (2.1), якобиева матрица преобразования в силу известного свойства перестановочных матриц ([24], [65]) будет иметь аналогичный (2.1) квазидиагональный вид

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & J_p \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

откуда следует, что M является композицией ([42], [45]) подмногообразий M_1, M_2, \dots, M_p , огибающих корневые подпространства аффинора (2.1). Далее будет показано, что на каждой из подмногообразий M_s определяется некоторая аффинорная структура с нулевым собственным значением, и следовательно только этот случай аффинорной структуры является типичным, а общий случай сводится к композиции таковых.

Пусть аффинор γ имеет минимальный полином

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} (\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_p)^{\alpha_p}. \quad (2.3)$$

Разложим дробь $1/\varphi(\lambda)$ в сумму дробей с взаимно простыми знаменателями:

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \sum_{s=1}^p \frac{q_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s}}. \quad (2.4)$$

Многочлены

$$P_s(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda) q_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{\alpha_s}} \quad (2.5)$$

обладают следующими свойствами:

1°. В силу (2.4) $\sum_{s=1}^p P_s(\lambda) = 1$, поэтому $\sum_{s=1}^p P_s(\gamma) = \text{id}$.

2°. Если E_i — корневые подпространства собственных значений λ_i , то для $\forall v_i \in E_i$ имеем $(\gamma - \lambda_i \cdot \text{id})^{\alpha_i} v_i = 0$, поэтому $P_s(\gamma) v_i = 0$ ($s \neq i$), ибо по (2.5) в $P_s(\gamma)$ присутствует множитель $(\gamma - \lambda_i \cdot \text{id})^{\alpha_i}$; таким образом, многочлены (2.5) определяют операторы $P_s(\gamma)$, аннулирующие векторы корневых подпространств с другим номером.

3°. Аффинор $P_s(\gamma)$ тождественно действует на корневом подпространстве E_s . Действительно, по 2° для $\forall v_s \in E_s$ имеем

$$\left(\sum_{i=1}^p P_i(\gamma)\right) v_s = \sum_{i=1}^p (P_i(\gamma) v_s) = P_s(\gamma) v_s. \text{ Но по } 1^\circ \left(\sum_{i=1}^p P_i(\gamma)\right) v_s = v_s, \text{ поэтому } P_s(\gamma) v_s = v_s.$$

Из 1° — 3° вытекает, что многочлены $P_s(\gamma)$ служат проекторами на корневые подпространства E_s ; они были определены в [70].

Введем новую аффинорную структуру

$$\gamma^* = \gamma - \sum_{s=1}^p \lambda_s P_s(\gamma), \quad (2.6)$$

обладающую очевидными свойствами:

1° . Собственные векторы аффинора γ будут ими и для γ^* , но собственные значения их — нулевые.

2° . Если матрица γ приведена к жордановой форме, то и матрица γ^* тоже имеет жорданов вид.

Таким образом, в каждом подмногообразии M_s с помощью γ^* задается аффинорная структура с нулевым собственным значением. По этой причине мы теперь подробно изучим случай нильпотентной аффинорной структуры, а к общему случаю вернемся в конце параграфа.

Рассмотрим дифференцируемое многообразие $M_{i_1 \dots i_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$ (для простоты вещественное) класса C^∞ с интегрируемой нильпотентной аффинорной структурой γ характеристики (1.14). Тогда в некоторых локальных координатах, определяемых в области $\mathcal{D} \subset M_{i_1 \dots i_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$, матрица γ примет вид (1.15). Тем самым выделяется целый класс допустимых локальных карт, характеризующийся тем, что при переходе от одной из них к другой якобиева матрица преобразования коммутирует с (1.15) и, следовательно, принимает вид (1.16). Как показано в § 1, это означает, что допустимое преобразование локальных координат $x^{A'} = f^A(x^1, \dots, x^{\bar{N}})$, где $\bar{N} = \dim M_{i_1 \dots i_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$, обладает тем свойством, что определяемые с помощью величин $x^{A'}$ и x^A по формулам (1.19) и (1.20) переменные из $\mathbb{R}(e^m)$ преобразуются голоморфным образом.

Покажем, что $M_{i_1 \dots i_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$ является вещественной моделью дифференцируемого многообразия над алгеброй $\mathbb{R}(e^m)$, которое мы определим следующим образом. Назовем $\mathbb{R}(e^m)$ -картой на топологическом пространстве V пару (U, h) , состоящую из области $U \subset V$ и гомеоморфизма $h: U \rightarrow U'$ этой области на некоторую область U' модуля $\mathcal{L}_{i_1 \dots i_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(e^m)$, введенного в § 1.

Набор величин (1.20) назовем координатами точки области U . Совокупность таких $R(\varepsilon^m)$ -карт или координатных областей, покрывающую V , мы назовем $R(\varepsilon^m)$ -гладким атласом на V , если для двух пересекающихся $R(\varepsilon^m)$ -карт U_A и U_B гомеоморфизм $h_B \circ h_A^{-1}: h_A(U_A \cap U_B) \rightarrow (U_A \cap U_B)$ задается системой голоморфных функций (1.19) от координат (1.20). Если $R(\varepsilon^m)$ -карта на V обладает этим свойством по отношению к любой карте атласа, то она называется согласованной с этим $R(\varepsilon^m)$ -атласом; $R(\varepsilon^m)$ -гладкий атлас, содержащий все согласованные с ним $R(\varepsilon^m)$ -карты, называется максимальным. И наконец, хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой вместе с заданным на нем максимальным $R(\varepsilon^m)$ -гладким атласом назовем гладким многообразием над $R(\varepsilon^m)$ размерности N . Поскольку в его определении существенную роль играют числа характеристики (1.14), то мы обозначим его символом $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$. Заметим, что наше определение отличается от определения гладкого многообразия над алгеброй, данного в ([23]), тем, что в более общем смысле понимается $R(\varepsilon^m)$ -модуль.

Теперь нетрудно заключить, что многообразие $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$ является вещественной реализацией $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$. Действительно, $R(\varepsilon^m)$ -карта последнего, как уже отмечалось выше, реализуется областью в $\mathcal{L}_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$, а преобразование локальных координат на пересечении двух $R(\varepsilon^m)$ -карт — преобразованием, сохраняющим матрицу аффинора (1.15), откуда непосредственно и вытекает наше утверждение, как следующая

Теорема. Гладкое многообразие с интегрируемой аффинорной структурой характеристики (1.14) является вещественной реализацией гладкого плюрального многообразия $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$.

Заметим, что нерегулярные аффинорные структуры разобранного типа и их интерпретации с помощью алгебры $R(\varepsilon^m)$ были рассмотрены в работах [8], [9], [12], [13], [14], [15], а термин «плюральные числа» предложен А. П. Норденом.

Дальнейшие факты дифференциальной геометрии на $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$ разворачиваются так же, как и во всяком дифференцируемом многообразии над алгеброй. Тензорное поле на $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$ реализуется в $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$ в виде тензорного поля той же валентности, удовлетворяющего условиям чистоты относительно γ ([23]). При этом особую роль играют голоморфные тензорные поля, компоненты которых являются голоморфными функциями локальных координат на $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$; они реализуются в виде чистых

относительно γ тензорных полей на $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$, частные производные которых по допустимым локальным координатам обладают свойством чистоты [13], [23]. Линейная связность $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(g^m)$ вещественно реализуется в виде линейной связности на $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$, сохраняющей γ , т. е. удовлетворяющей условию $\nabla \gamma = 0$ ([13], [23]). Для голоморфного тензорного поля его ковариантная производная будет голоморфным тензорным полем тогда и только тогда, когда компоненты линейной связности голоморфны; реализуя эту связность в $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$, получаем, что компоненты вещественной связности не только чисты относительно γ , но и имеют чистые частные производные по допустимым локальным координатам. Признаком такой связности на $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\gamma)$, которую мы также называем голоморфной относительно структуры γ , является чистота ее тензора кривизны ([13], [23], [33]). В этом случае тензор кривизны вещественно реализует тензор кривизны на $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(g^m)$.

Если среди собственных значений аффинора (2.1) имеются комплексные или M — комплексное многообразие, то проведенные выше рассуждения легко переносятся на этот случай путем комплексификации. В вещественном M двум комплексно-сопряженным собственным значениям вещественного аффинора (2.1) будут отвечать комплексно сопряженные корневые подпространства и такие же подмногообразия в композиции, которые в совокупности определяют одно вещественное подмногообразие с аффинорной структурой, изучавшейся в работах [10], [11].

Вернемся к общему случаю многообразия M с интегрируемой аффинорной структурой (2.1). Мы показали, что структура γ может быть заменена новой тоже интегрируемой аффинорной структурой (2.6), у которой в корневых подпространствах, отвечающих блокам матрицы (2.1), возникают нильпотентные аффиноры, порождаемые аффинором (2.6). По отношению к определяемым ими аффинорным структурам подмногообразия M_1, \dots, M_p являются вещественными реализациями некоторых гладких многообразий над алгебрами плюральнх чисел соответствующего порядка. Можно пойти и дальше, используя свойства голоморфных функций над прямыми суммами алгебр ([7]), с точки зрения которых M можно рассматривать как вещественную реализацию многообразия над прямой суммой p алгебр плюральнх чисел соответствующих порядков ([12], [23]).

К таким многообразиям можно придти также, исходя из следующих соображений. Пусть аффинор γ имеет минимальный полином (2.3), тогда факторизуя множество всех полиномов от

λ по $\varphi(\lambda)$, мы получаем полиномиальную алгебру, для которой аффинор γ задает представление. Строение полиномиальной алгебры хорошо известно ([12]): каждому из взаимно простых множителей полинома (2.3) в ней отвечает прямое слагаемое, являющееся алгеброй плюралных чисел соответствующего порядка, а над полем действительных чисел при наличии комплексно сопряженных корней (2.3) каждая пара таких корней порождает прямое слагаемое в виде комплексного расширения алгебры плюралных чисел. Таким образом, мы снова приходим к рассмотренной выше композиции плюралных многообразий, которая служит реализацией многообразия над полиномиальной алгеброй аффинора γ ([12], [36], [93], [106]). Рассмотрим примеры.

1. Структура на M , удовлетворяющая условию $\gamma^2 = -id$, называется почти комплексной. Таким структурам, а также их обобщениям — почти произведениям ($\gamma^2 = id$) и почти касательным ($\gamma^2 = 0$) структурам — посвящено значительное число работ (см. обзоры [3], [75], [76]). Много внимания уделяется кэлеровым многообразиям ([100]), их аналогам и приложениям ([43]), а также интегрируемым структурам, отвечающим алгебрам двойных и дуальных чисел и возникающим в линейчатой геометрии ([81], [82]; [23]).

2. Пусть метрический тензор g_{ij} риманова многообразия M является голоморфным полем относительно интегрируемой аффинорной структуры γ общего вида. Такие многообразия являются композицией римановых подмногообразий, определяемых на огибающих корневых подпространств ([7]). По терминологии А. П. Нордена ([41]) метрический тензор в них является B -тензором относительно γ , поэтому M называется B -многообразием ([47]—[51], [107]—[110], [4]—[6], [69], [105], [95]—[97]). Связность Леви-Чивита на M голоморфна ([7], [9]).

3. Пополним достаточно гладкое многообразие M струями r -го порядка, тогда многообразии этих струй образует новое многообразие $T^r(M)$, называемое касательным расслоением порядка r многообразия M . Этим расслоениям также посвящено весьма много работ (см. обзоры ([75], [76], [78])). В [27] показано, что они обладают интегрируемой аффинорной структурой, удовлетворяющей условию $\gamma^{r+1} = 0$, причем имеющей правильную характеристику (1.14) вида $[(r+1), \dots, r+1]$. Структура γ означает, что $T^r(M)$ служит вещественной моделью некоторого многообразия $M(\epsilon^r)$ над алгеброй $\mathbf{R}(\epsilon^r)$, в котором с помощью естественных продолжений полей дифференциально-геометрических объектов (например, метрик) из M в алгебру $\mathbf{R}(\epsilon^r)$ могут быть определены различные виды лифтов ([27]), а также получены и различные синектические объекты, предполагающие продолжения более общего вида в $\mathbf{R}(\epsilon^r)$ (см. [23]). Таким образом строятся, например, синектические мет-

$$J = \begin{pmatrix} A_{i_1}^{j_1} & A_{i_2}^{j_1} & \dots & A_{i_\alpha}^{j_1} \\ 0 & A_{i_2}^{j_2} & \dots & A_{i_\alpha}^{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{i_\alpha}^{j_\alpha} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Условие $\det J \neq 0$ таким образом равносильно необращению в нуль диагональных миноров:

$$|A_{i_1}^{j_1}| \neq 0, \quad |A_{i_2}^{j_2}| \neq 0, \quad \dots, \quad |A_{i_\alpha}^{j_\alpha}| \neq 0, \quad (3.4)$$

где $A_B^A = \left(\frac{\partial x^A}{\partial x^B} \right)$.

Пополним M струями порядка m_1 на M , струями порядка m_2 на B_1 и т. д., струями порядка m_α на $B_{\alpha-1}$, где, следовательно, предполагается, что $m_1 < m_2 < \dots < m_\alpha = m$. Полученное многообразие обозначим символом $T_{i_1 \dots i_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(M)$ и назовем по касательным расслоением порядка m многообразия M с заданной на нем многоступенчатой субмерсией (3.1). При $l_1 = \dots = l_{\alpha-1} = 0$ имеем хорошо известное касательное расслоение $T^m(M)$.

Рассмотрим в точке $x \in M$ координаты струи k -го порядка отображения $\psi: \mathbb{R} \rightarrow M$, которое в локальных координатах имеет вид $x^A = x^A(t)$ и при $t=0$ дает точку x . Тогда индуцированные локальные координаты этой струи определяются формулами ([23], стр. 153)

$$x^{A,\sigma} = \frac{1}{\sigma!} \frac{d^\sigma x^A}{dt^\sigma} \Big|_{t=0} \quad (\sigma = 0, 1, \dots, k). \quad (3.5)$$

Пополним теперь локальные координаты x^A , адаптированные к субмерсии (3.1), координатами струй соответствующих порядков к подмногообразиям B_s ; будем иметь

$$x^{i_1}, x^{i_1,1}, \dots, x^{i_1,m_1}; x^{i_2}, x^{i_2,1}, \dots, x^{i_2,m_2}; \dots \\ \dots; x^{i_\alpha}, x^{i_\alpha,1}, \dots, x^{i_\alpha,m_\alpha}. \quad (3.6)$$

О координатах (3.6) будем говорить, что они индуцированы локальными координатами на M , адаптированными к субмерсии (3.1). Можно показать, что они являются локальными координатами в окрестности $\bar{U}_x \subset T_{i_1 \dots i_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(M)$, полученной продолжением окрестности $U_x \subset M$. Если аналогично построить продолжение \bar{U}_x окрестности $U_x \subset M$, то на $\bar{U}_x \cap \bar{U}_x$ определится преобразование индуцированных локальных координат, которое можно интерпретировать следующим образом.

Образуем из координат (3.6) плоральные переменные

$T_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(M)$ является вещественной реализацией некоторого $M_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(\varepsilon^m)$, причем функции перехода в последнем имеют вид (3.8) и получаются в результате естественных продолжений в область $R(\varepsilon^m)$ переходных функций (3.2), заданных на M . В свою очередь, $T_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(M)$ обобщает $T^m(M)$ и сводится к последнему, если положить $l_1 = \dots = l_{\alpha-1} = 0$; в этом случае M диффеоморфно базе $V_{\alpha-1}$ касательного расслоения m -го порядка. Заметим, что рассмотренное полукасательное расслоение определяется с точностью до локального диффеоморфизма.

Возможность построения $T_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(M)$ за счет естественного продолжения в область $R(\varepsilon^m)$ базы M с субмерсией (3.1) позволяет определить голоморфные продолжения объектов из M в $T_{l_1 \dots l_\alpha}^{m_1 \dots m_\alpha}(M)$, которые мы будем называть, как обычно, лифтами.

Однако в противоположность случаю $T^m(M)$ теперь такие лифты будут допускать не все гладкие объекты из M , а лишь те, которые специальным образом ассоциированы с многоступенчатой субмерсией (3.1), заданной на M .

Пусть f — функция точки в окрестности $U_x \subset M$. Будем называть ее $(\alpha-1)$ -проектируемой, если $f = f_{\alpha-1} \circ \pi_{\alpha-1} \circ \pi_{\alpha-2} \circ \dots \circ \pi_1$, где $f_{\alpha-1}$ — функция на $V_{\alpha-1}$, причем $f_{k-1} = f_k \circ \pi_k$ для $k=1, \dots, \alpha-1$ есть проектируемая по отношению к субмерсии $\pi_k: B_{k-1} \rightarrow B_k$ функция в известном смысле ([71]) и $f_0 = f$. Такая функция характерна тем, что в адаптированных к многоступенчатой субмерсии (3.1) локальных координатах она зависит лишь от переменных последней серии x^{i_α} , т. е. от локальных координат на $V_{\alpha-1}$, и это свойство очевидным образом сохраняется при допустимом преобразовании (3.2).

Рассмотрим дифференциалы проекций (3.1) π_k , по отношению к которым имеют место следующие морфизмы касательных расслоений:

$$T(M) \xrightarrow{\pi_1} T(B_1) \xrightarrow{\pi_2} T(B_2) \xrightarrow{\pi_3} \dots \xrightarrow{\pi_{\alpha-1}} T(B_{\alpha-1}). \quad (3.9)$$

Векторное поле v на M называется $(\alpha-1)$ -проектируемым относительно многоступенчатого проектирования (3.1), если оно проектируемо в смысле работы [71] на каждой ступени субмерсии (3.1), т. е. если проекция v на каждую из баз $B_k: v_k = \pi_k v_{k-1}$ для $k=1, \dots, \alpha-1$, где $v_0 = v$, является функцией только точки B_k . В адаптированных к (3.1) локальных координатах для $(\alpha-1)$ -проектируемого поля v будем иметь следующий признак:

$$v^{i_1} = v^{i_1}(x^{j_1}, x^{j_2}, \dots, x^{j_\alpha}),$$

$$v^{i_2} = v^{i_2}(x^{j_2}, \dots, x^{j_\alpha}), \quad (3.10)$$

.....

$$v^{i_\alpha} = v^{i_\alpha}(x^{j_\alpha}),$$

причем естественно, что это свойство сохраняется при допустимом преобразовании (3.2).

Поле 1-форм (ковекторное поле) на M называется $(\alpha-1)$ -проектируемым, если его след на произвольном $(\alpha-1)$ -проектируемом векторном поле является $(\alpha-1)$ -проектируемой функцией. В адаптированных к (3.1) координатах для $(\alpha-1)$ -проектируемого ковекторного поля ω имеем следующий характеристический признак:

$$\omega_{i_1} = \omega_{i_1} = \dots = \omega_{i_{\alpha-1}} = 0, \quad \omega_{i_\alpha} = \omega_{i_\alpha}(x^{j_\alpha}). \quad (3.11)$$

Далее естественным образом эти определения можно распространить на объекты более общей природы, например на тензоры и связности. В частности, если $v = T_1^j(v_1, \dots, v_k)$ — векторнозначная функция, линейная по каждому аргументу, то определяемое ею $(1, k)$ -тензорное поле T_{j_1, \dots, j_k}^j на M назовем $(\alpha-1)$ -проектируемым, если при любых $(\alpha-1)$ -проектируемых векторных полях v_1, \dots, v_k поле v также $(\alpha-1)$ -проектируемо.

Вообще, тензорное поле любого типа $(\alpha-1)$ -проектируемо, если его след на любых $(\alpha-1)$ -проектируемых аргументах есть $(\alpha-1)$ -проектируемая функция. Координатный признак $(\alpha-1)$ -проектируемого тензорного поля нетрудно получить с помощью (3.10) и (3.11) из того факта, что такое поле должно удовлетворять этим условиям по каждому индексу.

Пусть ∇ — линейная связность на M . Назовем ее $(\alpha-1)$ -проектируемой, если для произвольных $(\alpha-1)$ -проектируемых векторных полей u и v ковариантная производная $\nabla_v u$ есть $(\alpha-1)$ -проектируемое поле. Применяя к этому полю ковариантное дифференцирование еще раз в направлении другого $(\alpha-1)$ -проектируемого поля и альтернируя результат по направлениям этих векторов, приходим к заключению, что тензор кривизны $(\alpha-1)$ -проектируемой связности также $(\alpha-1)$ -проектируем. Для $\alpha=2$ проектируемость тензоров и связностей рассмотрена в обзоре Б. Н. Шапукова ([71]). Связность в случае двухступенчатой субмерсии изучена М. О. Рахулой ([55], [56]), а 2-проектируемые тензорные поля и связности в случае этой субмерсии под названием ассоциированных с субмерсией (3.1) рассматривались в [21], [52], [53].

Переходя к лифтам проектируемых тензорных полей и связностей, рассмотрим вначале случай полукасательного расслоения 1-го порядка, который был разобран Т. В. Кирсановой ([29], [31]). Пусть $\pi: M \rightarrow B$ — расслоение на M , определяемое субмерсией π .

Тогда адаптированные к ней локальные координаты $(x^a, x^{\bar{a}})$, где $a, \bar{a}, \dots = 1, \dots, n-m$; $\alpha, \bar{\alpha}, \dots = n-m+1, \dots, n$; $\dim M = n$; $\dim B = m$, пополняются координатами струй 1-го порядка к B , которые обозначим символом x^α . Тогда $(x^a, x^{\bar{a}}, x^\alpha)$ — индуцированные на $T_{n-m,m}^{0,1}(M)$ локальные координаты ^{*}). Проектируемые векторное и ковекторное поля на M имеют вид $v = (v^b(x^a, x^{\bar{a}}), v^\beta(x^\alpha))$, $w = (0, w_\beta(x^\alpha))$, а их взаимный след $\text{sp}(v, w) = w_\beta v^\beta$. Лифты (полный и вертикальный) этих полей на $T_{n-m,m}^{0,1}(M)$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} {}^c v &= (v^b, v^\beta, \partial_\sigma v^\beta \cdot x^{\bar{\sigma}}), & Vv &= (0, 0, v^\beta), \\ {}^c w &= (0, \partial_\sigma w_\beta \cdot x^{\bar{\sigma}}, w_\beta), & Vw &= (0, w_\beta, 0), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\partial_\sigma v^\beta = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\sigma}$. Нетрудно убедиться, что операции (3.12) инвариантны. Взаимный след этих продолжений имеет вид:

$$\text{sp}({}^c v, {}^c w) = \frac{\partial \text{sp}(v, w)}{\partial x^\sigma} \cdot x^{\bar{\sigma}}. \quad (3.13)$$

Чтобы установить, что лифты (3.12) порождены голоморфными продолжениями проектируемых полей в $T_{n-m,m}^{0,1}(M)$, заметим, что матрица аффинора (1.15) в нашем случае принимает вид

$$(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

и, следовательно, определяет отображение векторных полей из $T_{n-m,m}^{0,1}(M)$ по (1.20) и (1.23) следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^c V^b &= \varepsilon v^b, & {}^c V^\beta &= v^\beta + \varepsilon \partial_\sigma v^\beta \cdot x^{\bar{\sigma}}, & VV &= \varepsilon \cdot {}^c V, \\ {}^c W_b &= 0, & {}^c W_\beta &= w_\beta + \varepsilon \partial_\sigma w_\beta \cdot x^{\bar{\sigma}}, & VW &= \varepsilon \cdot {}^c W. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Взаимный след этих полей (см. (1.25)) имеет вид

$$\langle\langle {}^c V, {}^c W \rangle\rangle = \text{sp}(v, w) + \varepsilon \frac{\partial \text{sp}(v, w)}{\partial x^\sigma} \cdot x^{\bar{\sigma}} \quad (3.16)$$

и служит естественным продолжением в $R(\varepsilon)$ функции $\text{sp}(v, w)$, тогда как ${}^c V$ и ${}^c W$ в (3.15) определены такими же продолжениями вторых серий координат, возникающими за счет пополнения базы B касательными к ней векторами (струями 1-го порядка).

Формулы (3.12) и (3.15) могут быть распространены и на проектируемые тензоры, среди которых мы отметим только случай (0,2)-тензора. Его проектируемость означает, что в

^{*}) Здесь и далее в символах типа $T_{n-m,m}^{0,1}(M)$ индексы для удобства разделяются запятыми.

адаптированных координатах такой тензор g_{ij} имеет матрицу

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (g_{\alpha\beta}(x^\sigma)) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

а лифты этого тензора определяются следующим образом:

$${}^c g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\partial_\sigma g_{\alpha\beta} \cdot x^\sigma) & (g_{\alpha\beta}) \\ 0 & (g_{\alpha\beta}) & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^v g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (g_{\alpha\beta}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

порождая в $M_{n-m, m}^{0,1}(\varepsilon)$ (0, 2)-тензоры с матрицами

$${}^c G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (G_{\alpha\beta}) \end{pmatrix}, \quad {}^v G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon G_{\alpha\beta}) \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

где $G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \varepsilon \partial_\sigma g_{\alpha\beta} \cdot x^\sigma$. Таким образом, среди римановых метрик на $T_{n-m, m}^{0,1}(M)$ нет метрик полного лифта, т. к. таковые необходимо вырождаются.

Переходя к лифтам связности, определим их условиями

$${}^c \nabla_{c\nu} {}^c u = {}^c (\nabla_\nu u), \quad {}^v \nabla_{c\nu} {}^c u = {}^v (\nabla_\nu u), \quad (3.20)$$

где ${}^c \nabla$ и ${}^v \nabla$ — соответственно полный и вертикальный лифты проектируемой связности ∇ . Ненулевые компоненты первой из них определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} {}^c \Gamma_{bc}^a &= \Gamma_{bc}^a, & {}^c \Gamma_{ba}^a &= \Gamma_{ba}^a, & {}^c \Gamma_{ab}^a &= \Gamma_{ab}^a, & {}^c \Gamma_{\alpha\beta}^a &= \Gamma_{\alpha\beta}^a, \\ {}^c \Gamma_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} &= {}^c \Gamma_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} = {}^c \Gamma_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}}(x^\sigma), & {}^c \Gamma_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} &= \partial_\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} \cdot x^\sigma, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где Γ — компоненты проектируемой связности ∇ на M в адаптированных координатах, причем в правых частях (3.21) участвуют все ненулевые компоненты Γ , поэтому связности ∇ и ${}^c \nabla$ взаимно однозначно определяют друг друга. Из (3.21) следует, что связность на $M_{n-m, m}^{0,1}(\varepsilon)$, определяемая голоморфной относительно структуры (3.14) связностью ${}^c \nabla$, задается соотношениями

$$\begin{aligned} {}^c z_{bc}^a &= \varepsilon \Gamma_{bc}^a, & {}^c z_{ab}^a &= \varepsilon \Gamma_{ab}^a, & {}^c z_{ba}^a &= \varepsilon \Gamma_{ba}^a, \\ {}^c z_{\alpha\beta}^a &= \varepsilon \Gamma_{\alpha\beta}^a, & {}^c z_{\beta\gamma}^a &= \Gamma_{\beta\gamma}^a + \varepsilon \partial_\sigma \Gamma_{\beta\gamma}^a \cdot x^\sigma. \end{aligned} \quad (3.22)$$

При этом связность ${}^v \nabla$ легко получить из ${}^c \nabla$, если учесть, что в $M_{n-m, m}^{0,1}(\varepsilon)$ ей отвечает связность с компонентами ${}^v z = \varepsilon \cdot {}^c z$, поэтому среди компонент ${}^v \Gamma$ связности ${}^v \nabla$ имеется только одна ненулевая серия: ${}^v \Gamma_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}}$. Обратим внимание на то, что лифты (3.12) и последующие определяются без участия связности, но как и в обычном касательном расслоении, здесь возможен лифт и с применением связности.

Пусть Γ — компоненты проектируемой связности ∇ на M , тогда с ее помощью можно построить также и горизонтальный лифт проектируемого векторного поля

Лифты этих полей в $T_{n, m, p}^{0, 1, 2}(M)$ (полный, промежуточный и вертикальный) определяются формулами:

$$\begin{aligned} {}^{CC}v &= \left(v^b, v^\beta, \partial_\alpha v^\beta x^\alpha + \partial_i v^\beta x^i, v^j, \partial_i v^j x^i, \frac{1}{2} \partial_{km} v^j x^k x^m + \partial_m v^j x^m \right), \\ {}^{VC}v &= (0, 0, v^\beta, 0, v^j, \partial_i v^j x^i), \quad {}^{VV}v = (0, 0, 0, 0, 0, v^j), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$${}^{CC}\omega = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \partial_{km} \omega_j x^k x^m + \partial_m \omega_j x^m, \partial_m \omega_j x^m, \omega_j \right),$$

$${}^{VC}\omega = (0, 0, 0, \partial_m \omega_j x^m, \omega_j, 0), \quad {}^{VV}\omega = (0, 0, 0, \omega_j, 0, 0),$$

где $\partial_r = \frac{\partial}{\partial x^r}$, $\partial_{rs} = \frac{\partial^2}{\partial x^r \partial x^s}$. Легко видеть, что ${}^{VC}v = \gamma \cdot {}^{CC}v$, ${}^{VV}v = \gamma \cdot {}^{VC}v$, и аналогично для ковекторных полей. При отображении на $M_{n, m, p}^{0, 1, 2}(\varepsilon^2)$ будем иметь поля

$$\begin{aligned} {}^{CC}V &= \left(\varepsilon^2 v^b, \varepsilon v^\beta + \varepsilon^2 (\partial_\alpha v^\beta x^\alpha + \partial_i v^\beta x^i), v^j + \varepsilon \partial_i v^j x^i + \right. \\ &+ \left. \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \partial_{km} v^j x^k x^m + \partial_m v^j x^m \right) \right), \quad {}^{VC}V = \varepsilon \cdot {}^{CC}V, \quad {}^{VV}V = \varepsilon^2 \cdot {}^{CC}V, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$${}^{CC}W = \left(0, 0, \omega_j + \varepsilon \partial_m \omega_j x^m + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \partial_{km} \omega_j x^k x^m + \partial_m \omega_j x^m \right) \right),$$

$${}^{VC}W = \varepsilon {}^{CC}W, \quad {}^{VV}W = \varepsilon^2 {}^{CC}W$$

с взаимным следом (1.25)

$$\begin{aligned} \ll {}^{CC}V, {}^{CC}W \gg &= \text{sp}(v, \omega) + \varepsilon \partial_i \text{sp}(v, \omega) x^i + \\ &+ \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \partial_{km} \text{sp}(v, \omega) x^k x^m + \partial_m \text{sp}(v, \omega) x^m \right), \end{aligned}$$

являющимся естественным продолжением $\text{sp}(v, \omega)$ в $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$. Формулы (3.29) показывают, что полные лифты ДП векторных полей (3.28) возникают на основе естественных продолжений второй серии координат (проекции на B_1) в радикал алгебры триальных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$ и третьей серии координат (проекции на B_2) в $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$. По этому же принципу могут быть определены лифты ДП тензорных полей, из которых мы разберём только случай (0,2)-тензора.

Пусть g_{AB} — ДП (0,2)-тензор, тогда его матрица в адаптированных к двухступенчатой субмерсии координатах примет вид

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{ij}(x^k) \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

а полный лифт определится формулой

$${}^{CC}g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

где 0 — нулевой блок 3-го порядка, а

$$G = \begin{pmatrix} g_{i\bar{j}} & g_{i\bar{j}} & g_{ij} \\ g_{i\bar{j}} & g_{ij} & 0 \\ g_{ij} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— блок, возникающий за счет продолжения блока g_{ij} , определяющего матрицу (3.30), в $R(\varepsilon^2)$: $g_{i\bar{j}} = \partial_k g_{ij} x^{\bar{k}}$, $g_{i\bar{j}} = \frac{1}{2} \partial_{km} g_{ij} x^{\bar{k}} x^{\bar{m}} + \partial_k g_{ij} x^{\bar{k}}$. Аналогично строятся и два другие лифта: ${}^{vc}g = {}^{cc}g \cdot \gamma$, ${}^{vv}g = {}^{cc}g \cdot \gamma^2$. Тензор из $M_{n,m,p}^{0,1,2}(\varepsilon^2)$, который реализуется с помощью ${}^{cc}g$, имеет матрицу

$${}^{cc}G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

где $G_{ij} = g_{ij} + \varepsilon \partial_k g_{ij} x^{\bar{k}} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \partial_{km} g_{ij} x^{\bar{k}} x^{\bar{m}} + \partial_k g_{ij} x^{\bar{k}} \right)$, которая сильно вырождена. Тем более вырождены будут и матрицы ${}^{vc}G = \varepsilon \cdot {}^{cc}G$, ${}^{vv}G = \varepsilon^2 \cdot {}^{cc}G$. Таким образом, в $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ также не существует римановых метрик полного лифта и тем более двух остальных лифтов.

Перейдём к рассмотрению лифтов ДП связности (в работе [21] для этой связности применялся термин «связность, ассоциированная с двухступенчатым расслоением»), которые определим условиями

$$\begin{aligned} {}^{cc}\nabla_{cc_v} {}^{cc}u &= {}^{cc}(\nabla_v u), & {}^{vc}\nabla_{cc_v} {}^{cc}u &= {}^{vc}(\nabla_v u), \\ {}^{vv}\nabla_{cc_v} {}^{cc}u &= {}^{vv}(\nabla_v u), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где u, v, ∇ — произвольные ДП векторные поля и связность на M . Раскрывая первое условие, получаем, что ненулевые компоненты ${}^{cc}\nabla$ связности ${}^{cc}\nabla$ следующим образом выражаются через компоненты Γ связности ∇ :

$$\begin{aligned} {}^{cc}\Gamma_{bc}^a &= \Gamma_{bc}^a, & {}^{cc}\Gamma_{ba}^a &= \Gamma_{ba}^a, & {}^{cc}\Gamma_{bi}^a &= \Gamma_{bi}^a, & {}^{cc}\Gamma_{ab}^a &= \Gamma_{ab}^a, & {}^{cc}\Gamma_{\alpha\beta}^a &= \Gamma_{\alpha\beta}^a, \\ {}^{cc}\Gamma_{ai}^a &= \Gamma_{ai}^a, & {}^{cc}\Gamma_{ib}^a &= \Gamma_{ib}^a, & {}^{cc}\Gamma_{i\alpha}^a &= \Gamma_{i\alpha}^a, & {}^{cc}\Gamma_{ij}^a &= \Gamma_{ij}^a, \\ {}^{cc}\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha &= {}^{cc}\Gamma_{\beta\sigma}^{\bar{\alpha}} = {}^{cc}\Gamma_{\beta\sigma}^{\bar{\alpha}} = \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha(x^\lambda, x^m), \\ {}^{cc}\Gamma_{\beta i}^\alpha &= {}^{cc}\Gamma_{\beta i}^{\bar{\alpha}} = {}^{cc}\Gamma_{\beta i}^{\bar{\alpha}} = \Gamma_{\beta i}^\alpha(x^\lambda, x^m), \\ {}^{cc}\Gamma_{i\beta}^\alpha &= {}^{cc}\Gamma_{i\beta}^{\bar{\alpha}} = {}^{cc}\Gamma_{i\beta}^{\bar{\alpha}} = \Gamma_{i\beta}^\alpha(x^\lambda, x^m), \\ {}^{cc}\Gamma_{ij}^\alpha &= {}^{cc}\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} = {}^{cc}\Gamma_{ij}^{\bar{\alpha}} = \Gamma_{ij}^\alpha(x^\lambda, x^m), \\ {}^{cc}\Gamma_{jk}^i &= {}^{cc}\Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^i = {}^{cc}\Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^i = {}^{cc}\Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^i = {}^{cc}\Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^i = {}^{cc}\Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^i = \Gamma_{jk}^i(x^m), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
{}^{CC}\Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} &= \partial_{\lambda}\chi_{\beta\sigma}^{\alpha}\bar{x}^{\lambda} + \partial_m\Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha}x^{\bar{m}}, & {}^{CC}\Gamma_{\beta i}^{\alpha} &= \partial_{\lambda}\Gamma_{\beta i}^{\alpha}x^{\bar{\lambda}} + \partial_m\Gamma_{\beta i}^{\alpha}x^{\bar{m}}, \\
{}^{CC}\Gamma_{i\beta}^{\alpha} &= \partial_{\lambda}\Gamma_{i\beta}^{\alpha}x^{\bar{\lambda}} + \partial_m\Gamma_{i\beta}^{\alpha}x^{\bar{m}}, & {}^{CC}\Gamma_{ij}^{\alpha} &= \partial_{\lambda}\Gamma_{ij}^{\alpha}x^{\bar{\lambda}} + \partial_m\Gamma_{ij}^{\alpha}x^{\bar{m}}, \\
{}^{CC}\Gamma_{jk}^i &= {}^{CC}\Gamma_{jk}^{\bar{i}} = {}^{CC}\Gamma_{jk}^{\bar{i}} = \partial_m\Gamma_{jk}^i x^{\bar{m}}, \\
{}^{CC}\Gamma_{jk}^{\bar{i}} &= \frac{1}{2}\partial_{mn}\Gamma_{jk}^i x^{\bar{m}}x^{\bar{n}} + \partial_m\Gamma_{jk}^i x^{\bar{m}}.
\end{aligned}$$

В (3.34) участвуют все ненулевые компоненты ДП связности ∇ , поэтому связности ${}^{CC}\nabla$ и ∇ взаимно однозначно определяют друг друга. Что касается компонент связностей ${}^{VC}\nabla$ и ${}^{VV}\nabla$, то они легко получаются из (3.34) свёртыванием по любому индексу с аффинором (3.26) и его квадратом соответственно. Связности (3.33) вещественно реализуют связности на $M_{n,m,p}^{0,1,2}(\varepsilon^2)$, а именно связность (3.34) служит реализацией следующей плюральной связности:

$$\begin{aligned}
{}^{CC}z_{bc}^a &= \varepsilon^2\Gamma_{bc}^a, & {}^{CC}z_{ba}^a &= \varepsilon^2\Gamma_{ba}^a, & {}^{CC}z_{bi}^a &= \varepsilon^2\Gamma_{bi}^a, & {}^{CC}z_{ab}^a &= \varepsilon^2\Gamma_{ab}^a, \\
{}^{CC}z_{a\beta}^a &= \varepsilon^2\Gamma_{a\beta}^a, & {}^{CC}z_{a\alpha}^a &= \varepsilon^2\Gamma_{a\alpha}^a, & {}^{CC}z_{ib}^a &= \varepsilon^2\Gamma_{ib}^a, & {}^{CC}z_{i\alpha}^a &= \varepsilon^2\Gamma_{i\alpha}^a, \\
{}^{CC}z_{ij}^a &= \varepsilon^2\Gamma_{ij}^a, & {}^{CC}z_{\beta\sigma}^a &= \varepsilon\Gamma_{\beta\sigma}^a + \varepsilon^2(\partial_{\lambda}\Gamma_{\beta\sigma}^a x^{\bar{\lambda}} + \partial_m\Gamma_{\beta\sigma}^a x^{\bar{m}}), \\
{}^{CC}z_{\beta i}^a &= \varepsilon\Gamma_{\beta i}^a + \varepsilon^2(\partial_{\lambda}\Gamma_{\beta i}^a x^{\bar{\lambda}} + \partial_m\Gamma_{\beta i}^a x^{\bar{m}}), & {}^{CC}z_{i\beta}^a &= \varepsilon\Gamma_{i\beta}^a + \\
&+ \varepsilon^2(\partial_{\lambda}\Gamma_{i\beta}^a x^{\bar{\lambda}} + \partial_m\Gamma_{i\beta}^a x^{\bar{m}}), & {}^{CC}z_{ij}^a &= \varepsilon\Gamma_{ij}^a + \varepsilon^2(\partial_{\lambda}\Gamma_{ij}^a x^{\bar{\lambda}} + \partial_m\Gamma_{ij}^a x^{\bar{m}}), \\
{}^{CC}z_{jk}^i &= \Gamma_{jk}^i + \varepsilon\partial_m\Gamma_{jk}^i x^{\bar{m}} + \varepsilon^2\left(\frac{1}{2}\partial_{mn}\Gamma_{jk}^i x^{\bar{m}}x^{\bar{n}} + \partial_m\Gamma_{jk}^i x^{\bar{m}}\right).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Две другие связности на $M_{n,m,p}^{0,1,2}(\varepsilon^2)$ определяются так:

$${}^{VC}z = \varepsilon \cdot {}^{CC}z, \quad {}^{VV}z = \varepsilon^2 \cdot {}^{CC}z. \tag{3.36}$$

Отметим следующие свойства лифтов тензорных полей и связностей в полукасательных расслоениях первого и второго порядков:

1. Они обладают свойством чистоты относительно структурных аффиноров (3.14) и (3.26) и, более того, определяют голоморфные поля относительно этих интегрируемых структур.

2. Структурный аффинор γ ковариантно постоянен в каждой из этих связностей, которые однако не являются самими общими связностями, сохраняющими эту структуру.

3. Тензор кривизны каждой из них служит соответствующим лифтом тензора кривизны исходной связности.

4. Тензор Риччи проектируемых связностей на M , вообще говоря, не будет проектируемым, и его лифт не определяется. Это свойство обусловлено тем фактом, что свёртывание тензоров в пространствах над алгебрами не реализуется вещественно той же операцией ([39]).

5. Если группу (3.10) сузить до подгруппы, сохраняющей слой, то M распадется в композицию в смысле А. П. Нордена

([42], [45]), а полукасательное расслоение — в композицию касательных расслоений соответствующих порядков базовых подмногообразий этой композиции. В этом случае возможны римановы метрики полного лифта, которые получаются путём обычных поднятий римановых метрик, заданных на позициях, в касательные расслоения этих позиций.

Укажем еще один способ построения связности полного лифта в $T_{1,1}^{0,2}(M)$, примененный в [20]. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ — субмерсия на M ($\dim M = 2, \dim B = 1$). Тогда группа преобразований адаптированных к π локальных координат на M определится матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ 0 & A_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Пополняя M струями 2-го порядка к B , мы получаем $T_{1,1}^{0,2}(M)$, которое является частным случаем введенного выше $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ при $n=p=1, m=0$. На $T_{1,1}^{0,2}(M)$ возникает интегрируемая аффинорная структура с матрицей

$$(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Пусть на M задана связность без кручения ∇ с компонентами G_{ij}^k , сохраняющая субмерсию π , т. е. удовлетворяющая условию $\nabla u = \lambda u$ для всякого векторного поля u , касательного к слоям $\pi^{-1}b, b \in B$. Отличными от нуля компонентами такой связности могут быть следующие:

$$G_{11}^1, G_{12}^1 = G_{21}^1, G_{22}^1, G_{22}^2. \quad (3.39)$$

Лифт этой связности в $T_{1,1}^{0,2}(M)$ будем искать в виде такой связности без кручения, в которой структурный аффинор (3.38) ковариантно постоянен, что равносильно тому, что отличными от нуля компонентами такой связности могут быть следующие:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1, \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \Gamma_{24}^4 = \Gamma_{12}^4 = \Gamma_{33}^4, \\ \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^4 = \Gamma_{32}^4, \Gamma_{22}^4, \Gamma_{11}^4, \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{21}^4. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Предполагая дополнительно, что эта связность голоморфна относительно структуры (3.38), получаем, что величина $\Gamma_{22}^2 + \varepsilon \Gamma_{22}^3 + \varepsilon^2 \Gamma_{22}^4$ из $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$ должна быть голоморфной функцией переменной $x^2 + \varepsilon x^3 + \varepsilon^2 x^4$, поэтому компоненты Γ_{22}^3 и Γ_{22}^4 могут быть определены за счет естественного продолжения Γ_{22}^2 в $\mathbf{R}(\varepsilon^2)$:

$$\Gamma_{22}^3 = \partial_2 \Gamma_{22}^2 x^3, \quad \Gamma_{22}^4 = \frac{1}{2} \partial_{22} \Gamma_{22}^2 (x^3)^2 + \partial_2 \Gamma_{22}^2 x^4, \quad (3.41)$$

Таким образом, среди компонент (3.40) с учетом (3.41) по сравнению с (3.39) содержится две лишних, и можно положить

$$\Gamma_{11}^4 = \Gamma_{12}^4 = 0, \quad (3.42)$$

т. к. при допустимом преобразовании индуцированных на $T_{1,1}^{0,2}(M)$ локальных координат эти компоненты преобразуются однородно, и условия (3.42) таким образом инвариантны. Если добавить к этому также инвариантное предположение о том, что

$$G_{22}^2 = G_{22}^2(x^2), \quad (3.43)$$

то условиям

$$\Gamma_{11}^1 = G_{11}^1, \quad \Gamma_{12}^1 = G_{12}^1, \quad \Gamma_{22}^1 = G_{22}^1, \quad \Gamma_{22}^2 = G_{22}^2 \quad (3.44)$$

при дополнительных предположениях (3.41), (3.42), (3.43) на $T_{1,1}^{0,2}(M)$ определится связность полного лифта, инвариантная относительно индуцированного на $T_{1,1}^{0,2}(M)$ преобразования локальных координат. Нетрудно видеть, что мы пришли к полному лифту (3.34) проектируемой связности на M , который выше был определен для более общего случая.

На этом примере хорошо видно, что связность полного лифта (3.34) служит лишь частным случаем связности, сохраняющей структуру (3.26), и не совпадает с ней даже при предположении, что последняя голоморфна относительно (3.26). Связности самого общего вида, сохраняющие аффинную структуру (3.38) характеристики $[(1,3)]$, частным случаем которых являются рассмотренные здесь связности полного лифта, изучались в работе Т. Г. Накова ([40]).

§ 4. ГОЛОМОРФНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СВЯЗНОСТЕЙ В ПОЛУКАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Пусть M — достаточно гладкое вещественное дифференцируемое многообразие, снабженное интегрируемой структурой представления ассоциативной, коммутативной, унитарной и фробениусовой алгебры \mathfrak{A} порядка m и являющееся вещественной реализацией дифференцируемого многообразия $M(\mathfrak{A})$ над \mathfrak{A} в смысле §§ 1—2 или для более общих, чем полиномиальные, алгебр в смысле работы [23].

Если на $M(\mathfrak{A})$ в некоторой окрестности точки X задана кривая уравнениями в локальных координатах

$$X^i = X^i(T), \quad i, j, \dots = 1, \dots, \dim M(\mathfrak{A}), \quad (4.1)$$

где $X^i(T)$ — голоморфные в смысле алгебры \mathfrak{A} функции параметра $T \in \mathfrak{A}$, то вещественной реализацией линии (4.1) в M будет служить m -мерное подмногообразие

$$x^I = x^I(t^1, \dots, t^m), \quad I, J, \dots = 1, \dots, \dim M, \quad (4.2)$$

касательные площадки которого голоморфны относительно \mathfrak{A} -алгебраической структуры на M , т. е. инвариантны относительно аффиноров представления \mathfrak{A} (мы будем называть его голоморфным подмногообразием в M).

Предположим, что (4.1) — геодезическая в голоморфной связности без кручения на $M(\mathfrak{A})$, т. е. её касательный вектор $V^i = dx^i/dT$ при дифференцировании вдоль кривой удовлетворяет уравнениям

$$\nabla V^i = \Lambda V^i, \quad (4.3)$$

где Λ — голоморфная функция T . Тогда вещественной реализацией уравнений (4.3) на M будут уравнения

$$\nabla v_j^i = \lambda_j^k v_k^i, \quad (4.4)$$

где ∇ — абсолютный дифференциал вдоль поверхности (4.2), а $v_j^i = \partial x^i / \partial t^j$, и обратно, из (4.4) следует (4.3). Таким образом, касательный вектор к (4.2) при параллельном перенесении вдоль этого подмногообразия остаётся принадлежащим ему, и значит геодезическая из $M(\mathfrak{A})$ реализуется (разумеется, локально) на M в виде вполне геодезического голоморфного подмногообразия ([34]).

Пусть

$$t^i = t^i(t) \quad (4.5)$$

— внутренние уравнения кривой на вполне геодезическом подмногообразии (4.2). Тогда в силу (4.2), (4.4), (4.5) для её касательного вектора $v^i = dx^i/dt$ имеем, что его абсолютный дифференциал принадлежит касательной площадке к (4.2). Но последняя совпадает с голоморфной площадкой касательного вектора этой кривой, за исключением особых случаев, когда эта площадка имеет меньшую, чем m , размерность, которые мы исключаем из рассмотрения. Следовательно, кривые на вполне геодезическом подмногообразии (4.2) обладают тем свойством, что их касательный вектор при параллельном перенесении вдоль кривой остаётся принадлежащим своей голоморфной площадке. Такие кривые называются голоморфно-геодезическими.

Пусть \bar{z} и \underline{z} — объекты линейных связностей без кручения на $M(\mathfrak{A})$, имеющие общие геодезические линии, тогда соответствующее преобразование связности на $M(\mathfrak{A})$ называется геодезическим, и признаком его, как и в вещественном случае, служит следующее строение тензора аффинной деформации $T = \bar{z} - \underline{z}$ ([63]):

$$T_{jk}^i = 2\delta_{(j}^i \Theta_{k)}, \quad (4.6)$$

где δ_j^i — символ Кронекера, а Θ_k — ковекторное поле на $M(\mathfrak{A})$. Переходя к вещественной реализации этого соотношения на M , получаем с учетом [15], что

$$T_{JK}^I = 2\Phi_{[J}\theta_{K]}^\alpha, \quad (4.7)$$

где θ_K^α — система ковекторов, реализующих Θ_K , Φ_J^α — структурные аффиноры на M , изоморфно представляющие базисные единицы $e_\alpha \in \mathfrak{A}$, $T_{JK}^I = \bar{\Gamma}_{JK}^I - \Gamma_{JK}^I$ — тензор деформации связностей, реализующих на M связности \bar{g} и g . По сказанному выше преобразование (4.7) сохраняет свойство подмногообразий (4.2) быть вполне геодезическими, а следовательно, сохраняет и голоморфную геодезичность кривых на M , поэтому мы будем называть преобразование (4.7) голоморфно-геодезическим. Такие преобразования, в том числе и по отношению к более общим кватернионным и антикватернионным структурам, изучались в [92], [19], [34], [17], [66]—[68], [59], [64], [111], [116]. Что касается вопроса о том, будут ли самые общие преобразования, сохраняющие класс голоморфно-геодезических линий, иметь тензор деформации вида (4.7), то для достаточно широкого класса алгебр ответ будет утвердительным, что, в частности, для более общей ситуации, когда на M задана некоторая полиаффинорная структура, исследуется в [38].

Таким образом, геодезическое преобразование связности на $M(\mathfrak{A})$ реализуется на M в виде голоморфно-геодезического преобразования с тензором деформации (4.7), поэтому инварианты этого преобразования на $M(\mathfrak{A})$ (проективные параметры Томаса и тензор проективной кривизны Вейля — см. [63]), определяемые на $M(\mathfrak{A})$ так же, как и в вещественном случае, реализуются на M в виде инвариантов голоморфно-геодезических преобразований. Однако, прямое использование этих инвариантов на M встречает принципиальные трудности, т. к. в конструировании инвариантов на $M(\mathfrak{A})$ участвует операция свёртывания, которая выражается с помощью свёртывания в M только для полупростой алгебры ([39], [61], [62]). Это заставляет искать указанные инварианты голоморфно-геодезического преобразования на M непосредственно, что, в частности, рассматривалось в [17], где установлено следующее.

Пусть $R_{JK}^L = 2(\partial_{[I}\Gamma_{JK]}^L + \Gamma_{M[I}^L\Gamma_{JK]}^M)$ — тензор кривизны, тогда по [44] (стр. 130, форм. 7) при преобразовании (4.7) имеем

$$\bar{R}_{JK}^L = R_{JK}^L + 2\Phi_K^L\theta_{[I]}^\alpha + 2\Phi_{[J}^L\theta_{I]}^\alpha, \quad (4.8)$$

где \bar{R} — тензор кривизны связности $\bar{\Gamma}$,

$$\theta_{IJ}^\alpha = \nabla_I\theta_J^\alpha - \theta_J^\alpha c_{\sigma\tau}^\alpha, \quad (4.9)$$

а $c_{\sigma\tau}^\alpha$ — структурные константы \mathfrak{A} в базисе e_α , т. е. $e_\sigma e_\tau = c_{\sigma\tau}^\alpha e_\alpha$. Свертывая (4.8) по I, L , получаем, что тензор Риччи $R_{JK} = R_{JK}^I$ преобразуется при этом так:

$$\bar{R}_{JK} = R_{JK} + 2\Phi_K^L \theta_{[IJ]}^\alpha + 2\Phi_{[J}^L \theta_{I]K}^\alpha. \quad (4.10)$$

Если рассматривать (4.10) как систему уравнений для определения θ_{IJ}^α , которая является вообще говоря, переопределенной, то в тех случаях, когда она совместна, ее решение имеет вид

$$\theta_{IJ}^\alpha = \mathcal{F}_{IJ}^\alpha (\bar{R} - R). \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.8) и перенося в левую часть все надчеркнутые величины, мы получаем равенство вида

$$\bar{W}_{IJK}^L = W_{IJK}^L, \quad (4.12)$$

где $W_{IJK}^L = R_{IJK}^L - 2\Phi_K^L \mathcal{F}_{[IJ]}^\alpha (R) - 2\Phi_{[J}^L \mathcal{F}_{I]K}^\alpha (R)$, а \bar{W} — аналогичный тензор, сконструированный из связности $\bar{\Gamma}$. Таким образом, (4.12) есть инвариантный тензор голоморфно-геодезической кривизны или обобщенный тензор Вейля, и его отыскание фактически сводится к решению системы (4.10). В [17] показано, что в случае коммутативной алгебры разрешимость уравнений (4.10) накладывает довольно сильные ограничения на саму алгебру \mathfrak{A} , так что, например, для алгебры $\mathbb{R}(\varepsilon^m)$ она невозможна. Примерно так же обстоит дело и с обобщенными параметрами Томаса. Здесь и оказывается весьма полезной теория лифтов проектируемых тензоров и связностей, изложенная выше, которая позволяет построить инварианты голоморфно-геодезического преобразования связности полного лифта.

Пусть $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ — полукасательное расслоение 2-го порядка. Для того, чтобы преобразование связности полного лифта было голоморфно-геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$\bar{\Gamma}_{JK}^I = \Gamma_{JK}^I + 2\delta_{(J}^I \bar{\theta}_{K)} + 2\gamma_{(J}^I \bar{\theta}_{K)} + 2\gamma_{JK}^I, \quad (4.13)$$

где $\gamma_J^I = \gamma_L^I \gamma_J^L$, $\bar{\theta}_K = \gamma_K^L \bar{\theta}_L$, $\tilde{\theta}_K = \gamma_K^L \theta_L$, а $I, J, K, \dots = 1, \dots, \bar{N} = n + 2m + 3p$. Формулы (4.13) есть конкретизация формул (4.7), причем θ_K служит полным лифтом ковектора того геодезического преобразования на M , которое порождает (4.13). В (4.13) и дальше значок SS у связности полного лифта опускается. Заметим, что голоморфно-геодезическая линия на $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ реализуется на M в виде геодезической линии с заданным вдоль нее обобщенным полем Якоби, отличающимся от обычного поля Якоби ([26], [117]), удовлетворяющего уравнению $\nabla_x^2 \xi^i + R_{jnl}^i \xi^j \dot{x}^k \dot{x}^l = 0$ вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, тем, что правая часть этих уравнений — ненулевая (см. [54]). Аналогичный результат в полукасательном расслоении 1-го порядка отмечен в [30].

Свернем (4.13) по I, K , тогда будем иметь

$$\tilde{\theta}_J = \frac{1}{N+3} (\bar{\Gamma}'_{JI} - \Gamma'_{JI}). \quad (4.14)$$

Усматривая из (3.28), что $\tilde{\theta}_J$ есть вертикальный лифт ковекторного поля, по которому легко восстанавливается и полный лифт θ_J , мы получаем этот ковектор в индуцированных на $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ локальных координатах:

$$\theta_J = \left(0, 0, 0, \frac{1}{N+3} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\bar{\Gamma}'_{II} - \Gamma'_{II})}{\partial x^k \partial x^l} x^k x^l + \frac{\partial (\bar{\Gamma}'_{II} - \Gamma'_{II})}{\partial x^k} x^k, \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{N+3} \frac{\partial (\bar{\Gamma}'_{II} - \Gamma'_{II})}{\partial x^k} x^k, \frac{1}{N+3} (\bar{\Gamma}'_{II} - \Gamma'_{II}) \right) \right). \quad (4.15)$$

Подставив (4.15) в (4.13) и перенося все члены с $\bar{\Gamma}$ влево, а члены с Γ — вправо, приходим к соотношению вида

$$\bar{\mathcal{F}}'_{JK} = \mathcal{F}'_{JK}, \quad (4.16)$$

где в обеих частях расположены одинаковые функции от $\bar{\Gamma}$ и Γ соответственно, которые определяют, таким образом, объект, инвариантный относительно преобразования (4.13) связности полного лифта. Мы назовём его обобщенным голоморфно-геодезическим объектом Томаса или голоморфно-проективной связностью.

Очевидно и обратное: если преобразование связности удовлетворяет условию (4.16), то тензор деформации имеет вид (4.13), т. е. оно — голоморфно-геодезическое. Таким образом, имеет место

Теорема. Для того, чтобы преобразование связности полного лифта было голоморфно-геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы оно сохраняло обобщенный объект Томаса.

Это — обобщение известной теоремы из теории геодезических преобразований ([63]). Что касается компонент обобщенного объекта Томаса, то произведя соответствующие выкладки при выводе (4.16), можно определить для каждой из шести серий значений координат $a, \alpha, \bar{\alpha}, i, \bar{i}, \bar{\bar{i}}$ в $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ общий вид каждой серии этих компонент, полученных Т. А. Пантелеевой ([54]), но ввиду громоздкости мы эти формулы не приводим. Аналогичные факты в полукасательном расслоении 1-го порядка рассматривались Т. В. Кирсановой в [30], а случай $T(M)$ изучен А. П. Широковым в [77].

Пусть связность полного лифта преобразуется по (4.13), тогда для тензоров кривизны их имеем ([44]):

$$\bar{R}'_{IJK} = R'_{IJK} + 2\tilde{\theta}'_{[IJ]}\delta'_K + 2\tilde{\theta}'_{[IJ]}\gamma'_K + 2\theta'_{[IJ]}\gamma'^2_K + \\ + 2\delta'^L_{[J}\tilde{\theta}'_{I]K} + 2\gamma'^L_{[J}\tilde{\theta}'_{I]K} + 2\gamma'^L_{[J}\theta'_{I]K}, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \theta_{IJ} &= \nabla_I \theta_J - \tilde{\theta}_I \theta_J - \tilde{\theta}_I \tilde{\theta}_J - \theta_I \tilde{\theta}_J, \\
 (b) \quad \tilde{\theta}_{IJ} &= \theta_{IK} \gamma_J^K = \nabla_I \tilde{\theta}_J - \tilde{\theta}_I \tilde{\theta}_J - \tilde{\theta}_I \tilde{\theta}_J, \\
 (c) \quad \tilde{\tilde{\theta}}_{IJ} &= \tilde{\theta}_{IK} \gamma_J^K = \nabla_I \tilde{\tilde{\theta}}_J - \tilde{\theta}_I \tilde{\tilde{\theta}}_J.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Отметим, что тензор (4.18a) является полным лифтом аналогичного тензора, возникающего на M при геодезическом преобразовании, поэтому его матрица будет иметь вид (3.31). Такой же вид примут и матрицы присоединенных к нему тензоров (4.18b) и (4.18c). Ненулевые их блоки устроены следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \theta_{i\bar{j}} & \theta_{i\bar{j}} & \theta_{ij} \\ \theta_{i\bar{j}} & \theta_{ij} & 0 \\ \theta_{ij} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \theta_{i\bar{j}} & \theta_{ij} & 0 \\ \theta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \theta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\theta_{i\bar{j}} = \partial_k \theta_{ij} x^{\bar{k}}, \quad \theta_{i\bar{j}} = \frac{1}{2} \partial_k \theta_{ij} x^{\bar{k}} x^{\bar{l}} + \partial_k \theta_{ij} x^{\bar{k}}, \tag{4.19}$$

а θ_{ij} — компоненты последней серии того ДП тензора на M , полный лифт которого дает (4.18a). Отсюда хорошо видно, что тензор (4.18c) вполне определяет в нашем случае тензоры (4.18a) и (4.18b), что в общем случае многообразия $M_{n,m,p}^{0,1,2}(\gamma)$, рассмотренного в § 2, места не имеет, и это для дальнейшего будет иметь решающее значение.

Свернем (4.17) по I, L , тогда

$$\bar{R}_{JK} = R_{JK} + 3\tilde{\theta}_{KJ} - \bar{N}\tilde{\tilde{\theta}}_{JK}, \tag{4.20}$$

откуда с учетом $\bar{N} > 3$ имеем

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{JK} = \frac{1}{9 - \bar{N}^2} [(\bar{N}\bar{R}_{JK} + 3\bar{R}_{KJ}) - (\bar{N}R_{JK} + 3R_{KJ})]. \tag{4.21}$$

В силу специфического строения ($\tilde{\tilde{\theta}}_{JK}$) в (4.21) достаточно положить $J=i, K=j$, т. к. для остальных комбинаций индексов в обеих частях (4.21) имеем нули. Получаем

$$\tilde{\tilde{\theta}}_{ij} = \bar{\rho}_{ij} - \rho_{ij}, \tag{4.22}$$

где

$$\rho_{ij} = \frac{\bar{N}R_{ij} + 9R_{ji}}{9 - \bar{N}^2}, \tag{4.23}$$

а $\bar{\rho}_{ij}$ так же выражается через \bar{R}_{ij} . Восстанавливая с помощью (4.19) компоненты тензоров (4.18a) и (4.18b), заключаем, что в силу (4.22) они также представимы в виде разностей одних и тех же функций от \bar{R}_{ij} и R_{ij} . Таким образом, в нашем случае

система (4.10) разрешима относительно тензоров (4.18), играющих в $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ роль тензоров (4.9), и подставляя найденные их компоненты в (4.17), мы получим после переноса в левую часть всех членов, содержащих компоненты \bar{R}_{IJK}^L , что имеют место (4.12). В связи с тем, что тензоры (4.18) определены покомпонентно, то и тензор W_{IJK}^L будет тем самым определен покомпонентно, и ввиду достаточной громоздкости этих формул мы отсылаем читателя к работе [54], где вычислены все ненулевые серии компонент этого тензора. Заметим для дальнейшего, что этот тензор имеет вид правой части (4.17) при дополнительных условиях (4.19), (4.22) и (4.23), причем следует положить $\bar{\rho}_{IJ} = 0$. В случае $T^2(M)$ тензор голоморфно-геодезической кривизны изучался Т. В. Капустиной ([28]).

Следуя [54], назовем $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ голоморфно-геодезически-плоским, если оно допускает голоморфно-геодезическое преобразование связности полного лифта в плоскую связность. Т. к. для плоской связности $\bar{\Gamma}$ имеем $\bar{W}_{IJK}^L = 0$, то необходимым признаком голоморфно-геодезически-плоского $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ является условие $W_{IJK}^L = 0$. Выясним вопрос о достаточности. Пусть для связности полного лифта Γ выполнено $W_{IJK}^L = 0$, тогда в силу сделанного выше замечания о тензоре W_{IJK}^L будем иметь

$$R_{IJK}^L = -2\tilde{\theta}_{[IJ]}\delta_K^L - 2\tilde{\theta}_{[IJ]}\tilde{\nu}_K^L - 2\theta_{[IJ]}\tilde{\nu}_K^L - 2\delta_{[I}^L\tilde{\theta}_{J]K} - 2\nu_{[J}^L\tilde{\theta}_{I]K} - 2\nu_{[J}^L\theta_{I]K}, \quad (4.24)$$

где тензоры (4.18) определяются из (4.23), (4.22) и (4.19) при $\bar{\rho}_{IJ} = 0$. Чтобы связность Γ была голоморфно-геодезически-плоской, должно быть обеспечено существование такого ковекторного поля полного лифта θ_J , что определяемое им на $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ преобразование связности переводит Γ в плоскую связность $\bar{\Gamma}$. Будем искать это поле из системы (4.18a)

$$\nabla_I \theta_J = \theta_{IJ} + \tilde{\theta}_I \theta_J + \tilde{\theta}_I \tilde{\theta}_J + \theta_I \tilde{\theta}_J. \quad (4.25)$$

Ее условия интегрируемости получаются повторным дифференцированием (4.25), альтернированием по индексам дифференцирования и применением известного соотношения $\nabla_{[I}\nabla_{J]}\theta_K = -\frac{1}{2}R_{IJK}^L$ вместе с (4.24). Будем иметь после упрощений

$$\nabla_I \theta_{JK} - \nabla_J \theta_{IK} = 0. \quad (4.26)$$

Покажем, что это условие в общем случае следует из (4.24), и для этого применим тождество Бианки $\nabla_M R_{IJK}^L + \nabla_I R_{JMK}^L + \nabla_J R_{MIK}^L = 0$, которое после подстановки (4.24) и свертывания по M и L дает

$$\frac{3-\bar{N}}{3} \nabla_{[I} \tilde{\theta}_{J]K} + \nabla_{[I} \tilde{\theta}_{K]J} + \nabla_{[K} \tilde{\theta}_{J]I} = 0. \quad (4.27)$$

Циклируя в (4.27) индексы I, J, K и сокращая полученное равенство на $-(\bar{N}+3) \neq 0$, имеем

$$\nabla_{[I} \tilde{\theta}_{J]K} + \nabla_{[J} \tilde{\theta}_{K]I} + \nabla_{[K} \tilde{\theta}_{I]J} = 0. \quad (4.28)$$

Если сложить (4.27) и (4.28), то получим

$$(6-\bar{N}) \nabla_{[I} \tilde{\theta}_{J]K} = 0 \quad (4.29)$$

Итак, при $\bar{N} \neq 6$ тензор (4.18с) удовлетворяет условию (4.26), но т. к. в силу (4.19) по тензору (4.18с) восстанавливается и тензор (4.18а), то и он удовлетворяет соотношению (4.26), и следовательно, условия интегрируемости системы (4.25) выполнены, и искомое поле θ_J существует. Определяемое им преобразование в силу (4.17) переводит связность Γ в связность $\bar{\Gamma}$ нулевой кривизны, так что имеет место установленная в [54]

Теорема. Для того чтобы $T_{n,m,p}^{0,1,2}(M)$ было голоморфно-геодезически-плоским, необходимо, а при $\bar{N} \neq 6$ и достаточно, чтобы тензор голоморфно-геодезической кривизны был равен нулю; при $\bar{N}=6$ дополнительно требуется, чтобы выполнялось условие (4.26).

Равенство (4.26) в силу (4.19), (4.22), (4.23) сводится к некоторому простому условию, которому должен удовлетворять тензор Риччи. Рассмотрим, когда возникает особый случай $\bar{N}=n+2m+3p=6$. Здесь $p \neq 0$, поскольку при этом мы имели бы полукасательное расслоение 1-го порядка, в котором аналогичные результаты были получены Т. В. Кирсановой ([30]), поэтому для входящих в \bar{N} величин $n=\dim M - \dim B_1$, $m=\dim B_1 - \dim B_2$, $p=\dim B_2$ возможны следующие комбинации значений.

1) $n=m=p=1$, тогда трехмерное многообразие M расслаивается дважды: субмерсией π_1 на одномерные слои, а субмерсией $\pi_2 \circ \pi_1$ — на двумерные.

2) $n=3, m=0, p=1$; четырехмерное M расслаивается на трёхмерные слои, а одномерная база пополняется струями 2-го порядка. Имеем случай, аналогичный [20].

3) $n=m=0, p=2$; здесь мы приходим к обычному 2-касательному расслоению $T^2(M)$ двумерного многообразия M .

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллин В. Н., n -мерные римановы пространства, допускающие поля ковариантно постоянных симметрических тензоров общего типа. I. Изв. вузов. Мат., 1970, № 5, 3—13 (РЖМат, 1970, 12А590)

2. —, n -мерные римановы пространства, допускающие поля ковариантно постоянных симметрических тензоров общего типа. II. Изв. вузов. Мат., 1970, № 6, 3—15 (РЖМат, 1970, 12A591)
3. *Беклемышев Д. В.*, Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. В сб. «Геометрия. 1963. Итоги науки. ВИНТИ АН СССР». М., 1965, 165—212 (РЖМат, 1966, 11A390)
4. *Василева М.*, Върху разлагането на обобщени B -тензорни полета на кривина. Науч. тр. Пловдив. ун-т. Мат., 1981, 19, № 1, 385—397 (РЖМат, 1983, 11A875)
5. —, B -многообразия с постоянна холоморфна кривина на четиримерните линейни холоморфни подпространства. Науч. тр. Пловдив. ун-т., Мат., 1982, 20, № 1, 251—263 (РЖМат, 1984, 8A726)
6. —, Едно достатъчно условие за конформно-холоморфно изображение. Науч. тр. Пловдив. ун-т. Мат., 1984, 22, № 1, 253—264 (РЖМат, 1986, 7A855)
7. *Вишневецкий В. В.*, Об одном свойстве аналитических функций над алгебрами и его приложения к изучению комплексных структур в римановых пространствах. Уч. зап. Казан. ун-т, 1966, 126, № 1, 5—12 (РЖМат, 1968, 2A566)
8. —, Структуры проективных пространств, порождаемые аффинорами. Изв. вузов. Мат., 1969, № 6, 35—46 (РЖМат, 1969, 11A509)
9. —, Аффинорные структуры пространств аффинной связности. Изв. вузов. Мат., 1970, № 1, 12—23 (РЖМат, 1970, 6A537)
10. —, Теория аффинорных модулей. Уч. зап. Казан. ун-т, 1970, 129, № 6, 33—53 (РЖМат, 1971, 2A554)
11. —, Аффинорные структуры как структуры, определяемые алгебрами. Уч. зап. Казан. ун-т, 1970, 129, № 6, 54—68 (РЖМат, 1971, 2A614)
12. —, Полиномиальные алгебры и аффинорные структуры. Тр. семинара кафедры геометрии. Казан. ун-т, 1971, вып. 6, 22—35 (РЖМат, 1972, 6A660)
13. —, Некоторые свойства дифференциально-геометрических структур, определяемых алгебрами. Науч. тр. Пловдив. ун-т, 1972, 10, № 1, 23—30 (РЖМат, 1973, 4A812)
14. —, Аффинорные структуры многообразий как структуры, определяемые алгебрами. Tensor, 1972, 26, 363—372 (РЖМат, 1973, 12A625)
15. —, О вещественных реализациях тензорных операций в пространствах над алгебрами. Изв. вузов. Мат., 1974, № 5, 62—65 (РЖМат, 1975, 1A780)
16. —, Пример нерегулярной касательной структуры. Геометрия обобщен. пространств. Уфа, 1982, 26—32 (РЖМат, 1983, 6A693)
17. —, К вопросу о тензоре голоморфно-проективной кривизны. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1983, № 15, 14—23 (РЖМат, 1984, 5A739)
18. —, О геометрической модели полукасательных структур. Изв. вузов. Мат., 1983, № 3, 73—75 (РЖМат, 1983, 8A728)
19. —, *Газиева Ф. А.*, Антикватернионные структуры и связности. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1980, № 12, 19—26 (РЖМат, 1981, 7A664)
20. —, *Гуреева Т. Г.*, Об одном классе полукасательных структур второго порядка. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1984, № 16, 9—19 (РЖМат, 1985, 5A617)
21. —, *Пантелеева Т. А.*, Голоморфные продолжения объектов в полукасательное расслоение второго порядка. Изв. вузов. Мат., 1985, № 9, 3—10 (РЖМат, 1986, 4A857)
22. —, *Розенфельд Б. А.*, *Широков А. П.*, О развитии геометрии пространств над алгебрами. Изв. вузов. Мат., 1984, № 7, 38—44 (РЖМат, 1985, 3A655)
23. —, *Широков А. П.*, *Шурыгин В. В.*, Пространства над алгебрами. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. 262 с. (РЖМат, 1987, 7A694К)
24. *Гантмахер Ф. Р.*, Теория матриц. М.: Наука, 1966, 576 с. (РЖМат, 1966, 11A126)
25. *Гаухман В. А.*, О диагоналируемых почти тензорных структурах. Ус-

- пехи мат. наук, 1964, 19, № 6, 226—228 (РЖМат, 1966, 5A455)
26. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986, 659 с. (РЖМат, 1986, 8A738K)
 27. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1979, 9, 247 с. (РЖМат, 1980, 1A800K)
 28. Капустина Т. В., К геометрии касательного расслоения второго порядка риманова пространства. Казан. ун-т, Казань, 1977, 8 с., библиогр. 3 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 19 июля 1977 г., № 2952-77 Деп.) (РЖМат, 1977, 11A637ДЕП)
 29. Кирсанова Т. В., Полукасательные структуры 1-го порядка. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1984, № 16, 41—47 (РЖМат, 1985, 5A618)
 30. —, Голоморфно проективные преобразования связности в полукасательном расслоении. VIII Всес. конф. по совр. пробл. геометрии. Тезисы докл., Одесса, 1984, 70
 31. —, Лифты и связности на многообразии с полукасательной структурой. Дифференц. геометрия (Саратов), 1985, № 8, 36—44 (РЖМат, 1986, 1A836)
 32. Кручкович Г. И., Условия интегрируемости регулярной гиперкомплексной структуры на многообразии. Укр. геометр. сб., 1970, вып. 9, 67—75 (РЖМат, 1971, 6A706)
 33. —, Гиперкомплексные структуры на многообразии. I. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1972, вып. 16, 174—201 (РЖМат, 1973, 3A684)
 34. —, Гиперкомплексные геодезические и их вещественные реализации. Тр. Моск. ин-та радиотехн., электрон. и автоматики, 1973, вып. 67, 3—11 (РЖМат, 1974, 5A708)
 35. Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969, 669 с. (РЖМат, 1969, 6A210K)
 36. Лобанова Л. Б., Геометрии над полиномиальными алгебрами. Геометр. сб. (Томск), 1984, № 24, 104—106 (РЖМат, 1985, 10A607)
 37. Мазанова Г. А., О тензорах модуля r -полурегулярного представления коммутативной алгебры. Пространства над алгебрами и некотор. вопр. теории сетей. Уфа, 1985, 33—53 (РЖМат, 1986, 3A822)
 38. Малахальцев М. А., L -геодезические линии и проектирование связности Егизаряна. Докл. АН СССР, 1986, 288, № 3, 543—546 (РЖМат, 1986, 11A829)
 39. Минибаева Ф. Г., Свертывание тензоров в пространстве над коммутативной алгеброй. Дифференц. геометрия (Саратов), 1975, № 2, 99—106 (РЖМат, 1976, 11A813)
 40. Наков Т., Върху някои метрични свързаности, запазващи бинарна афинорна структура. Науч. тр. Пловдив. ун-т, 1973, 11, № 2, 9—17 (РЖМат, 1974, 4A548)
 41. Норден А. П., Об одном классе четырехмерных A -пространств. Изв. вузов. Мат., 1960, № 4, 145—157 (РЖМат, 1961, 4A394)
 42. —, Пространства декартовой композиции. Изв. вузов. Мат., 1963, № 4, 117—128 (РЖМат, 1964, 3A367)
 43. —, О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства. Изв. вузов. Мат., 1972, № 12, 84—94 (РЖМат, 1973, 5A675)
 44. —, Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976
 45. —, Теория композиций. Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР. Пробл. геометрии, 1978, 10, 117—145 (РЖМат, 1979, 5A638)
 46. Остиану Н. М., Ступенчато-расслоенные пространства. Тр. геометр. семинара. ВИНТИ АН СССР, 1974, 5, 259—309 (РЖМат, 1975, 1A772)
 47. Павлов Е. В., Един клас пространства с дуална структура. Науч. тр. Пловдив. ун-т, 1973, 11, № 3, 17—23 (РЖМат, 1974, 5A713)
 48. —, Никои свързаности в многообразии снабдено с нерегулярна дуална структура. Науч. тр. Пловдив. ун-т. Мат., 1973, 11, № 4, 143—155 (РЖМат, 1975, 11A730)

49. —, Върху геометрията на многообразия с f -структура. Науч. тр. Пловдив. ун-т. Мат., 1983, 21, № 1, 307—314 (РЖМат, 1986, 1A840)
50. —, Об одной характеристике симметрического конформно-евклидова многообразия. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1982, № 14, 70—76 (РЖМат, 1983, 6A729)
51. —, Хоптериев Х., Алгебраичен метод за въвеждане тензор от Бохнеров тип в B -многообразия. Науч. тр. Пловдив. ун-т. Мат., 1980, 18, № 1, 191—201 (РЖМат, 1983, 9A638)
52. Пантелеева Т. А. Лифты дважды проектируемых тензорных полей в полукасательное расслоение второго порядка. Казан. ун-т. Казань, 1985, 20 с. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 1 июля 1985 г., № 4696—85Деп) (РЖМат, 1985, 11A612 ДЕП)
53. —, Дважды проектируемые тензорные поля и связности в полукасательном расслоении второго порядка. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1986, № 17, 43—53 (РЖМат, 1986, 8A755)
54. —, Голоморфно-геодезические преобразования в полукасательных расслоениях второго порядка. Казанск. ун-т. Казань, 1986, 18 с., Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 08.04.86 № 2476—В) (РЖМат, 1986, 9A699 ДЕП)
55. Рахула М. О., Инфинитезимальная связность в расслоении. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1977, 8, 163—182 (РЖМат, 1978, 1A630)
56. —, Теория катастроф и дифференциальная геометрия. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1984, 16, 35—80 (РЖМат, 1985, 4A680)
57. Салимов А. А., Почти аналитичность римановой метрики и интегрируемость структуры. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1983, № 15, 72—78 (РЖМат, 1984, 5A733)
58. —, Ф-оператор и почти аналитичность. Дифференц. геометрия (Саратов), 1983, № 7, 73—80 (РЖМат, 1984, 7A620)
59. —, Голоморфно-проективные преобразования связности на многообразиях со структурами, определяемыми алгебрами. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1984, № 16, 91—103 (РЖМат, 1985, 5A561)
60. —, Замечание о почти интегрируемости структуры. Изв. вузов. Мат., 1985, № 12, 70—71 (РЖМат, 1986, 6A936)
61. Сафиуллина Ф. Г., A -планарные преобразования связностей с кручением. Уфим. авиац. ин-т. Уфа, 1985. 20 с. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 4 сент. 1985 г. № 6506—85 Деп.) (РЖМат, 1986, 1A847ДЕП)
62. —, A -планарные преобразования связностей с кручением. Уфим. авиац. ин-т. Уфа, 1986, 13 с. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНТИ 19.06.86, № 4524—В) (РЖМат, 1986, 10A774ДЕП)
63. Синюков Н. С., Геодезические отображения римановых пространств. М., Наука, 1979, 255 с. (РЖМат, 1980, 1A821К)
64. —, О развитии современной дифференциальной геометрии в Одесском государственном университете им. И. И. Мечникова за последние годы. Изв. вузов. Мат., 1986, № 1, 69—74 (РЖМат, 1986, 7A788)
65. Супрунечко Д. А., Тешкевич Р. И., Перестановочные матрицы. Минск, 1966.
66. Талашин В. С., \mathcal{A} -планарное преобразование связности в вещественных реализациях многообразий над алгебрами. Изв. вузов. Мат., 1979, 12, 72—76 (РЖМат, 1980, 5A649)
67. —, Один способ расширения \mathcal{A} -планарных кривых до \mathcal{A} -субпланарных. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1983, № 15, 79—83 (РЖМат, 1984, 6A704)
68. —, Об одном применении принципа перенесения Котельникова—Штуди. Пространства над алгебрами и некотор. вопр. теории сетей. Уфа, 1985, 53—77 (РЖМат, 1986, 3A835)
69. Хоптериев Х., Многообразия с алгебраична структура. Науч. тр. Пловдив. ун-т, Мат., 1983, 21, № 1, 331—357 (РЖМат, 1986, 1A891)

70. Цаленко М. М., Интегрируемость тензорной структуры на многообразии класса С. Тр. геометр. семинара ВИНТИ, 1969, № 2, 333—355 (РЖМат, 1970, 4А639)
71. Шапуков Б. Н., Связности на дифференцируемых расслоениях. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Пробл. геометрии, 1983, 15, 61—93 (РЖМат, 1984, 5А725)
72. Широков А. П., Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров. Докл. АН СССР, 1955, 102, № 3, 461—464 (РЖМат, 1956, 6109)
73. —, К вопросу о чистых тензорах и инвариантных подпространствах в многообразиях в почти алгебраической структуре. Уч. зап. Казан. ун-т, 1966, 126, № 1, 81—89 (РЖМат, 1968, 2А590)
74. —, Об одном типе G -структур, определяемых алгебрами. Тр. геометр. семинара ВИНТИ АН СССР, 1966, 1, 425—456 (РЖМат, 1967, 6А383)
75. —, Структуры на дифференцируемых многообразиях. Итоги науки и техн. ВИНТИ Алгебра, Топология, Геометрия, 1967, 1969, 127—188 (РЖМат, 1970, 2А629)
76. —, Структуры на дифференцируемых многообразиях Итоги науки и техн. ВИНТИ Алгебра. Топология. Геометрия, 1974, 153—207 (РЖМат, 1974, 11А795)
77. —, О голоморфно-проективных преобразованиях в касательном расслоении. Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т, 1979, № 11, 111—114 (РЖМат, 1980, 5А647)
78. —, Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами. Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР. Пробл. геометрии, 1981, 12, 61—95 (РЖМат, 1981, 10А546)
79. Широков П. А., Тензорное исчисление Алгебра тензоров. Казань, Казан. ун-т, 1961, 447 с. (РЖМат, 1963, 8А333К)
80. Шурыгин В. В., Чистые тензоры на многообразиях с коммутативной алгебраической структурой. Изв. вузов. Мат., 1978, № 3, 120—124 (РЖМат, 1978, 9А663)
81. Юрьев В. А., Некоторые вопросы линейчатой геометрии многообразий гиперболических прямых. Тр. семинара кафедры геометрии. Казан. ун-т, 1974, вып. 7, 176—184 (РЖМат, 1975, 6А797)
82. —, Связность и геодезические линии многообразия изотопных прямых гиперболического пространства. Геометрия обобщен. пространств. Уфа, 1982, 67—88 (РЖМат, 1983, 5А577)
83. Carfagna D'Andrea Antonella, Di Febo Marinelli Rosa, Su una generalizzazione delle strutture quasi tangenti. Rend. mat. e appl., 1982, 2, № 2, 257—267 (РЖМат, 1983, 3А685)
84. Clarc R. S., Goel D. S., Almost tangent manifolds of second order. Tohoku Math. J., 1972, 24, № 1, 79—92 (РЖМат, 1972, 11А529)
85. Duc Tong Van, Structure presque-transverse. J. Differen. Geom., 1979, 14, № 2, 215—219 (РЖМат, 1981, 5А634)
86. Eliopoulos H. A., Some properties of differentiable structures defined by nilpotent operators of degree r . Bull. Soc. Math. Grece, 1956, 7, Fasc. 1, 81—94
87. —, Structures preque tangentes sur les variétés différentiables. C. r. Acad. sci., 1962, 255, № 14, 1563—1565 (РЖМат, 1964, 5А424)
88. —, Structures r -tangentes sur les variétés différentiables. C. r. Acad. sci., 1966, 263, № 13, А413—А416 (РЖМат, 1967, 5А538)
89. —, Homogeneous r -tangent structures. Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1972, 58, № 4, 476—480 (РЖМат, 1973, 7А708)
90. —, Hermitian structures subordinated to r -tangent structures. Tensor, 1972, 25, 313—319 (РЖМат, 1974, 1А675)
91. —, On certain Riemannian structures compatible with r -tangent structures. Tensor, 1982, 39, Commem. Vol. 3, 23—30 (РЖМат, 1984, 8А728)
92. Fujimura Sigeyoshi, Q -connections and their changes on an almost quaternion manifold. Hokkaido Math. J., 1976, 5, № 2, 239—248 (РЖМат, 1977, 4А711)

93. *Goldberg S. L., Yano K.*, Polynomial structures on manifolds. Kodai Math. Semin. Repts, 1970, 22, № 2, 199—218 (PЖМат, 1971, 2A613)
94. *Gouli-Andreou Florence*, Symplectic structures subordinated to r -tangent structures. Тензор, 1982, 38, Commem. Vol. 2, 163—168 (PЖМат, 1984, 10A604)
95. *Gribachev K. I., Djeleпов G. D., Mekerov D. G.*, On some subclasses of generalized B -manifold. Докл. Болг. АН, 1985, 38, № 4, 437—440 (PЖМат, 1985, 12A803)
96. —, *Mekerov D. G., Djeleпов G. D.*, Generalised B -manifold. Докл. Болг. АН, 1985, 38, № 3, 299—302 (PЖМат, 1985, 10A694)
97. —, —, —, On the geometry of almost B -manifolds. Докл. Болг. АН, 1985, № 5, 563—566 (PЖМат, 1985, 12A804)
98. *Hangan T.*, On the canonical form of a second order mixed tensor. Rev. math. pures et appl. (RPR), 1962, 7, № 4, 617—626 (PЖМат, 1964, 9A396)
99. —, Sur l'intégrabilité de certaines G -structures tensorielles. C. r. Acad. sci., 1979, AB288, № 17, A835—A837 (PЖМат, 1979, 11A614)
100. *Kähler E.*, Über eine bemerkenswerte Hermitesche Metrie. Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ., 1933, 9, 173—186
101. *Lehmann-Lejeune J.*, Intégrabilité des G -structures définies par une 1-forme à valeurs dans le module des champs de vecteurs, 0 -déformable. C. r. Acad. sci., 1964, 259, № 23, 4216—4219 (PЖМат, 1965, 8A418)
102. —, Sur l'intégrabilité de certaines G -structures. C. r. Acad. sci. 1964, 258, № 22, 5326—5329 (PЖМат, 1965, 4A409)
103. —, Intégrabilité des G -structures définies par une 1-forme à valeurs dans le module des champs de vecteurs, 0 -déformable et nilpotente. C. r. Acad. sci., 1965, 260, № 3, 772—775 (PЖМат, 1965, 8A417)
104. —, Intégrabilité des G -structures définies par une 1-forme 0 -déformable à valeurs dans le fibre tangent. Ann. Inst. Fourier, 1966 (1967), 16, № 2, 329—387 (PЖМат, 1967, 10A544)
105. *Mekerov D. G.*, On some classes almost B -manifolds. Докл. Болг. АН, 1985, 38, № 5, 559—561 (PЖМат, 1985, 12A805)
106. *Opozda B.*, A theorem on metric polynomial structures. Ann. pol. math., 1983, 41, № 2, 139—147 (PЖМат, 1984, 5A761)
107. *Pavlov E. V.*, Conformally equivalent generalized B -manifolds. Докл. Болг. АН, 1985, 38, № 10, 1315—1317 (PЖМат, 1986, 6A957)
108. —, *Hopteriev H. T.*, Manifolds with an algebraic structure and CH -mappings. Докл. Болг. АН, 1982, 35, № 2, 141—144 (PЖМат, 1982, 12A752)
109. —, —, A sufficient condition for CH -mapping. Докл. Болг. АН, 1984, 37, № 4, 473—475 (PЖМат, 1984, 11A644)
110. —, —, Conformally equivalent B -manifolds. Докл. Болг. АН, 1986, 39, № 1, 15—17 (PЖМат, 1986, 11A815)
111. *Prvanović M.*, Holomorphically projective transformations in a locally product space. Math. balkan., 1971, № 1, 195—213 (PЖМат, 1972, 3A660)
112. *Scheffers G.*, Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich complexen Funktionen. Berichte Sächs. Acad. Wiss., 1983, 45, 828—848
113. *Schouten J. A., Yano K.*, On invariant subspaces in the almost complex X_{2n} . Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1955, A58, № 3, 261—269 (PЖМат, 1957, 6659)
114. *Tachibana Shun-ichi*, Analytic tensor and its generalization. Tôhoku Math. J., 1960, 12, № 2, 208—221 (PЖМат, 1962, 8A397)
115. —, *Koto Satoshi*, On almost-analytic functions, tensors and invariant subspaces. Tôhoku Math. J., 1962, 14, № 2, 177—186 (PЖМат, 1965, 2A650)
116. *Tashiro Yoshihiro*, On holomorphically projective correspondence in an almost complex space. Math. J. Okayama Univ., 1957, 6, № 2, 147—152 (PЖМат, 1959, 4158)
117. *Yano Kentaro, Kobayashi Shoshichi*, Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles. I. General theory. J. Math. Soc. Jap., 1966, 18, № 2, 194—210 (PЖМат, 1967, 8A451)