S. V. Buyalo, V. L. Kobel'skii, Generalized graph-manifolds of nonpositive curvature,
Algebra i Analiz, 1999, Volume 11, Issue 2, 64–87

Алгебра и анализ
Том 11 (1999), вып. 2

ОБОБЩЕННЫЕ ГРАФМНОГООБРАЗИЯ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

© С. В. Буяло, В. Л. Кобельский

В работе изучаются необходимые и достаточные условия, при которых обобщенные графмногообразия обладают метрикой неположительной кривизны (для краткости, NPC-метрикой). NPC-метрика на графмногообразии существует тогда и только тогда, когда некоторые ее параметры (плоские метрики на торах склейки) удовлетворяют уравнению геометризации. Такое уравнение, ранее известное для трехмерных графмногообразий, в работе обобщается на случай графмногообразий произвольной размерности. Пользуясь им, мы указываем критерий существования NPC-метрики на четырехмерных графмногообразиях, состоящих из трех блоков.

§0. Введение

Какие замкнутые многообразия допускают метрику неположительной (секционной) кривизны? Известно, что такое многообразие M должно быть асферическим (по теореме Адамара–Картана); каждая разрешимая подгруппа фундаментальной группы должна быть почти абелевой [LY, GW]; если подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(M)$ изоморфна $\mathbb{Z}^n$, $n \geqslant 1$, то ее нормализатор виртуально расщепляется ([E, гл. 7]). Эти хорошо известные необходимые условия не являются достаточными, как это было показано в [KL, L] на примерах трехмерных графмногообразий. В размерности 3 необходимые и достаточные условия для существования NPC-метрик найдены в [L] для хакеновых многообразий, кроме графмногообразий, и в [БК2] для графмногообразий.

Настоящая работа является первым шагом в обобщении результатов работы [БК2] на случай графмногообразий произвольной размерности $n = m+2$. Такие многообразия склеены из блоков, которые являются тривиальными расслоениями на m-мерные торы T^m над компактными поверхностями с краем (точные определения приведены в п. 1.1). Мы называем их *обобщенными* графмногообразиями.

Первый автор частично поддержан грантами 96-01-00674, 96-15-00675 и CRDF RM1-169; второй автор частично поддержан грантами 96-15-00675 и CRDF RM1-169.

Любая NPC-метрика на обобщенном графмногообразии имеет весьма специальную структуру, и наиболее существенная информация о метрике может быть описана конечным числом параметров. В случае $n = 3$ в [БК1] показано, что эти параметры удовлетворяют уравнению *геометризации*, коэффициенты которого являются топологическими инвариантами многообразия. Критерий, полученный в [БК2], дает необходимые и достаточные условия существования решения уравнения геометризации из класса NPC-метрик. Случай бесконечных трехмерных графмногообразий рассмотрен в [БК3].

Любопытно, что уравнение геометризации можно рассматривать как дискретный аналог уравнений Максвелла классической электродинамики, и его решения, соответствующие NPC-метрикам, являются критическими конфигурациями для функционала действия в точности такого же вида, как тот, который описывает взаимодействие электромагнитного поля со скалярным заряженным полем (см. [В]).

В настоящей работе мы получаем уравнение геометризации для обобщенных графмногообразий произвольной размерности $n = m+2$. В случае $n = 3$ оно совпадает с уравнением, полученным в [БК2]. Однако обобщение на случай $n > 3$ не является непосредственным. Так, коэффициенты уравнения геометризации, которые являются численными инвариантами многообразия для $n = 3$, в случае $n > 3$ являются линейными отображениями. Другое существенное отличие состоит в том, что уравнение геометризации нелинейно для $n > 3$. Для $n = 3$ оно квазилинейно, и это могло бы объяснить то, что критерий существования его (геометрических) решений, полученный в [БК2], является довольно компактным. Этот критерий формулируется в терминах квадратичной формы H с коэффициентами, составленными из коэффициентов уравнения геометризации. Неясно, существует ли аналог формы H для $n > 3$ и как выглядит критерий существования решений уравнения геометризации даже для $n = 4$, исключая несколько частных случаев.

Хотя мы не знаем „физической“ интерпретации уравнения геометризации для $n > 3$, аналогичной упомянутой выше для $n = 3$, можно ожидать, что нелинейность и трудности с нахождением критерия существования решений связаны с тем, что соответствующая группа калибровочных преобразований является неабелевой в отличие от случая $n = 3$ (см. [В]).

Тем не менее в некоторых случаях мы можем извлечь нетривиальную геометрическую информацию из уравнения геометризации для обобщенных графмногообразий, например критерий геометризации для четырехмерных графмногообразий, состоящих из трех блоков. Этот результат не сводится к известному случаю трехмерных графмногообразий.

Структура работы. В §1 мы определяем обобщенные графмногообразия и описываем вспомогательную алгебраическую структуру (W-структуру), ассоциированную с обобщенным графмногообразием M. Эта структура содержит информацию, достаточную для того, чтобы заключить, допускает ли M NPC-метрику или нет. Мы показываем, что W-структура ориентированного M зависит только от фундаментальной группы $\pi_1(M)$.

Наиболее важными инвариантами W-структуры являются отображения зарядов, которые вводятся в §2. Уравнение геометризации представляет отображения зарядов как взвешенные суммы ортогональных проекций относительно неизвестной метрики. Мы выводим его в §2. В §3 мы устанавливаем критерий геометризации для четырехмерных графмногообразий, состоящих из трех блоков (теорема 3.4).

Благодарности. Первый автор благодарен FIM ETH Цюрих, где эта работа была завершена, за гостеприимство и прекрасные условия для работы.

§1. Обобщенные графмногообразия и W-структуры

1.1. Пусть $n \geqslant 3$, $m = n - 2$. *Обобщенным графмногообразием* мы называем замкнутое ориентируемое многообразие M размерности n, которое состоит из конечного числа блоков M_v, $M = \bigcup_{v \in V} M_v$. При этом должны выполняться следующие условия (1.1.1)–(1.1.3).

(1.1.1) Каждый блок M_v является тривиальным расслоением на m-мерные торы T^m над компактной ориентируемой поверхностью Φ_v с краем, отличной от диска и кольца;

(1.1.2) многообразие M склеено из блоков M_v, $v \in V$, посредством диффеоморфизмов между их краевыми компонентами (не исключается случай склейки краевых компонент одного блока);

(1.1.3) склеивающие диффеоморфизмы не отождествляют гомотопические классы слоевых торов.

В дальнейшем мы для краткости пользуемся термином „графмногообразие“ вместо термина „обобщенное графмногообразие“.

1.2. С графмногообразием M ассоциируется его *граф* $G = G_M$, двойственный к разложению M на блоки. Таким образом, множество вершин графа G совпадает с множеством блоков V и множество (неориентированных) ребер E есть множество пар склеиваемых блоков. Каждое ребро $e \in E$ может быть отождествлено с $(m+1)$-мерным тором T_e, общим для склеиваемых блоков. Множество ориентированных ребер обозначается W. Для ребра $w \in W$ противоположно ориентированное ребро обозначается через $-w$. Для вершины $v \in V$ через ∂v обозначается множество краевых компонент блока M_v, таким образом, ∂v есть подмножество в W, состоящее из всех ребер, выходящих из v.

1.3. Любая метрика неположительной (секционной или, более общо, в смысле А. Д. Александрова) кривизны на M имеет специальную структуру: торы склейки T_e, $e \in E$, всегда могут быть выбраны плоскими и вполне геодезическими; метрика локально расщепляется вдоль каждого блока M_v совместимо со структурой расслоения, т.е. каждая точка $x \in M_v$ имеет окрестность $U \subset M_v$, изометричную метрическому произведению $D^m \times U'$, где $D^m \subset \mathbb{R}^m$ — открытый диск и U' — окрестность на поверхности неположительной кривизны с краем; для вершины $v \in V$ все слоевые торы $T_v \subset M$ плоские, вполне геодезические и попарно-изометричные. Хотя каждый блок M_v диффеоморфен произведению $T^m \times \Phi_v$, однако, как правило, глобального метрического расщепления вдоль M_v для NPC-метрики на M не существует. Препятствием для такого расщепления являются нетривиальные голономии вдоль Φ_v. Все это следует из хорошо известных результатов о связи между геометрией многообразия неположительной кривизны и алгебраической структурой его фундаментальной группы (см. [BGS, E]), и из того факта, что фундаментальная группа каждого блока M_v вкладывается в $\pi_1(M)$.

1.4. Допускает графмногообразие M NPC-метрику или нет, зависит только от его фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Здесь мы описываем алгебраическую структуру, ассоциированную с M, которая содержит соответствующую информацию. Эта структура является модификацией на случай произвольного $m \in \mathbb{N}$ структуры, введенной в [БК1] для $m = 1$. Мы называем ее W-структурой (W в честь Ф. Вальдхаузена, который первый ввел и использовал ее основной элемент — базисы Вальдхаузена, см. [W1, 2]).

Предположим, что на торе T^n имеется плоская метрика. Такая метрика однозначно (с точностью до изометрии) определена положительно определенной квадратичной формой β на группе гомологий $H_1(T^n;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^n$. Значение β на $a \in H_1(T^n;\mathbb{Z})$ равно квадрату длины замкнутой геодезической на T^n, представляющей a. NPC-метрика на блоке M_v, для которой край ∂M_v геодезический, определяет положительно определенную квадратичную форму β_w на $H_1(T_w;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{m+1}$ для каждого ребра $w \in \partial v$. В этом случае набор $\beta_v = \{\beta_w \,|\, w \in \partial v\}$ удовлетворяет *условию Либа* (см. п. 2.3, (i), (ii)), которое также достаточно для продолжимости формы β_v до NPC-метрики на M_v.

Пусть G — граф графмногообразия M, V — его множество вершин, W — множество ориентированных ребер. С каждым ребром $w \in W$ ассоциируется группа $L_w = H_1(T_w;\mathbb{Z})$, изоморфная $\mathbb{Z}^{m+1}$, и с каждой вершиной $v \in V$ — группа $F_v \simeq \mathbb{Z}^m$, первая группа гомологий слоя T_v блока M_v. Если $w \in \partial v$, то F_v вкладывается в L_w как максимальная подгруппа F_w. Группу $F_v \simeq F_w$ мы называем *слоевой* группой.

Склейка блоков описывается изоморфизмом $g_w\colon L_{-w} \to L_w$, удовлетворяющим условиям

$$g_{-w} = g_w^{-1}; \qquad (1.4.1)$$

$$g_w(F_{-w}) \neq F_w. \qquad (1.4.2)$$

Условие (1.4.2) эквивалентно условию (1.1.3).

Опишем множество выделенных базисов решеток L_w, $w \in W$. Это удобно делать в терминах их групп преобразований. Пусть $f_v = (f_v^1, \ldots, f_v^m)$ — базис группы F_v. Мы выбираем базис z_w, f_w решетки L_w таким образом, что $f_w = f_v$ и набор $\{z_w \,|\, w \in \partial v\}$ соответствует краю поверхности Φ_v для некоторой тривиализации $M_v \simeq T^m \times \Phi_v$.

Группа преобразований таких базисов состоит из матриц вида

$$h_w = \begin{pmatrix} \varepsilon_v & 0 \\ n_w & \sigma_v \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_v = \pm 1$, $n_w \in \mathbb{Z}^m$, $\sigma_v \in GL(m, \mathbb{Z})$, и действует на базисах справа:

$$(z_w, f_w) \cdot h_w = (z_w \cdot \varepsilon_v + f_w \cdot n_w, f_w \cdot \sigma_v).$$

Мы требуем, чтобы для каждой вершины $v \in V$ выполнялись следующие условия:

$$\varepsilon_v \cdot \det \sigma_v = 1, \tag{1.4.3}$$

$$\sum_{w \in \partial v} n_w = 0. \tag{1.4.4}$$

Легко видеть, что множество $\mathcal{H}$ матриц

$$h = \bigoplus_{w \in W} h_w,$$

удовлетворяющих условиям (1.4.3), (1.4.4), является группой. Условие (1.4.3) означает, что каждый базис z_w, f_w согласован с ориентацией решетки L_w, а условие (1.4.4) означает, что эти базисы соответствуют тривиализациям блока M_v.

Пусть $g_w^{z,f}$ — матрица преобразования g_w в базисе (z, f). Тогда для $(\overline{z}, \overline{f}) = (z, f) \cdot h$, $h \in \mathcal{H}$, имеем

$$g_w^{\overline{z},\overline{f}} = h_w^{-1} \circ g_w^{z,f} \circ h_{-w}. \tag{1.4.5}$$

Из (1.4.3) следует, что

$$\det g_w^{\overline{z},\overline{f}} = \det g_w^{z,f},$$

т.е. это число не меняется при преобразовании $(\overline{z}, \overline{f}) = (z, f) \cdot h$.

W-*структурой,* ассоциированной с графмногообразием M, называется набор решеток $\{L_w \,|\, w \in W\}$, удовлетворяющий условиям (1.4.1), (1.4.2), и множество их базисов вида $\Theta = (z, f) \cdot \mathcal{H}$, где (z, f) — набор базисов, как выше, и $\det g_w^{z,f} = -1$ для каждого ребра $w \in W$. Элементы $(z, f) \in \Theta$ называются *базисами Вальдхаузена.*

1.5. Здесь мы описываем структуру фундаментальной группы $\pi_1(M)$ графмногообразия M и его универсального накрывающего $\widetilde{M}$, а также доказываем, что W-структура, ассоциированная с ориентированным M, однозначно определяется группой $\pi_1(M)$.

В силу (1.1.1) краевые компоненты каждого блока M_v несжимаемы в M_v (т.е. включение $\partial M_v \subset M_v$ индуцирует мономорфизм на уровне фундаментальных групп). Пользуясь теоремой Ван-Кампена и HNN-конструкцией, можно представить $\pi_1(M)$ как фундаментальную группу графа групп (см. [Serr]), графом которого является граф G_M, а группами вершин и ребер — фундаментальные группы блоков M_v и торов склейки T_e соответственно. Отсюда следует, что каждый тор склейки T_e несжимаем в M.

Универсальное накрывающее $\widetilde{M_v}$ каждого блока M_v диффеоморфно произведению $\mathbb{R}^m \times \widetilde{\Phi}_v$, где $\widetilde{\Phi}_v$ — универсальное накрывающее базы Φ_v, в частности, $\widetilde{M_v}$ стягиваемо (в силу (1.1.1)).

Пусть $\widetilde{G}_M$ — дерево Басса–Серра графа групп $(G_M, \pi_1(M_v), \pi_1(T_e))$ (см. [Serr]). Группа $\pi_1(M)$ действует на $\widetilde{G}_M$ таким образом, что $G_M = \widetilde{G}_M/\pi_1(M)$. Стабилизаторы вершин и ребер этого действия являются подгруппами, сопряженными фундаментальным группам блоков M_v и торов склейки T_e соответственно.

Пользуясь действием группы $\pi_1(M)$ на дереве $\widetilde{G}_M$, построим многообразие $\widetilde{M}$, которое состоит из универсальных накрывающих $\widetilde{M_v}$, склеенных вдоль краевых компонент, как это предписано деревом $\widetilde{G}_M$, т. е. граф $\widetilde{G}_M$ является двойственным к указанному разложению $\widetilde{M}$ на блоки $\widetilde{M_v}$. Из вышесказанного следует, что многообразие $\widetilde{M}$ односвязно, и фундаментальная группа $\pi_1(M)$ свободно действует на $\widetilde{M}$ таким образом, что фактор-пространство $\widetilde{M}/\pi_1(M)$ диффеоморфно многообразию M. Поэтому $\widetilde{M}$ является универсальным накрывающим многообразия M.

Из этого описания универсального накрывающего легко следует, что M асферично и является $K(\pi, 1)$-пространством.

1.5.1. Предложение. *Пусть M — графмногообразие, т. е. замкнутое ориентируемое многообразие, которое состоит из блоков, удовлетворяющих условиям* (1.1.1)–(1.1.3). *Тогда любое разложение M на блоки, удовлетворяющее* (1.1.1)–(1.1.3), *совпадает с исходным* (*с точностью до изотопии*).

Из этого предложения следует, что W-структура, ассоциированная с многообразием M, является его инвариантом и однозначно определена фундаментальной группой $\pi_1(M)$ и выбором ориентации на M.

Предложение 1.5.1 вытекает из следующих лемм 1.5.2 и 1.5.3.

1.5.2. Лемма. *Пусть $M = \bigcup_{v\in V} M_v$ — графмногообразие и пусть $V' \subset V$ — некоторое множество его блоков. Объединение $M' = \bigcup_{v\in V'} M_v$ из блоков V'*

гомеоморфно тривиальному расслоению на m-мерные торы T^m над компактной ориентируемой поверхностью $\Phi_{V'}$ с краем, удовлетворяющему условию (1.1.1), *тогда и только тогда, когда V' состоит из единственного блока.*

Доказательство. Предположим, что $M' = \bigcup_{v \in V'} M_v$ удовлетворяет условию леммы, т. е. является тотальным пространством тривиального расслоения $p\colon M' \to \Phi_{V'}$ со слоем T^m, где $m = \dim M - 2 \geqslant 1$. Тогда ядро K индуцированного гомоморфизма $p_*\colon \pi_1(M') \to \pi_1(\Phi_{V'})$ изоморфно $\mathbb{Z}^m$.

Ядро K_v гомоморфизма $(p_v)_*\colon \pi_1(M_v) \to \pi_1(\Phi_v)$, индуцированного проекцией расслоения $p_v\colon M_v \to \Phi_v$, $v \in V'$, также изоморфно $\mathbb{Z}^m$. В силу 1.1.3 для доказательства леммы достаточно показать, что $K_v \subset K$ (для простоты обозначений мы отождествляем $\pi_1(M_v)$ с подгруппой в $\pi_1(M')$). Допустим, что найдется $\alpha \in K_v \setminus K$. Поскольку группа K — свободная абелева и $\pi_1(\Phi_v)$ — свободная ранга $\geqslant 2$, группа $(p_v)_*(K \cap \pi_1(M_v))$ имеет ранг $\leqslant 1$. Поэтому найдется элемент $\beta \in \pi_1(M_v)$, порождающий вместе с α свободную абелеву группу H ранга 2, для которого $H \cap K = 1$. Это противоречит тому, что $\pi_1(\Phi_{V'}) = p_*(\pi_1(M'))$ является свободной группой. •

1.5.3. Лемма. *Пусть A — подгруппа в $\pi_1(M)$, изоморфная $\mathbb{Z}^{n-1}$, где $n = \dim M$. Тогда $A \subset B$, где $B \subset \pi_1(M)$ — некоторая подгруппа, сопряженная фундаментальной группе $\pi_1(M_v)$ некоторого блока $M_v \subset M$.*

Будем говорить, что элемент $\alpha \in \pi_1(M)$ *разделяется тором склейки* T_e, если любая петля из свободного гомотопического класса α пересекает T_e.

Для ребра $e = (w, -w)$ графа G_M мы отождествляем группу $L_e = L_w = L_{-w}$ с реберной группой $\pi_1(T_e)$ графа групп $(G_M, \pi_1(M_v), \pi_1(T_e))$. Пусть $F_e = F_w \cap F_{-w}$ — пересечение соответствующих слоевых групп. Следующая лемма является ключевым шагом в доказательстве леммы 1.5.3.

1.5.4. Лемма. *Пусть H — подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(M)$, изоморфная $\mathbb{Z}^2$ и содержащая элемент α, который не лежит в объединении подгрупп, сопряженных с группами вида $\pi_1(M_v)$, $v \in G_M$. Тогда*

(i) *$H \cap L_e \subset F_e$ для каждого ребра e графа G_M;*
(ii) *существует ребро e_0, для которого α разделяется тором T_{e_0};*
(iii) *$H \cap L_{e_0} \neq 1$.*

Доказательство. (i) Говоря об отображениях многообразий, мы имеем в виду гладкую или PL категорию. Найдется погружение $f\colon T^2 \to M$ тора T^2, которое представляет H и трансверсально каждому тору склейки T_e. Пусть $\Gamma_e \subset T^2$ — прообраз пересечения $f(T^2)$ с T_e. Если компонента $\gamma_e \subset \Gamma_e$ стягиваема в T^2, то ее образ в M стягиваем в T_e, поскольку тор T_e несжимаем в M. В этом случае можно избавиться от γ_e с помощью подходящей гомотопии погружения f. Поэтому мы считаем, что каждая компонента в Γ_e не стягиваема в T^2 и по условию $\Gamma_e \neq \varnothing$ для некоторого ребра e. Будучи простыми замкнутыми кривыми, эти компоненты представляют один и тот же неделимый элемент $\beta \in H$, $\beta \neq 1$. По построению имеем $\beta \in L_e$, и достаточно показать, что $\beta \in F_e$.

Допустим, что $\beta \notin F_e$. Тогда без потери общности можно считать, что $\beta \notin F_w$, где $e = (w, -w)$. Следовательно, элемент $(p_v)_*(\beta) \in \pi_1(\Phi_v)$ представляет некоторое кратное краевой компоненты $(\partial\Phi_v)_w$ поверхности Φ_v, соответствующей ребру w, где $w \in \partial v$. Поскольку $\alpha \notin L_e$ и, следовательно, α независим с β, это означает, что $(\partial\Phi_v)_w$ гомотопна в Φ_v некоторой компоненте края $\partial\Phi_v$ посредством гомотопии, которую нельзя выдавить на край $\partial\Phi_v$. Это, однако, противоречит условию (1.1.1).

(ii) Напомним, что группа $\pi_1(M)$ действует на дереве Басса–Серра $\widetilde{G}_M$. Согласно условию, α не оставляет неподвижной никакую вершину в $\widetilde{G}_M$. Поэтому α является гиперболической изометрией дерева $\widetilde{G}_M$, и любое ребро, лежащее на инвариантной прямой изометрии α, дает требуемый тор T_{e_0}.

(iii) Это утверждение, очевидно, вытекает из (ii) и доказательства (i). •

Доказательство леммы 1.5.3. Допустим, что утверждение неверно, и существует элемент $\alpha \in A$, который не лежит ни в какой группе, сопряженной с группой вида $\pi_1(M_v)$ для $v \in G_M$.

Согласно п. (i) леммы 1.5.4 найдется ребро e_0, для которого α разделяется тором T_{e_0}. Рассматривая содержащие α подгруппы ранга 2 в A, находим, согласно п. (i), (iii) леммы 1.5.4, $n-2$ независимых элемента в F_{e_0}. Это противоречит тому, что $\operatorname{rank} F_{e_0} = n-3$. •

Доказательство предложения 1.5.1. Из лемм 1.5.2 и 1.5.3 вытекает, что любое разложение многообразия M на блоки, удовлетворяющее условиям (1.1.1)–(1.1.3), является подразделением исходного. Тогда в силу (1.1.3) оно совпадает с исходным разложением. •

1.5.5. Замечание. Вероятно, предложение 1.5.1 можно доказать, пользуясь леммой 1.5.2 и недавними результатами о JSJ-разложениях конечно-представленных групп (см. [FP, DS]). Однако применение этой теории к нашей ситуации потребовало бы значительных усилий, и мы предпочли дать прямое доказательство.

§2. Инварианты W-структуры и уравнение геометризации

Мы рассматриваем два типа инвариантов W-структуры: индекс пересечения j_w для каждого ребра $w \in W$ и отображение заряда K_v для каждой вершины $v \in V$. Индекс пересечения $j_w \neq 0$ является натуральным числом, а отображение заряда K_v — линейным отображением. Их инвариантность означает, что, будучи определенными с помощью выбора некоторого базиса Вальдхаузена $(z, f) \in \Theta$, они на самом деле не зависят от этого выбора.

2.1. Индексы пересечения. Выберем некоторый базис Вальдхаузена $(z, f) \in \Theta$. Пусть

$$g_w = \begin{pmatrix} a_w & b_w \\ c_w & d_w \end{pmatrix}$$

— матрица склейки для ребра w относительно этого базиса, т. е.

$$(z_{-w}, f_{-w}) = (z_w, f_w) \cdot g_w. \tag{2.1.1}$$

Здесь $a_w \in \mathbb{Z}$, строка b_w и столбец c_w состоят из m целых чисел, d_w является целочисленной матрицей размера $m \times m$.

Из условия 1.4.2 вытекает, что строка b_w ненулевая, поэтому определен н.о.д. ее элементов $j_w, j_w \geqslant 1$. Число j_w называется *индексом пересечения* W-структуры на ребре w.

Предположим, что мы выбрали другой базис $(\overline{z}, \overline{f}) = (z, f) \cdot h$ с $h \in \mathcal{H}$. Пользуясь условием 1.4.5, получаем, что элементы матрицы склейки преобразуются следующим образом:

$$\overline{b}_w = \varepsilon_v b_w \sigma_{v'}, \tag{2.1.2}$$

$$\overline{d}_w = -\varepsilon_v \sigma_v^{-1} n_w b_w \sigma_{v'} + \sigma_v^{-1} d_w \sigma_{v'}. \tag{2.1.3}$$

Здесь $n_w b_w$ есть $m \times m$-матрица с элементами $(n_w b_w)^{ij} = n_w^i b_w^j$, вершина $v' \in V$ определена условием $-w \in \partial v'$.

Из (2.1.2) следует, что число j_w не зависит от выбора базиса Вальдхаузена, поскольку $\det \sigma_{v'} = \pm 1$, где $-w \in \partial v'$.

Строка b_{-w} является целочисленной линейной комбинацией элементов строки b_w, поскольку $\det g_w = -1$ и $g_{-w} = g_w^{-1}$. Поэтому $j_{-w} \geqslant j_w$ и, следовательно, $j_{-w} = j_w$.

Геометрически j_w есть число компонент пересечения $T_w \cap T_{-w} \subset T_e$, $e = (w, -w)$, где слоевые m-мерные торы T_w, T_{-w} являются плоскими вполне геодезическими подторами в плоском $(m+1)$-мерном торе склейки T_e.

2.2. Отображения зарядов. Определим сначала понятие канонической ориентации пересечения. Предположим, что в (вещественном) векторном пространстве L имеется упорядоченная пара различных гиперподпространств (F, F'). Предположим также, что фиксирована пара (O, O') противоположных ориентаций пространства L и ориентации на F, F'. Тогда мы следующим образом определяем *каноническую* ориентацию пересечения $F \cap F'$.

Пусть u_F, $u_{F'}$ — положительные (относительно фиксированных ориентаций) образующие внешних степеней $\Lambda^m F$, $\Lambda^m F'$ соответственно, где $\dim L = m + 1$. Найдутся $f' \in F' \backslash F$ и $f \in F \backslash F'$ такие, что $O = (f', u_F)$ и $O' = (f, u_{F'})$. Выберем образующую $u_{F \cap F'} \in \Lambda^{m-1}(F \cap F')$ так, что

$$f' \wedge u_{F \cap F'} = \mu' \cdot u_{F'}, \quad f \wedge u_{F \cap F'} = \mu \cdot u_F$$

с μ', $\mu > 0$ (для $m = 1$ считаем, что $u_{F\cap F'} = \pm 1$). Такой элемент $u_{F\cap F'}$ определен однозначно с точностью до положительного множителя. Этот элемент определяет каноническую ориентацию пересечения $F \cap F'$.

По определению W-структуры на каждой решетке L_w имеется ориентация O_w: для базиса $(z, f) \in \Theta$ мы имеем $O_w = \left(z_w, f_w^1, \ldots, f_w^m\right)$ не зависит от выбора (z, f) (согласно условию (1.4.3)). Далее, базис (z, f) фиксирует ориентацию пространства F_w для каждого ребра $w \in W$,

$$u_w = f_w^1 \wedge \cdots \wedge f_w^m,$$

которая, вообще говоря, зависит от выбора (z, f). Отождествляя решетки L_{-w} и L_w с помощью изоморфизма g_w, мы получаем пространство L_e, $e = (w, -w)$, с парой противоположных ориентаций $O_e = (O_w, O_{-w})$, пришедших из этих решеток, и с парой F_w, F_{-w} ориентированных собственных подрешеток максимального ранга. Тогда мы имеем каноническую ориентацию $u_{w\cap -w}$ пересечения $F_w \cap F_{-w}$. Более того, мы выбираем $u_{w\cap -w}$ как образующую $\mathbb{Z}$-модуля $\Lambda^{m-1}(F_w \cap F_{-w})$. Эта ориентация зависит от выбора (z, f).

Матрица g_w определяет отображение $D_w \colon F_{-w} \otimes \mathbb{R} \to F_w \otimes \mathbb{R}$, $D_w(q_{-w}) = f_w d_w p_w$ для $q_{-w} = f_{-w} p_w \in F_{-w} \otimes \mathbb{R}$, где p_w — столбец из m вещественных чисел, $F_w \otimes \mathbb{R} = F_w \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Другими словами, отображение D_w задается в базисах f_{-w}, f_w (целочисленной) подматрицей d_w матрицы g_w. В отличие от отображения g_w это отображение зависит, вообще говоря, от выбора, $(z, f) \in \Theta$. По определению отображение D_w тождественно на пересечении $F_{-w} \otimes \mathbb{R} \cap F_w \otimes \mathbb{R}$.

Для вершины $v \in V$ мы определяем подпространство

$$Q_v \subset \bigoplus_{w \in \partial v} F_{-w} \otimes \mathbb{R}$$

следующим образом. Элемент

$$q_v = \bigoplus_{w \in \partial v} q_{-w} \in \bigoplus_{w \in \partial v} F_{-w} \otimes \mathbb{R}$$

лежит в Q_v тогда и только тогда, когда

$$q_{-w} \wedge u_{w\cap -w} = \alpha \cdot u_{-w} \tag{2.2.1}$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех $w \in \partial v$, где положительные образующие

$$u_{w\cap -w} \in \Lambda^{m-1}(F_w \cap F_{-w}), \quad u_{-w} \in \Lambda^m F_{-w}$$

описаны выше.

Мы утверждаем, что подпространство Q_v не зависит от выбора базиса $(z,f)\in\Theta$. Действительно, если для $(\overline{z},\overline{f})\in\Theta$ образующая $\overline{u}_{-w}=-u_{-w}$ и $\overline{u}_w=u_w$, то $\overline{u}_{w\cap -w}=-u_{w\cap -w}$, и подпространство Q_v, определенное условием (2.2.1), не изменилось. Поэтому если ориентация слоя $F_v=F_w$, $w\in\partial v$, не меняется, то условие (2.2.1) определяет одно и то же подпространство Q_v для любого выбора ориентаций слоев F_{-w}, $w\in\partial v$.

Предположим теперь, что ориентация слоя F_v изменилась, т.е. $\overline{u}_w=-u_w$ для всех $w\in\partial v$, а ориентации слоев F_{-w}, $w\in\partial v$, не изменились. Тогда $\overline{u}_{w\cap -w}=-u_{w\cap -w}$ для всех $w\in\partial v$, и условие (2.2.1) опять определяет то же подпространство Q_v. Вместе с предыдущим это показывает, что подпространство Q_v не зависит от выбора базиса $(z,f)\in\Theta$. Заметим, что $\dim Q_v=(m-1)|\partial v|+1$.

Мы определяем *отображение заряда* вершины $v\in V$

$$K_v\colon Q_v\to F_v\otimes\mathbb{R}$$

как ограничение отображения

$$\bigoplus_{w\in\partial v}\frac{1}{j_w}D_w\colon\bigoplus_{w\in\partial v}(F_{-w}\otimes\mathbb{R})\to F_v\otimes\mathbb{R}$$

на подпространство Q_v.

2.2.2. Предложение. *Отображение K_v не зависит от выбора базиса $(z,f)\in\Theta$ и является, таким образом, инвариантом W-структуры.*

Доказательство опирается на следующую лемму.

2.2.3. Лемма. *Для $q_v\in\bigoplus_{w\in\partial v}q_{-w}\in Q_v$ имеем*

$$b_wp_w=\alpha\cdot j_w\quad\textit{для всех}\quad w\in\partial v,$$

где $q_{-w}=f_{-w}p_w$ и $q_{-w}\wedge u_{w\cap -w}=\alpha\cdot u_{-w}$, как в определении подпространства Q_v.

Пользуясь этой леммой, докажем сначала предложение 2.2.2.

Доказательство предложения 2.2.2. Для $q_{-w}=f_{-w}p_w$ имеем $D_w(q_{-w})=f_wd_wp_w$ и

$$K_v(q_v)=\sum_{w\in\partial v}\frac{1}{j_w}D_w(q_{-w})=\sum_{w\in\partial v}\frac{1}{j_w}f_wd_wp_w.$$

Если мы выберем другой базис $(\overline{z},\overline{f})=(z,f)\cdot h$, $h\in\mathcal{H}$, то $\overline{f}_w=f_w\sigma_v$, $\overline{f}_{-w}=f_{-w}\sigma_{v'}$, где $w\in\partial v$ и $-w\in\partial v'$. Далее, $q_{-w}=\overline{f}_{-w}\overline{p}_w$ для $\overline{p}_w=\sigma_{v'}^{-1}p_w$ и

$$\overline{D}_w(q_{-w})=\overline{f}_w\overline{d}_w\overline{p}_w,$$

где матрица $\overline{d}_w$ удовлетворяет условию (2.1.3). Пользуясь леммой 2.2.3, получаем

$$\begin{aligned}\overline{K}_v(q_v) &= \sum_{w\in\partial v}\frac{1}{j_w}\overline{D}_w(q_{-w}) = \sum_{w\in\partial v}\frac{1}{j_w}\overline{f}_w\overline{d}_w\overline{p}_w\\ &= \sum_{w\in\partial v}\frac{1}{j_w}f_w\sigma_v\left(-\varepsilon_v\sigma_v^{-1}n_wb_w\sigma_{v'}+\sigma_v^{-1}d_w\sigma_{v'}\right)\sigma_{v'}^{-1}p_w\\ &= -\varepsilon_vf_v\sum_{w\in\partial v}\frac{1}{j_w}n_wb_wp_w+\sum_{w\in\partial v}\frac{1}{j_w}f_wd_wp_w\\ &= -\alpha\varepsilon_vf_v\sum_{w\in\partial v}n_w+K_v(q_v)=K_v(q_v),\end{aligned}$$

поскольку $\sum_{w\in\partial v}n_w=0$ по определению группы $\mathcal{H}$. •

Доказательство леммы 2.2.3. В случае $m=1$ утверждение легко следует из определений. Считаем, что $m>1$. Покажем сначала, что элемент

$$a_w=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{(i-1)}b_w^if_{-w}^1\wedge\cdots\wedge\widehat{f_{-w}^i}\wedge\cdots\wedge f_{-w}^m\in\Lambda^{m-1}F_{-w}$$

может быть представлен как $a_w=j_wu_{w\cap-w}$, где $u_{w\cap-w}$ — положительная образующая $\mathbb{Z}$-модуля $\Lambda^{m-1}(F_w\cap F_{-w})$.

Набор $b_w=(b_w^1,\ldots,b_w^m)$ не нулевой. Без ограничения общности считаем, что $b_w^1\neq0$. Из (2.1.1) следует, что элемент

$$\gamma_j=-b_w^jf_{-w}^1+b_w^1f_{-w}^j$$

лежит в $F_w\cap F_{-w}$ для $j=2,\ldots,m$. Поэтому элемент

$$\gamma_2\wedge\cdots\wedge\gamma_m=\left(b_w^1\right)^{m-2}a_w$$

лежит в $\Lambda^{m-1}(F_w\cap F_{-w})$. $\mathbb{Z}$-модули F_w, F_{-w} максимальны в L_e, $e=(w,-w)$. Поэтому $\mathbb{Z}$-модуль $F_w\cap F_{-w}$ максимален в F_{-w}. В частности, базис слоя F_{-w} можно получить, дополняя базис пересечения $F_w\cap F_{-w}$. Следовательно, $\mathbb{Z}$-модуль $\Lambda^{m-1}(F_w\cap F_{-w})$ максимален в $\Lambda^{m-1}F_{-w}$. Поэтому если целочисленно кратное элемента из $\Lambda^{m-1}F_{-w}$ лежит в $\Lambda^{m-1}(F_w\cap F_{-w})$, то и сам этот элемент лежит в $\Lambda^{m-1}(F_w\cap F_{-w})$.

Тогда $a_w\in\Lambda^{m-1}(F_w\cap F_{-w})$ и по определению $a_w=\pm j_wu_{w\cap-w}$. Покажем, что здесь мы имеем знак плюс, т. е. a_w — положительный элемент.

Положим $f'=f_{-w}^1$, если $b_w^1>0$, и $f'=-f_{-w}^1$, если $b_w^1<0$. Тогда из (2.1.1) следует, что

$$f'\wedge u_w=|b_w^1|z_w\wedge f_w^1\wedge\cdots\wedge f_w^m=|b_w^1|u_{L_w}.$$

Так как

$$f' \wedge a_w = |b_w^1| f_{-w}^1 \wedge \dots \wedge f_{-w}^m = |b_w^1| u_{-w},$$

мы видим, что элемент a_w положительный. Следовательно,

$$a_w = j_w u_{w \cap -w}.$$

Теперь для $q_{-w} = f_{-w} p_w = p_w^1 f_{-w}^1 + \dots + p_w^m f_{-w}^m$ имеем

$$\begin{aligned} q_{-w} \wedge u_{w\cap -w} &= \frac{1}{j_w} q_{-w} \wedge a_w = \frac{1}{j_w} (b_w p_w)\, f_{-w}^1 \wedge \dots \wedge f_{-w}^m \\ &= \frac{1}{j_w} (b_w p_w)\, u_{-w}. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство. •

2.3. Геометризация W-структуры. Набор $\beta = \{\beta_w \mid w \in W\}$ положительно определенных квадратичных форм β_w на $\mathbb{Z}$-модулях L_w называется *геометризацией* W-структуры, если выполнены следующие условия:

(i) ограничение $\beta_w | F_v$ не зависит от $w \in \partial v$ для каждой вершины $v \in V$;

(ii) $\sum_{w \in \partial v} \beta_w(z_w, h) = 0$ для каждого $h \in F_v$, где $(z, f) \in \Theta$;

(iii) изоморфизм $g_w \colon (L_{-w}, \beta_{-w}) \to (L_w, \beta_w)$ является изометрией.

Заметим, что если условие (ii) выполнено для некоторого базиса Вальдхаузена (z, f), то это условие выполнено для любого базиса Вальдхаузена $(\overline{z}, \overline{f})$. Действительно, $(\overline{z}, \overline{f}) = (z, f) \cdot h$, где $h \in \mathcal{H}$. Поэтому $\overline{z}_w = \varepsilon_v z_w + f_w n_w$. Тогда, пользуясь (i), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \partial v} \beta_w(\overline{z}_w, h) &= \varepsilon_v \sum_{w \in \partial v} \beta_w(z_w, h) + \sum_{w \in \partial v} \beta_w(f_w, h)\, n_w \\ &= \beta_w(f_w, h) \sum_{w \in \partial v} n_w = 0, \end{aligned}$$

поскольку базис f_w слоевой группы $F_w = F_v$ не зависит от $w \in \partial v$.

Условия (i) и (ii) необходимы и достаточны для существования NPC-метрики на блоке M_v, продолжающей данные плоские геодезические метрики на краевых торах. Эти условия были впервые сформулированы в [L] для $m = 1$. Доказательство для $m > 1$ по существу то же: ищется представление группы $\pi_1(M_v)$ в группе изометрий метрического произведения $\mathbb{R}^m \times \widetilde{\Phi}_v$, где $\widetilde{\Phi}_v$ — универсальное накрывающее поверхности Φ_v с гиперболической метрикой и геодезическим краем.

В силу условия (iii) метрики на блоках можно склеить и получить NPC-метрику на многообразии M. Другими словами, многообразие M допускает NPC-метрику тогда и только тогда, когда существует геометризация ассоциированной W-структуры. В следующем пункте мы получаем уравнение геометризации, решения которого являются геометризациями рассматриваемой W-структуры.

2.4. Уравнение геометризации. Квадратичная форма β_w на L_w определяет ортогональную проекцию $\mathrm{Pr}\,\beta_w\colon L_w \otimes \mathbb{R} \to F_v \otimes \mathbb{R}$, где $w \in \partial v$. В терминах этих проекций условие (ii) может быть сформулировано, как

$$\sum_{w\in\partial v} \mathrm{Pr}\,\beta_w(z_w) = 0. \tag{2.4.1}$$

Определим отображение $\bigoplus_{w\in\partial v} \frac{1}{j_w} \mathrm{Pr}\,\beta_w\colon Q_v \to F_v \otimes \mathbb{R}$ формулой

$$\bigoplus_{w\in\partial v} \frac{1}{j_w} \mathrm{Pr}\,\beta_w\,(q_v) = \sum_{w\in\partial v} \frac{1}{j_w} \mathrm{Pr}\,\beta_w\,(q_{-w}),$$

где $q_v = \bigoplus_{w\in\partial v} q_{-w} \in Q_v$.

Пользуясь равенствами $(z_{-w}, f_{-w}) = (z_w, f_w)\cdot g_w$ и леммой 2.2.3, получаем

$$\frac{1}{j_w} \mathrm{Pr}\,\beta_w(q_{-w}) = \mathrm{Pr}\,\beta_w(z_w) + \frac{1}{j_w} D_w(q_{-w}) \tag{2.4.2}$$

для $q_{-w} = f_{-w}p_w$, $q_{-w} \wedge u_{w\cap -w} = u_{-w}$. Из (2.4.1) и (2.4.2) вытекает, что каждая геометризация β W-структуры удовлетворяет *уравнению геометризации*

$$K_v = \bigoplus_{w\in\partial v} \frac{1}{j_w} \mathrm{Pr}\,\beta_w, \quad v \in V, \tag{2.4.3}$$

где

$$\beta_w|F_v = \beta_{w'}|F_v \quad \text{для всех} \quad w, w' \in \partial v. \tag{2.4.4}$$

Обратно, любое решение $\beta = \{\beta_w \mid w \in W\}$ уравнения (2.4.3), (2.4.4) является геометризацией W-структуры.

Таким образом, проблема геометризации состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия, при которых отображение заряда K_v может быть разложено в сумму (2.4.3) (взвешенных) ортогональных проекций, удовлетворяющих условию (2.4.4) для каждой вершины $v \in V$.

§3. Простейшие четырехмерные графмногообразия

Как уже упоминалось, критерий для существования решений уравнения геометризации в случае $m = 1$, т.е. для трехмерных графмногообразий найден в [БК2]. В этом параграфе мы рассматриваем четырехмерные графмногообразия. Если такое многообразие состоит из двух блоков, то оно расслаивается на окружности над трехмерным графмногообразием с двумя блоками. Хорошо известно (см. [Е]), что если расслоение на окружности над компактным многообразием допускает метрику неположительной кривизны, то это расслоение почти тривиально, т.е. некоторое его конечное накрывающее тривиально. Поэтому случай многообразий с двумя блоками сводится к случаю $m = 1$. Таким образом, для $m = 2$ мы можем наблюдать новые по сравнению со случаем трехмерных графмногообразий эффекты только для четырехмерных многообразий, которые имеют по крайней мере три блока. В простейшем случае, когда многообразие M состоит из трех блоков и его граф гомеоморфен отрезку, мы указываем необходимые и достаточные условия для разрешимости уравнения геометризации.

3.1. В дальнейшем мы предполагаем, что M есть ориентированное четырехмерное графмногообразие с линейным графом G, последовательные вершины которого суть v_0, v_1, v_2. Соответствующие слоевые группы F_0, F_1, F_2 изоморфны $\mathbb{Z}^2$. Для отображений зарядов $K_i\colon Q_i \to F_i \otimes \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$, имеем $Q_0 = F_1 \otimes \mathbb{R} = Q_2$, и подпространство Q_1 пространства $(F_0 \otimes \mathbb{R}) \oplus (F_2 \otimes \mathbb{R})$ имеет размерность 3. Группы L_0, L_1, сидящие на ребрах между v_0, v_1 и v_1, v_2, соответственно изоморфны $\mathbb{Z}^3$.

Пусть j_i — индекс пересечения для F_i, F_{i+1} в L_i, $i = 0, 1$. Ориентация многообразия M фиксирует W-структуру, ассоциированную с M. Геометризация этой W-структуры задается положительно определенными квадратичными формами β_i на $L_i \otimes \mathbb{R}$, $i = 0, 1$, которые удовлетворяют уравнению геометризации

$$K_0 = \frac{1}{j_0} \operatorname{Pr} \beta_0^-, \quad K_1 = \frac{1}{j_0} \operatorname{Pr} \beta_0^+ \oplus \frac{1}{j_1} \operatorname{Pr} \beta_1^-, \quad K_2 = \frac{1}{j_1} \operatorname{Pr} \beta_1^+,$$
$$\beta_0 | F_1 \otimes \mathbb{R} = \beta_1 | F_1 \otimes \mathbb{R},$$

где

$$\operatorname{Pr} \beta_i^-\colon F_{i+1} \otimes \mathbb{R} \to F_i \otimes \mathbb{R}, \quad \operatorname{Pr} \beta_i^+\colon F_i \otimes \mathbb{R} \to F_{i+1} \otimes \mathbb{R}$$

— проекции подпространств в $L_i \otimes \mathbb{R}$, ортогональные относительно β_i.

Критерий существования геометризации формулируется в терминах инвариантов K_0, K_1, K_2, j_0, j_1 и (вторичного) индекса пересечения $p \in \mathbb{Z}$ подгрупп $F_0 \cap F_1$ и $F_1 \cap F_2$ в группе F_1. Этот индекс определен с точностью до знака и может быть описан следующим образом. Ориентация многообразия M индуцирует ориентации его блоков M_0, M_1, M_2, которые в свою очередь определяют пары противоположных ориентаций $O_0 = (O_0^+, O_0^-)$ и $O_1 = (O_1^+, O_1^-)$ пространств $L_0 \otimes \mathbb{R}$, $L_1 \otimes \mathbb{R}$ соответственно. Выберем базис Вальдхаузена для нашей W-структуры. Этот выбор фиксирует ориентации слоев $F_i \otimes \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$. Тогда мы имеем канонические ориентации пересечений $F_i \otimes \mathbb{R} \cap F_{i+1} \otimes \mathbb{R}$, $i = 0, 1$. Пусть $u_0 \in F_0 \cap F_1$, $u_1 \in F_1 \cap F_2$ — положительные образующие групп $F_0 \cap F_1$, $F_1 \cap F_2$. Тогда $u_0 \wedge u_1 = p\xi_1$, где ξ_i — положительная образующая $\mathbb{Z}$-модуля $\Lambda^2 F_i$, $i = 0, 1, 2$.

Если $p = 0$, то $F_0 \cap F_1 = F_1 \cap F_2$, и многообразие M расслаивается на окружности. Этот случай можно свести к размерности 3. Поэтому мы считаем в дальнейшем, что $p \neq 0$.

3.2. Численные характеристики отображений зарядов. Подпространство $Q_1 \subset (F_0 \otimes \mathbb{R}) \oplus (F_2 \otimes \mathbb{R})$ содержит двумерную плоскость A, натянутую на векторы $u_0 \oplus 0$, $0 \oplus u_1$ (поскольку $u_0 \wedge u_0 = 0 = u_1 \wedge u_1$). Для отображения зарядов $K_1 : Q_1 \to F_1 \otimes \mathbb{R}$ имеем $K_1(u_0 \oplus 0) = u_0/j_0$, $K_1(0 \oplus u_1) = u_1/j_1$.

Согласно условию $p \neq 0$, векторы u_0, u_1 независимы (в $F_1 \otimes \mathbb{R}$). Поскольку $\dim Q_1 = 3$, $\dim F_1 \otimes \mathbb{R} = 2$, ядро отображения K_1 имеет размерность 1 и не лежит в A. Поэтому найдется такой элемент $f_1^+ \oplus f_1^- \in Q_1$, что

$$K_1\left(f_1^+ \oplus f_1^-\right) = 0; \tag{3.2.1}$$

$$f_1^+ \wedge u_0 = p\xi_0, \quad f_1^- \wedge u_1 = p\xi_2. \tag{3.2.2}$$

Векторы $f_1^+ \in F_0 \otimes \mathbb{R}$, $f_1^- \in F_2 \otimes \mathbb{R}$ определены этими условиями однозначно с точностью до знака, который зависит от выбора базиса Вальдхаузена. Тогда коэффициенты k_0, ω_0, k_2, ω_1 разложений

$$K_0(-u_1) = k_0 \cdot f_1^+ + \omega_0 \cdot u_0, \tag{3.2.3}$$

$$K_2(u_0) = k_2 \cdot f_1^- - \omega_1 \cdot u_1 \tag{3.2.4}$$

определены также с точностью до знака.

3.3. Лемма. *Число* $j_0 j_1 \omega_0 \omega_1$ *и для* $k_0 k_2 \neq 0$ *числа*

$$\sigma_0 = \frac{j_1^2 k_2}{j_0 k_0}\omega_0, \quad \sigma_1 = \frac{j_0^2 k_0}{j_1 k_2}\omega_1$$

являются инвариантами W-структуры, т. е. они не зависят от выбора базиса Вальдхаузена. Заметим, что $\sigma_0 \sigma_1 = j_0 j_1 \omega_0 \omega_1$.

Доказательство. Достаточно показать, что знак этих чисел не меняется, когда меняется ориентация ξ_i одного из слоев $F_i \otimes \mathbb{R}$, а ориентации остальных слоев остаются прежними.

Если мы меняем ориентацию $\xi_0 \mapsto -\xi_0$ слоя $F_0 \otimes \mathbb{R}$, то каноническая ориентация пересечения $F_0 \otimes \mathbb{R} \cap F_1 \otimes \mathbb{R}$ изменится, поскольку $\xi_1 \mapsto \xi_1$, $\xi_2 \mapsto \xi_2$. Поэтому имеем $u_0 \mapsto -u_0$, $u_1 \mapsto u_1$, $p \mapsto -p$, $f_1^+ \mapsto -f_1^+$, $f_1^- \mapsto -f_1^-$, $k_0 \mapsto -k_0$, $\omega_0 \mapsto -\omega_0$, $k_2 \mapsto k_2$, $\omega_1 \mapsto -\omega_1$. Следовательно, числа $j_0 j_1 \omega_0 \omega_1$, σ_0, σ_1 остаются теми же. Случай $\xi_2 \mapsto -\xi_2$ рассматривается аналогично.

Пусть теперь $\xi_1 \mapsto -\xi_1$, $\xi_0 \mapsto \xi_0$, $\xi_2 \mapsto \xi_2$. Тогда $u_0 \mapsto -u_0$, $u_1 \mapsto -u_1$, $p \mapsto -p$, поэтому $f_1^+ \mapsto f_1^+$, $f_1^- \mapsto f_1^-$. Это влечет $k_0 \mapsto -k_0$, $\omega_0 \mapsto \omega_0$, $k_2 \mapsto -k_2$, $\omega_1 \mapsto \omega_1$, и числа $j_0 j_1 \omega_0 \omega_1$, σ_0, σ_1 остаются теми же. ■

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого параграфа.

3.4. Теорема. *Предположим, что четырехмерное графмногообразие M имеет линейный граф, состоит из трех блоков и вторичный индекс пересечения $p \neq 0$. Многообразие M допускает NPC-метрику тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:*

$$k_0k_2 = 0 \quad \textit{и} \quad \{\omega_0 = \omega_1 = 0 \ \textit{или}\ 0 < j_0j_1\omega_0\omega_1 < 1\}; \tag{3.4.1}$$

$$k_0k_2 \neq 0 \quad \textit{и} \quad (\sigma_0, \sigma_1) \in \Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{4} \Omega_i, \tag{3.4.2}$$

где

$$\sigma_0 = \frac{j_1^2 k_2}{j_0 k_0}\omega_0, \quad \sigma_1 = \frac{j_0^2 k_0}{j_1 k_2}\omega_1$$

и

$$\Omega_1 = \{\sigma_0, \sigma_1 \geqslant 1\}; \quad \Omega_2 = \{\sigma_0 \cdot \sigma_1 \geqslant 1,\ \sigma_0 < 0,\ \sigma_1 < 0\};$$

$$\Omega_3 = \{\sigma_0 \leqslant 0,\ \sigma_1 \geqslant 1\}; \quad \Omega_4 = \{\sigma_0 \geqslant 1,\ \sigma_1 \leqslant 0\}.$$

Для доказательства теоремы 3.4 мы покажем, что условия (3.4.1), (3.4.2) необходимы и достаточны для существования геометризации $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ W-структуры многообразия M (т.е. евклидовы метрики β_0 на $L_0 \otimes \mathbb{R}$ и β_1 на $L_1 \otimes \mathbb{R}$ удовлетворяют уравнению геометризации).

3.5. Препятствия для разрешимости уравнения геометризации в общем случае комбинируются из элементарных ограничений, которые описываются в следующих леммах 3.5.1 и 3.5.2.

3.5.1. Лемма. *Пусть (z, f), (z', f') — противоположно ориентированные базисы плоскости $\mathbb{R}^2$,*

$$z' = az + cf,$$
$$f' = bz + df,$$

$ad - bc = -1$ и $b \neq 0$, т.е. f и f' независимы. Положим $k = d/b$, $k' = -a/b$. На $\mathbb{R}^2$ существует положительно определенная квадратичная форма β, относительно которой эти базисы ортогональны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:

$$k = k' = 0; \tag{3.5.1}$$

$$0 < kk'b^2 < 1. \tag{3.5.2}$$

В первом случае в качестве β можно взять любую евклидову метрику на $\mathbb{R}^2$, для которой векторы f и f' ортогональны. Во втором случае форма β однозначно с точностью до гомотетии определена условиями

$$\cos^2\varphi = kk'b^2, \quad \operatorname{sign}(\cos\varphi) = \operatorname{sign}(k) = \operatorname{sign}(k'), \quad \frac{|f|^2}{|f'|^2} = \frac{k'}{k},$$

где φ — угол между f и f', $|f|$ — длина f относительно β.

Доказательство. Легко видеть, что требуемая метрика β существует тогда и только тогда, когда пары $L = (L_z, L_f)$ и $L' = (L_{z'}, L_{f'})$ подпространств, натянутых на векторы наших базисов, совпадают или разделяют друг друга.

(Если пары L, L' разделяют друг друга, то метрика β определяется следующим образом. Возьмем метрику β', относительно которой пара L ортогональна. Изменяя масштаб β' вдоль прямой L_f на множитель $t > 0$ и сохраняя масштаб вдоль L_z, мы получаем метрику β'_t. Для β'_t пара L по-прежнему ортогональна. Будем следить за углом $\angle_t(z', f')$ относительно этой метрики. Согласно нашим предположениям, векторы z', f' лежат в одной полуплоскости относительно прямой L_z и разделены прямой L_f. Поэтому $\angle_t(z', f') \to \pi$ при $t \to 0$ и $\angle_t(z', f') \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда найдется такое $t > 0$, что $\angle_t(z', f') = \pi/2$. Полагаем $\beta = \beta'_t$).

Условие (3.1.1), очевидно, эквивалентно тому, что $L_z = L_{f'}$ и $L_f = L_{z'}$. В этом случае прямые L_f, $L_{f'}$ ортогональны для любой искомой метрики β.

Если пары L, L' разделяют друг друга и β — искомая метрика, то

$$\langle f, f'\rangle_\beta = kb|f|^2_\beta = k'b|f'|^2_\beta.$$

Поэтому $kk'b^2 = \cos^2\varphi$ и, следовательно, $0 < kk'b^2 < 1$. В этом случае имеем $|f|^2_\beta/|f'|^2_\beta = k'/k$, $\operatorname{sign}(\cos\varphi) = \operatorname{sign}(k)$.

Обратно, условие $0 < kk'b^2 < 1$ означает, что $0 < (-a)d < 1$, где d есть f-координата вектора f' в базисе (z, f) и $(-a)$ — f'-координата вектора f в базисе (z', f'). Это, очевидно, означает, что пары L и L' разделяют друг друга. •

3.5.2. Лемма. *Пусть F_0, F_1 — двумерные подпространства в (вещественном) векторном пространстве L размерности 3, линейные отображения*

$$D_0 \colon F_1 \to F_0, \quad D_1 \colon F_0 \to F_1$$

удовлетворяют условиям $D_0|F_0 \cap F_1 = D_1|F_0 \cap F_1 = \mathrm{id}$.

На L существует положительно определенная квадратичная форма β, для которой D_0, D_1 являются ортогональными проекциями, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:

(i) $\det(D_0) = 0 = \det(D_1)$;

(ii) $0 < \det(D_0 \circ D_1) < 1$.

В первом случае в качестве β можно взять любую евклидову метрику на L, для которой плоскости F_0, F_1 ортогональны и подпространства $\ker D_0 \subset F_1$, $\ker D_1 \subset F_0$ ортогональны пересечению $F_0 \cap F_1$. Во втором случае соответствующая метрика β определена однозначно с точностью до гомотетии и изменения масштаба вдоль $F_0 \cap F_1$.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3.5.1, примененной к $L/F_0 \cap F_1$. •

3.6. Предположим, что геометризация β существует. Тогда она определяет следующие геометрические параметры:

углы α_i между плоскостями $F_i \otimes \mathbb{R}$, $F_{i+1} \otimes \mathbb{R}$ в $L_i \otimes \mathbb{R}$, $i = 0, 1$;
угол φ между векторами u_0, u_1 в $F_1 \otimes \mathbb{R}$;
площади S_i плоских торов $F_i \otimes \mathbb{R}/F_i$, $i = 0, 1, 2$;
длины l_0, l_1 замкнутых геодезических, соответствующих u_0, u_1 на торе $F_1 \otimes \mathbb{R}$.

3.7. Ортогональные проекции $\Pr\beta_0^- : F_1 \otimes \mathbb{R} \to F_0 \otimes \mathbb{R}$ и $\Pr\beta_1^+ : F_1 \otimes \mathbb{R} \to F_2 \otimes \mathbb{R}$ известны из уравнения геометризации — они совпадают с отображениями j_0K_0 и j_1K_2 соответственно. В частности, если мы выберем $e_0^+ \in F_0 \otimes \mathbb{R}$, e_0^-, $e_1^+ \in F_1 \otimes \mathbb{R}$, $e_1^- \in F_2 \otimes \mathbb{R}$ так, что $e_0^+ \wedge u_0 = \xi_0$, $e_0^- \wedge u_0 = \xi_1 = e_1^+ \wedge u_1$, $e_1^- \wedge u_1 = \xi_2$, то e_0^+-координата вектора $\frac{1}{j_0}\Pr\beta_0^-(e_0^-) = K_0(e_0^-)$ равна k_0 и e_1^--координата вектора $\frac{1}{j_1}\Pr\beta_1^+(e_1^+) = K_2(e_1^+)$ равна k_2.

Геометризация β определяет разложение $K_1 = K_1^+ \oplus K_1^-$ отображения заряда K_1, где

$$K_1^+ = \frac{1}{j_0}\Pr\beta_0^+, \quad K_1^- = \frac{1}{j_1}\Pr\beta_1^-.$$

Векторы e_0^+, e_0^-, e_1^+, e_1^- можно выбрать таким образом, что в дополнение к условию выше они удовлетворяют условиям

$$K_0(e_0^-) = k_0e_0^+, \; K_1^+(e_0^+) = k_1^+e_0^-, \; K_1^-(e_1^-) = k_1^-e_1^+, \; K_2(e_1^+) = k_2e_1^-. \tag{3.7.1}$$

Здесь числа k_1^+, k_1^-, так же как и векторы e_0^+, e_0^-, e_1^+, e_1^-, зависят от выбора геометризации. Числа k_0, k_1^+, k_1^-, k_2 называются *горизонтальными зарядами* геометризации. Согласно леммам 3.5.1, 3.5.2, они определяют углы α_i между плоскостями $F_i \otimes \mathbb{R}$, $F_{i+1} \otimes \mathbb{R}$ в $L_i \otimes \mathbb{R}$. Именно

$$\begin{aligned} &\cos^2\alpha_i = j_i^2 k_i^- k_{i+1}^+; \\ &\alpha_i = \frac{\pi}{2} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad k_i^- = k_{i+1}^+ = 0; \\ &\text{если} \quad \alpha_i \neq \frac{\pi}{2}, \quad \text{то} \quad \frac{S_i^2}{S_{i+1}^2} = \frac{k_{i+1}^+}{k_i^-}, \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

где $k_0^- = k_0$, $k_2^+ = k_2$.

3.8. Мы определяем *вертикальные заряды* κ^+, κ^- геометризации как коэффициенты разложений

$$u_1 = -pe_0^- + p\kappa^+ u_0,$$
$$u_0 = pe_1^+ + p\kappa^- u_1.$$

Вертикальные заряды определяют угол φ между пересечениями $F_0 \otimes \mathbb{R} \cap F_1 \otimes \mathbb{R}$ и $F_1 \otimes \mathbb{R} \cap F_2 \otimes \mathbb{R}$ в плоскости $F_1 \otimes \mathbb{R}$. Именно по лемме 3.5.1, примененной к базисам (e_1^+, u_1), (u_0, e_0^-), мы имеем

$$\begin{aligned} &\cos^2\varphi = p^2\kappa^+\kappa^-; \\ &\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \kappa^+ = \kappa^- = 0; \\ &\text{если} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}, \quad \text{то} \quad \frac{l_0^2}{l_1^2} = \frac{\kappa^-}{\kappa^+}. \end{aligned} \tag{3.8.1}$$

Мы также, очевидно, имеем $S_1 = l_0 l_1 \sin\varphi$.

Уравнение геометризации может быть переформулировано как соотношение между горизонтальными и вертикальными зарядами.

3.9. Лемма. *Имеются следующие соотношения между горизонтальными и вертикальными зарядами*:

$$p\kappa^+ = \frac{1}{\sin^2\alpha_0}\left\{-j_0\omega_0 + j_0^2 k_0 k_1^-\right\}; \tag{3.9.1}$$

$$p\kappa^- = \frac{1}{\sin^2\alpha_1}\left\{-j_1\omega_1 + j_1^2 k_1^+ k_2\right\}, \tag{3.9.2}$$

которые эквивалентны следующему условию для отображения зарядов K_1:

$$K_1^+(f_1^+) + K_1^-(f_1^-) = 0. \tag{3.9.3}$$

Доказательство. Представим векторы ядра для K_1 следующим образом:

$$f_1^+ = pe_0^+ - \lambda_0 u_0,$$
$$f_1^- = pe_1^- + \lambda_1 u_1.$$

Соотношение (3.2.1) означает, что $K_1^+(f_1^+) + K_1^-(f_1^-) = 0$. Согласно (3.7.1), это дает

$$pk_1^+ e_0^- - \frac{\lambda_0}{j_0} u_0 + pk_1^- e_1^+ + \frac{\lambda_1}{j_1} u_1 = 0.$$

Пользуясь 3.8, получаем

$$pk_1^+\kappa^+ + k_1^- = \frac{\lambda_0}{j_0}, \tag{3.9.4}$$

$$k_1^+ + pk_1^-\kappa^- = \frac{\lambda_1}{j_1}. \tag{3.9.5}$$

С другой стороны, поскольку $K_0(e_0^-) = k_0 e_0^+$, имеем

$$\begin{aligned} pk_0 e_0^+ &= pK_0(e_0^-) = \frac{p\kappa^+}{j_0} u_0 + K_0(-u_1) \\ &= k_0 f_1^+ + \left(\omega_0 + \frac{p\kappa^+}{j_0}\right) u_0 \\ &= pk_0 e_0^+ + \left(\omega_0 + \frac{p\kappa^+}{j_0} - k_0\lambda_0\right) u_0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\omega_0 + \frac{p\kappa^+}{j_0} = k_0 j_0 \frac{\lambda_0}{j_0}.$$

Теперь (3.9.1) вытекает из (3.9.4) и (3.7.2). Пользуясь соотношением $K_2(e_1^+) = k_2 e_1^-$, мы аналогично получаем (3.9.2). Это рассуждение показывает, что (3.9.3) эквивалентно (3.9.1) и (3.9.2). •

3.10. Условия (3.4.1), (3.4.2) необходимы. Предположим, что $k_0 k_2 = 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $k_0 = 0$. Тогда, согласно (3.7.2), $k_1^+ = 0$, и мы имеем $\alpha_0 = \pi/2$, $p\kappa^+ = -j_0\omega_0$, $p\kappa^- = -j_1\omega_1/\sin^2\alpha_1$. Согласно (3.8.1), $\kappa^+ = \kappa^- = 0$ или $0 < p^2\kappa^+\kappa^- < 1$. В первом случае имеем $\omega_0 = \omega_1 = 0$, а во втором $0 < j_0 j_1 \omega_0 \omega_1 < \sin^2\alpha_1 \leqslant 1$. Это показывает, что условие (3.4.1) необходимо.

Предположим теперь, что $k_0 k_2 \neq 0$. Тогда α_0, $\alpha_1 \neq \pi/2$ и, пользуясь леммой 3.9, получаем

$$\cos^2\varphi = p^2\kappa^+\kappa^- = \frac{(\sigma_1 - \cos^2\alpha_0)(\sigma_0 - \cos^2\alpha_1)}{(1-\cos^2\alpha_0)(1-\cos^2\alpha_1)}. \tag{3.10.1}$$

Если $\varphi = \pi/2$, то $\kappa^+ = \kappa^- = 0$ и, следовательно, $\sigma_1 = \cos^2\alpha_0$ или $\sigma_0 = \cos^2\alpha_1$. Поэтому одна из координат $(\sigma_0, \sigma_1) \in \mathbb{R}^2$ лежит в интервале $(0,1)$ и, таким образом, $(\sigma_0, \sigma_1) \in \Sigma$.

Пусть теперь $\cos^2\varphi \neq 0$. Тогда

$$0 < \frac{(\sigma_1 - \cos^2\alpha_0)(\sigma_0 - \cos^2\alpha_1)}{(1-\cos^2\alpha_0)(1-\cos^2\alpha_1)} < 1.$$

Левое неравенство эквивалентно тому, что

$$\{\cos^2\alpha_0 > \sigma_1 \text{ и } \cos^2\alpha_1 > \sigma_0\} \text{ или } \{\cos^2\alpha_0 < \sigma_1 \text{ и } \cos^2\alpha_1 < \sigma_0\}. \tag{3.10.2}$$

Правое неравенство может быть переписано, как

$$\sigma_0\sigma_1 + (1-\sigma_0)\cos^2\alpha_0 + (1-\sigma_1)\cos^2\alpha_1 < 1. \tag{3.10.3}$$

Нетрудно видеть, что точка $(\sigma_0, \sigma_1) \in \mathbb{R}^2$ с координатами, удовлетворяющими (3.10.2) и (3.10.3), лежит в множестве Σ. Поэтому условие (3.4.2) также необходимо для существования геометризации. •

Для доказательства того, что условия (3.4.1), (3.4.2) достаточны для существования NPC-метрики на M, мы показываем, что существует разложение $K_1 = K_1^+ \oplus K_1^-$ такое, что отображения j_0K_0, $j_0K_1^+$, $j_1K_1^-$, j_1K_2 являются ортогональными проекциями относительно некоторой геометризации.

Условия $j_0K_0(u_0) = j_0K_1^+(u_0) = u_0$ и $j_1K_2(u_1) = j_1K_1^-(u_1) = u_1$ выполняются автоматически. Поэтому искомое разложение определено условиями (3.7.1), 3.8 и соотношениями (3.9.1), (3.9.2).

Будет показано, что при выполнении условий (3.4.1), (3.4.2) существуют горизонтальные заряды k_1^+, k_1^- и вертикальные заряды κ^+, κ^- такие, что

$$\begin{aligned} k_0 = k_1^+ = 0 \quad &\text{или} \quad 0 < j_0^2 k_0 k_1^+ < 1,\\ k_1^- = k_2 = 0 \quad &\text{или} \quad 0 < j_1^2 k_1^- k_2 < 1,\\ \kappa_0 = \kappa_1^+ = 0 \quad &\text{или} \quad 0 < p^2\kappa^+\kappa^- < 1, \end{aligned}$$

и выполняются условия (3.9.1), (3.9.2). Это следующим образом определяет геометризацию $\beta = (\beta_0, \beta_1)$. С помощью (3.7.2) и (3.8.1) мы находим углы α_0, α_1, φ, а с помощью 3.8 — ненулевые векторы e_0^-, $e_1^+ \in F_1 \otimes \mathbb{R}$. Пользуясь (3.9.4), (3.9.5), находим коэффициенты λ_0, λ_1 и векторы $e_0^+ \in F_0 \otimes \mathbb{R}$, $e_1^- \in F_2 \otimes \mathbb{R}$ из

$$f_1^+ = pe_0^+ - \lambda_0 u_0, \quad f_1^- = pe_1^- + \lambda_1 u_1.$$

Теперь отображения K_1^+, K_1^- определяются условиями

$$K_1^+(e_0^+) = k_1^+ e_0^-, \quad K_1^-(e_1^-) = k_1^- e_1^+.$$

Это влечет $K_1^+(f_1^+) + K_1^-(f_1^-) = 0$, т.е. мы нашли разложение $K_1 = K_1^+ \oplus K_1^-$ отображения зарядов K_1.

Пользуясь рассуждениями из доказательства леммы 3.9, получаем из (3.9.1), (3.9.2), что $K_0(e_0^-) = k_0 e_0^+$, $K_2(e_1^+) = k_2 e_1^-$, т.е. выполняются условия (3.7.1). Применяя лемму 3.5.1, находим сначала ограничения $\beta_0|F_1 \otimes \mathbb{R} = \beta_1|F_1 \otimes \mathbb{R}$ такие, что базисы (u_0, e_0^-), (e_1^+, u_1) пространства $F_1 \otimes \mathbb{R}$ ортогональны. Пользуясь далее леммой 3.5.2, находим их продолжения β_0 на L_0 и β_1 на L_1 так, что $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ является геометризацией, для которой

$$K_1^+ = \frac{1}{j_0}\operatorname{Pr}\beta_0^+, \quad K_1^- = \frac{1}{j_1}\operatorname{Pr}\beta_1^-.$$

3.11. Условие (3.4.1) достаточно. Не ограничивая общности, считаем, что $k_0 = 0$. Тогда полагаем $k_1^+ = 0$. Если $k_2 = 0$, то мы полагаем $k_1^- = 0$, в противном случае выбираем k_1^- так, что $0 < j_1^2 k_1^- k_2 < 1$. Если $\omega_0 = \omega_1 = 0$, то выбор $\kappa^+ = \kappa^- = 0$ удовлетворяет оставшимся условиям (3.9.1), (3.9.2).

Предположим теперь, что $0 < j_0 j_1 \omega_0 \omega_1 < 1$. Тогда полагаем $p\kappa^+ = -j_0\omega_0$. Найдется такое k_1^-, что $j_0 j_1 \omega_0 \omega_1 < \sin^2\alpha_1$, где $\cos^2\alpha_1 = j_1^2 k_1^- k_2$. Остается определить $p\kappa^- = -j_1\omega_1/\sin^2\alpha_1$. •

3.12. Условие (3.4.2) достаточно. Пусть $(\sigma_0, \sigma_1) \in \Sigma$. Если $0 < \sigma_0, \sigma_1 < 1$, то полагаем $j_0^2 k_0 k_1^+ = \sigma_1$, $j_1^2 k_1^- k_2 = \sigma_0$, $\kappa^+ = \kappa^- = 0$. Этот выбор обеспечивает выполнение всех условий геометризации.

В общем случае для $(\sigma_0, \sigma_1) \in \Sigma$ найдутся такие μ_0, $\mu_1 \in (0, 1)$, что условия (3.10.2) и (3.10.3) выполнены для $\cos^2\alpha_0 = \mu_0$, $\cos^2\alpha_1 = \mu_1$. Тогда полагаем $j_0^2 k_0 k_1^+ = \mu_0$, $j_1^2 k_1^- k_2 = \mu_1$. Теперь вертикальные заряды κ^+, κ^- определены формулами (3.9.1), (3.9.2). В этом случае имеем $0 < p^2\kappa^+\kappa^- < 1$ по выбору μ_0, μ_1. Это завершает доказательство теоремы 3.4. •

Список литературы

[BGS] Ballmann W., Gromov M., Schroeder V., *Manifolds of nonpositive curvature*, Progr. Math., vol. 61, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[B] Buyalo S., *Metrics of nonpositive curvature on graph-manifolds and electromagnetic fields on graphs*, POMI Preprint no. 14/1997, ПОМИ, СПб., 1997.

[БК1] Буяло С. В., Кобельский В. Л., *Геометризация граф-многообразий. I. Конформная геометризация*, Алгебра и анализ **7** (1995), № 2, 3–45.

[БК2] Буяло С. В., Кобельский В. Л., *Геометризация граф-многообразий. II. Изометрическая геометризация*, Алгебра и анализ **7** (1995), № 3, 96–117.

[БК3] Буяло С. В., Кобельский В. Л., *Геометризация бесконечных граф-многообразий*, Алгебра и анализ **8** (1996), № 3, 56–77.

[DS] Dunwoody M. J., Sageev M. E., *JSJ-splittings of finitely presented groups over slender groups*, Preprint, 1998.

[E] Eberlein P., *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Univ. of Chicago Press, Chicago, IL, 1996.

[FP] Fujiwara K., Papasoglu P., *JSJ decompositions of finitely presented groups and complexes of groups*, Preprint, 1997.

[GW] Gromoll D., Wolf J., *Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental group in manifolds of nonpositive curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 545–552.

[H] Hempel J., *Residual finiteness for 3-manifolds*, Combinatorial Group Theory and Topology (Alta, Utah, 1984), Ann. of Math. Stud., vol. 111, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987, pp. 379–396.

[LY] Lawson H. B., Yau S. T., *Compact manifolds of nonpositive curvature*, J. Differential Geom. **7** (1972), 211–228.

[L] Leeb B., *3-manifolds with(out) metrics of nonpositive curvature*, Invent. Math. **122** (1995), 277–289.

[KL] Kapovich M., Leeb B., *Actions of discrete groups on nonpositively curved spaces*, Math. Ann. **306** (1996), 341–352.

[Serr] Serre J.-P., *Trees*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1980.

[W1] Waldhausen F., *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.* I, Invent. Math. 3 (1967), 308–333.

[W2] Waldhausen F., *Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.* II, Invent. Math. 4 (1967), 87–117.

Поступило 16 июня 1998 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: buyalo@pdmi.ras.ru

Российский государственный
педагогический университет
191186, Санкт-Петербург
наб. р. Мойки, 48
E-mail: victor@pdmi.ras.ru