

УРАВНЕНИЕ КОЛМОГорова — Феллера И ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В. П. Маслов

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Дисперсия случайной величины дает один из возможных способов количественно охарактеризовать ошибку, допускаемую при измерении случайных величин. Она характеризует квадрат нормы отклонения случайной величины от среднего. Для случайных величин со значениями в \mathbb{R}^n эта норма — евклидова норма вектора $\xi - M\xi$ (см. [6, 11]):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\xi) &= M|\xi - M\xi|^2 = \int |\xi - M\xi|^2 P(d\xi) \\ M\xi &= \int \xi P(d\xi). \end{aligned} \quad (1.1)$$

С точки зрения физических приложений, использование фиксированной метрики в формулах (1.1) неестественно, поскольку события в системе и ее метрические свойства имеют различную природу и определяются различными факторами [7]. Наконец, ошибка может вноситься измерительным прибором, которому свойственны собственная метрика и собственная статистика ошибок (см. [4]).

Следует также отметить, что для описания физических систем с помощью функции состояния могут использоваться различные представления: в одном случае система описывается функцией распределения вероятностей P , в другом — характеристической функцией распределения \tilde{P} (т. е. Фурье-образом распределения P), в третьем — полным набором моментов распределения случайной величины $\{m_k\}_0^\infty$ и т. д.

Хотя в приведенных выше примерах при переходе от P к \tilde{P} или к $\{m_k\}_0^\infty$ свойство неотрицательности плотности P не сохраняется, тем не менее можно утверждать, что если \tilde{P} — характеристическая функция распределения, а $\{m_k\}_0^\infty$ — полный набор моментов случайной величины, то $-\tilde{P}$ не может

быть характеристической функцией никакого распределения, а $\{-m_k\}_0^\infty$ не может быть полным набором моментов никакой случайной величины. С другой стороны, если $\{P_e\}_1^n$ — набор характеристических функций некоторых распределений и $\{\lambda_e\}_1^n$ — набор неотрицательных чисел, сумма которых равна единице, то $\tilde{P} = \sum_1^n \lambda_j \tilde{P}_j$ — характеристическая функция некоторого распределения. Аналогичное утверждение справедливо и относительно набора моментов $\{m_k\}_0^\infty$.

Важное обстоятельство состоит в том, что множество знакопеременных функций, обладающих (см. Л. В. Канторович, 1950) структурой положительного конуса и используемых для описания статистического состояния физических систем, может и не совпадать с множеством функций распределения вероятностей или производных от них величин. В дальнейшем эти функции мы будем называть распределениями или плотностями, интерпретируя их как плотности распределения зарядов, имеющих как положительные, так и отрицательные значения. Такая интерпретация аналогична обычно используемой в статистической механике [7] интерпретации плотности вероятности как распределения единичной массы бесконечного числа частиц в фазовом одночастичном пространстве, основанной на переходе от корпускулярной статистической модели к полевой. Приведем несколько примеров, позволяющих читателю представить возможные источники множеств знакопеременных распределений, называемых положительными конусами и их сечениями.

Вблизи границы *n-p* перехода транзистора с одной ее стороны скапливаются электроны, а с другой — дырки. Поэтому плотность пространственного распределения заряда меняет знак на границе *n-p* перехода. Если для фиксированного положения *n-p* перехода плотность пространственного распределения зарядов неотрицательна справа, то плотность неположительная справа уже не имеет физического смысла для заданной ориентации *n-p* перехода. Если в режиме малых токов и напряжений на линейном участке вольт-амперной характеристики транзистора можно реализовать плотности распределения зарядов $\{\rho_e\}_1^n$, то можно реализовать и плот-

ность $\rho = \sum_1^n \lambda_i \rho_i$ для $\lambda_i \geq 0$, $\sum_1^n \lambda_i = 1$.

Аналогичным «конусным» свойством обладает семейство разностных операторов, аппроксимирующих фиксированный линейный оператор. Каждый разностный оператор можно описать соответствующей ему функцией Гамильтона, которую можно интерпретировать как знакопеременную функцию состояния разностной схемы [8, 12]. Если функции из мно-

жества $\{H_{\sigma}\}_1^n$ описывают разностные схемы, аппроксимирующие фиксированный оператор \hat{H} , то функции $\{-H_{\sigma}\}_1^n$ заведомо не соответствуют таким схемам. Напротив, функции гамильтона $H = \sum_1^n \lambda_K H_K$, где $\lambda_K \geq 0$, $\sum_1^n \lambda_K = 1$, отвечает разностная схема, аппроксимирующая оператор \hat{H} .

В электрических цепях, используемых для связи, потери за счет токов проводимости очень малы. Такие цепи удобно описывать передаточными функциями h , сохраняющими интегральную характеристику сигнала.

Пусть $h(t)$ — передаточная функция [15]. Сигнал на выходе цепи может быть вычислен по формуле

$$f_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) f_{\text{вх}}(\tau) d\tau.$$

Если $f_{\text{вх}}$ — ток, то условие отсутствия потерь за счет тока проводимости имеет вид

$$\int_{-\infty}^0 h(t) dt = 1. \quad (1.2)$$

Ясно, что если h — передаточная функция, то для функции $-h$ условие (1.2) не выполнено и она не может быть передаточной функцией. С другой стороны, выпуклая оболочка любого числа передаточных функций вновь обладает свойством (1.2).

Использование произвольных конусов для описания статистических состояний лежит в основе операционной теории физических систем [5, 18, 19, 2, 14], включающую в себя как классическую, так и квантовую статистическую теорию.

Статистическое описание любой физической системы определяется заданием ее статистического состояния. Множество допустимых состояний S предполагается замкнутым относительно операции смешивания в следующем смысле. Если система находится в одном из заданных состояний $s_i \in S$ с вероятностями $\lambda_i \in (0, 1)$, $\sum_1^n \lambda_i = 1$, то она описывается вполне определенным статистическим состоянием $s \in S$, которое называется смесью множества состояний $\{s_i\}$ и обозначается через $s = \sum_1^n \lambda_i s_i$.

Обычно множество S представляется как выпуклое порождающее подмножество некоторого полуупорядоченного банахова пространства L , в котором операция смешивания является линейной операцией составления выпуклых комбинаций, а от-

ношение порядка определяется в терминах положительного конуса L_+ , состоящего из элементов вида $\sum \alpha_j s_j$, $\alpha_j \geq 0$, $s_j \in S$. Множество состояний S является порождающим для пространства L в том смысле, что оно является базисом конуса $L_+ \subset L$, состоящего из элементов вида $\sum \alpha_j s_j$ и не содержащего элементов множества $-S$. Любой элемент пространства L является линейной комбинацией элементов конуса L_+ . Поэтому конус L_+ называется воспроизводящим [5, 13].

Теоремы о реализации полуупорядоченных пространств (см. [5, 13]) показывают, что отсутствие знакоопределенности в обычном смысле у элементов конуса L_+ , вообще говоря, не является препятствием для их интерпретации как «положительных» величин. В частности, если L_+ — нормальный конус, т. е. если существует $\delta > 0$ такое, что $\|e_1 + e_2\| \geq \delta$ для любых $e_{1,2} \in L_+$, $\|e_{1,2}\| = 1$, то существует линейное непрерывное и взаимно однозначное отображение банахова пространства L в подпространство банахова пространства непрерывных функций $C(K)$, где K — некоторый бикомпакт, при котором элементам конуса L_+ и только им соответствуют неотрицательные функции [13]. Для сепарабельных пространств $K = [0, 1]$. Это обстоятельство позволяет надеяться, что для знакопеременных плотностей существуют неотрицательные аналоги дисперсии.

Плотности распределения зарядов $\rho(x)$, как и плотности вероятностей, наблюдаемые в эксперименте, обычно не нормированы и доступны лишь для опосредованного наблюдения. Экспериментатору доступна информация $\rho_{\text{вых}}(x)$ на выходе измерительного прибора или канала связи, описываемого передаточной функцией $h_1(x, \xi)$:

$$\rho_{\text{вых}}(x) = \int h_1(x, \xi) \rho(\xi) d\xi.$$

Аналогично, обрабатываются и случайные величины, подверженные статистическому анализу

$$f_{\text{вых}}(x) = \int h_2(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

На основе поступающей на выход информации экспериментатор судит о нормирующем множителе N_ρ , о функции $f(x)$ от «случайной» величины x , о ее среднем, дисперсии и других «вероятностных» характеристиках:

$$\begin{aligned} N_\rho &= \iint \rho(\xi) h_1(x, \xi) dx d\xi \geq 0, \\ M_\rho(f) &\stackrel{\text{def}}{=} \langle f \rangle = \iiint \rho(\xi) h_1(x, \xi) h_2(x, \eta) f(\eta) dx d\xi d\eta, \\ D_\rho(f) &= M_\rho |f - \langle f \rangle|^2 = \\ &= \int dx \int \rho(\xi) h_1(x, \xi) d\xi \left| \int (f(\eta) - \langle f \rangle) h_2(x, \eta) d\eta \right|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если каналы связи не вносят искажений, т. е. являются идеальными ($h_1(x, \xi) = h_2(x, \xi) = \delta(x - \xi)$), и $\rho(x)$ — нормированная плотность вероятности, то формулы (1.3) переходят в классические определения среднего и дисперсии относительно ρ . Замечательное обстоятельство состоит в том, что формулы (1.3) могут быть перенесены и на знакопеременные распределения $\rho(x)$ при некоторых дополнительных предположениях. Например, если при всех f функция

$$d(\xi) = \int dx h_1(x, \xi) \left| \int (f(\eta) - \langle f \rangle) h_2(x, \eta) d\eta \right|^2$$

является элементом сопряженного положительного конуса L_+^* , характеризуемого условием

$$\langle e_+^*, e_+ \rangle \geq 0 \quad \forall e_+^* \in L_+^*, e_+ \in L_+$$

и $1 \in L_+^*$, то для любого ρ такого, что $N_\rho > 0$ можно ввести неотрицательный аналог дисперсии $D_\rho(f)$ по формулам (1.3).

Формулы (1.3) показывают принципиальную возможность введения неотрицательной оценки ошибки усреднения относительно знакопеременных плотностей из положительного конуса L_+ . Это обстоятельство представляется важным, поскольку выбор той или иной характеристики ошибки является до известной степени условностью или соглашением. Такое соглашение приобретает практическую ценность лишь постольку, поскольку оно является основой для накопления эмпирических данных, позволяющих экспериментатору судить о точности и надежности измерений, исходя из имеющегося у него опыта использования принятых правил оценивания ошибок. Именно поэтому можно надеяться, что правила оценивания ошибок измерений относительно знакопеременных плотностей также окажутся полезными.

Второй важный вывод состоит в том, что правила оценивания ошибок измерений предполагают использование измерительных приборов со специальными характеристиками, зависящими от класса измеряемых величин. Их математическое описание связано с использованием понятия сопряженных конусов L_+ и L_+^* , введенных выше, и более общей конструкции пространства Канторовича [5].

Формулы (1.3) содержат лишь характеристики канала связи и приводят, вообще говоря, к смещенным оценкам средних значений. Перейдем теперь к обсуждению способов описания измерительного прибора, обеспечивающего несмещенные оценки средних значений.

Пусть $\sigma(x) = \rho_+(x) - \rho_-(x)$ — знакопеременный заряд, равный разности плотностей положительных и отрицательных зарядов, недоступных раздельному измерению. Если $0 < \int \rho_\pm(x) dx < \infty$, то плотности ρ_+ и ρ_- допускают двойственную интерпретацию. Нормированные плотности

$$\tilde{\rho}_{\pm}(x) = \rho_{\pm}(x) / \int \rho_{\pm}(y) dy$$

можно трактовать как плотности распределения вероятностей, относительно которых можно ввести среднее и дисперсию. «Средним» относительно заряда $\sigma(x)$ в этом случае естественно называть разность средних относительно плотностей ρ_+ и ρ_- с учетом нормировки:

$$M_{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \langle f \rangle_+ - \langle f \rangle_- = \int f(x) \sigma(x) dx.$$

Если множество физически реализуемых знаков переменных зарядов $\sigma(x)$ имеет структуру положительного конуса L_+ некоторого банахова пространства L , как это имело место в рассмотренных выше примерах, то можно определить величины, аналогичные дисперсии для всех элементов конуса L_+ .

Рассмотрим процедуру измерения дипольного момента. Прибор, предназначенный для этой цели, должен реагировать на пространственное распределение зарядов, в том числе на вклад отдельных заряженных частиц. Если, например, в точке с координатой x помещен единичный заряд, то ожидаемый результат измерений дипольного момента равен x . Результаты отдельных измерений принимают, вообще говоря, случайные значения, распределение вероятностей которых характеризует измерительный прибор. В идеальном случае такое распределение вероятностей имеет плотность, равную δ -функции Дирака, сосредоточенную в точке x .

Таким образом, статистические свойства прибора, предназначенного для измерения дипольного момента, можно описать условным распределением вероятностей $m_x(A)$, характеризующим распределение вероятностей показаний прибора при единичном воздействии в точке x :

$$m_x(A) = P \left\{ \begin{array}{l} \text{показания прибора, измеряю-} \\ \text{щего дипольный момент,} \\ \text{принадлежат множеству } A \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{при условии, что в} \\ \text{точке } x \text{ помещен} \\ \text{единичный заряд} \end{array} \right\} = \\ = P \{ \xi \in A \mid x \}.$$

Поскольку предполагается, что измерительный прибор обеспечивает несмещенную оценку измеряемого параметра, среднее значение показаний прибора должно совпадать со значением измеряемого параметра:

$$x = M_x \xi \stackrel{\text{def}}{=} \int \lambda P \{ \xi \in d\lambda \mid x \} = \int \lambda m_x(d\lambda).$$

Вероятность произвольного показания прибора равна единице, поэтому мера $m_x(A)$ должна удовлетворять условию нормировки:

$$1 = \int m_x(d\lambda).$$

Прибор, предназначенный для измерения значений произвольного линейного функционала $\mathcal{F}[\sigma] = \int f(x)\sigma(x)dx$ распределения зарядов $\sigma(x)$, можно описать с помощью условного распределения m_x^f :

$$m_x^f(A) = P \left\{ \begin{array}{l} \text{показания прибора, изме-} \\ \text{ряющего } \xi, \text{ принадлежат} \\ \text{множеству } A \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{при условии, что в} \\ \text{точке } x \text{ помещен} \\ \text{единичный заряд} \end{array} \right\} = \\ = P^f \{ \xi \in A | x \}.$$

Условие несмещенности оценок имеет вид:

$$f(x) = m_x^f(\xi) = \int \lambda P^f \{ \xi \in d\lambda | x \} = \int \lambda m_x^f(d\lambda), \quad (1.4)$$

а вероятностная интерпретация меры m_x^f влечет условие нормировки

$$1 = \int m_x^f(d\lambda). \quad (1.5)$$

Если заряд распределен в пространстве с плотностью $\sigma(x)$, то, в силу принципа суперпозиции, среднее значение показаний прибора равно:

$$m_\sigma(f) = \int \lambda \left[\int \sigma(x) m_x^f(d\lambda) dx \right] = \int f(x)\sigma(x) dx.$$

В частности, среднее значение измерений дипольного момент равно

$$m_\sigma(x) = \int x\sigma(x) dx.$$

Измерения физических величин, допускающие описание по изложенной выше схеме, называются косвенными, семейство условных вероятностей $m_x^f(d\xi)$, удовлетворяющее условиям нормировки и несмещенности (1.4) — (1.5) — разбиением единицы.

Предположим, что заряды, находящиеся в различных точках пространства, распределены с плотностью $\sigma(x)$ и оказывают независимые воздействия на показания прибора. Если плотность $\sigma(x)$ нормирована и неотрицательна, то, в соответствии с формулой полной вероятности, величина

$$P_\sigma^f(A) = \int \sigma(x) m_x^f(A) dx \quad (1.6)$$

имеет смысл распределения вероятностей показаний прибора, измеряющего значения физической величины \mathcal{F} , имеющей плотность $f(x)$ при условии, что пространственная плотность распределения заряда равна $\sigma(x)$. Отсюда следует формула дисперсии косвенных измерений:

$$D_\sigma(f) = \int [\xi - M_\sigma(f)]^2 P_\sigma^f(d\xi). \quad (1.7)$$

Формулы (1.6) — (1.7) так же, как и формулы (1.3), обобщают-

ся на ненормированные знакопеременные функции $\sigma(x)$, принадлежащие некоторому положительному конусу L_+ банахова пространства L . Нормировка элементов конуса осуществляется с помощью единичного элемента e из сопряженного положительного конуса L_+^* :

$$\sigma_{\text{норм}}(x) = \sigma(x) / (\sigma, e). \quad (1.8)$$

Относительно элемента e также формулируется условие нормировки разбиения единицы:

$$e = \int m_x^f(d\xi). \quad (1.9)$$

Для условных мер $m_x^f(A)$ со значениями в положительном сопряженном конусе L_+^* единица e мажорирует значения m_x^f

$$e - m_x^f(A) \in L_+^*, \quad \forall A,$$

а функция множества $P_\sigma^f(A)$, определенная формулой (1.6) для нормированных плотностей σ , сохраняет вероятностный смысл:

$$P_\sigma^f(A) \geq 0, \quad \int P_\sigma^f(d\xi) = 1.$$

Множество нормированных плотностей в пространстве Канторовича (L^*, L_+^*, e) образует сечение L_+^* замкнутое относительно вычисления выпуклых линейных комбинаций. Вероятностная интерпретация $P_\sigma^f(A)$ дает основание рассматривать дисперсию косвенных измерений (1.7) относительно знакопеременных плотностей из L_+ в качестве оценки уклонения результатов измерений от среднего.

Рассмотрим более подробно два примера.

§ 2. ОЦЕНИВАНИЕ ОШИБОК В ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИИ

С точки зрения теории измерений, дисперсия — это наименьшая возможная ошибка косвенного измерения случайных величин. Пусть $\rho(x) = \rho_+(x) - \rho_-(x)$, где $\rho_\pm(x)$ — распределения положительных и отрицательных зарядов на отрезке $[-1, 1]$, причем

$$\int_{-1}^1 \rho(x) dx = 1; \quad \rho(x) > 0, \quad \forall x \in [-1, 1]. \quad (2.1)$$

Определим квазидисперсию $\mathcal{D}_\rho(f)$ любой действительной функции f из $L_2[-1, 1]$ относительно распределения зарядов $\rho(x)$, положив

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho(f) &= \int_{-1}^1 |f(x)|^2 \rho(x) dx - \left| \int_{-1}^1 f(x) \rho(x) dx \right|^2 = \\ &= \int_{-1}^1 (f(x) - M_\rho(f))^2 \rho(x) dx, \quad M_\rho(f) = \int_{-1}^1 f(x) \rho(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Косвенные измерения физической величины \mathcal{F} с плотностью $f(x)$ для некоторой системы, состояния которой описываются распределением $\rho(x)$, можно охарактеризовать с помощью произвольного разложения единицы

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} m_x^f(d\lambda), \quad (2.3)$$

удовлетворяющего условию несмещенности

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda m_x^f(d\lambda), \quad (2.4)$$

где $m_x^f(d\lambda) \geq 0$ — неотрицательная мера на \mathbb{R}^1 . При этом числа $\lambda \in \mathbb{R}$ представляют собой возможные результаты косвенного измерения, $f(x)$, а мера $m_x^f(d\lambda)$ описывает статистическую характеристику измерительного прибора. Функция $\rho(x)$ и разложение единицы $m_x^f(d\lambda)$ определяют распределение вероятностей результатов косвенного измерения

$$P_\rho^f(d\lambda) = \int_{-1}^1 \rho(x) m_x^f(d\lambda) dx, \quad (2.5)$$

математическое ожидание

$$M_\rho(f) = \int \lambda P_\rho^f(d\lambda) = \int_{-1}^1 f(x) \rho(x) dx \quad (2.6)$$

и дисперсию:

$$\begin{aligned} D_\rho(f) &= \int (\lambda - M_\rho(f))^2 P_\rho^f(d\lambda) = \iint (\lambda - f(x))^2 m_x^f(d\lambda) \rho(x) dx + \\ &+ \int (f(x) - M_\rho(f))^2 \rho(x) dx \cdot \int m_x^f(d\lambda) + \\ &+ 2 \int (f(x) - M_\rho(f)) \rho(x) dx \int (\lambda - f(x)) m_x^f(d\lambda) = \\ &= \mathcal{D}_\rho(f) + \iint (\lambda - f(x))^2 m_x^f(d\lambda) \rho(x) dx \geq \mathcal{D}_\rho(f). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Интеграл $\int (\lambda - f(x))^2 m_x^f(d\lambda) \geq 0$ характеризует локально неточность косвенного измерения функции f в точке x . В данном примере локальная неточность может быть сведена к нулю путем специального выбора меры $m_x^f(d\lambda)$:

$$m_x^f(d\lambda) = \delta_{f(x)}(d\lambda) = \begin{cases} 1 & f(x) \in d\lambda, \\ 0 & f(x) \notin d\lambda, \end{cases} \quad (2.8)$$

т. е. m_x^f — дираковская δ -мера, удовлетворяющая условиям (2.3—2.4). Таким образом, неравенство (2.7) показывает, что

наименьшая дисперсия косвенных измерений $D_p(f)$ совпадает с квазидисперсией (2.2).

Рассмотрим теперь случай знакопеременной функции $\sigma(x)$: $\rho_+(x) \equiv 0, x \in [-1, 0]$; $\rho_-(x) \equiv 0, x \in [1, 0]$, т. е. плотность $\sigma(x) = \rho_+(x) - \rho_-(x)$ — неотрицательна справа от нуля и неположительна слева. Будем считать это распределение нормированным в следующем смысле:

$$\int_{-1}^1 \sigma(x) \operatorname{sign}(x) dx = \int_{-1}^1 |\sigma(x)| dx = 1. \quad (2.9)$$

Квазидисперсию функций из $L_2[-1, 1]$ естественно определить следующей формулой:

$$\mathcal{D}_\sigma(f) = \int_{-1}^1 f_s^2(x) \sigma(x) dx - \left(\int_{-1}^1 f(x) \sigma(x) dx \right)^2, \quad (2.10)$$

где $f_s^2(x) = f^2(x) \operatorname{sign} x$.

Неотрицательную величину (2.10) можно, как и в первом примере, использовать в качестве нижней границы среднеквадратичной ошибки косвенного измерения функции $f(x)$, при условии, что эти измерения описываются не разложениями единицы (2.3), а разложениями функции $\operatorname{sign}(x)$:

$$\operatorname{sign}(x) = \int m_x^f(d\lambda) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ +1 & x > 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

определяемыми мерами $m_x^f(d\lambda)$, принимающими неотрицательные значения лишь на полуинтервале $[0, 1]$:

$$m_x^f(d\lambda) \geq 0, x \in [0, 1]; m_x^f(d\lambda) \leq 0, x \in [-1, 0].$$

В этом случае, несмотря на неположительность m_x^f и σ , формула

$$P_\sigma^f(d\lambda) = \int_{-1}^1 \sigma(x) m_x^f(d\lambda) dx \geq 0, \quad (2.12)$$

в силу условия (2.8), определяет неотрицательную нормированную на единицу меру на \mathbb{R}^1 , которую можно интерпретировать как распределение вероятностей косвенного измерения величины $f(x)$. Ее математическое ожидание при выполнении условия несмещенности определяется формулой (2.6), а дисперсия — формулой (2.7). Локальная неточность $\Delta_x(f) = \int (\lambda - f(x))^2 m_x^f(d\lambda)$ в этом случае является неположительной величиной, но ее среднее значение относительно любого распределения зарядов $\sigma(x)$ такого, что $\sigma(x) \geq 0$ при $x \geq 0$ и $\sigma(x) \leq 0$ при $x \leq 0$, является неотрицательной величиной.

$$\int \delta_x(f) \sigma(x) dx \geq 0.$$

Поэтому, как и в предыдущем примере, квазидисперсия (2.10) не превышает среднеквадратичную ошибку косвенного измерения. Заметим, что квазидисперсия совпадает с дисперсией косвенных измерений для разбиения единицы

$$m_x^f(d\lambda) = \text{sign}(x) \delta_{f(x)}(d\lambda), \quad (2.13)$$

т. е. нижняя грань достигается и в этом случае.

Описанные выше примеры можно обобщить, рассматривая заряды σ , принадлежащие сечению произвольного положительного воспроизводящего конуса L_+ некоторого банахова пространства L . Сечение конуса определяется условием квазинормировки

$$(\sigma, e) = 1,$$

где e — фиксированный элемент из сопряженного положительного конуса L_+^* , элементы которого определяются условием неотрицательности соотношения свойственности:

$$(l_+, l_+^*) \geq 0, \quad \forall l_+ \in L_+, \quad l_+^* \in L_+^*. \quad (2.14)$$

Тройка (L^*, L_+^*, e) называется пространством Канторовича [5]. В первом примере в качестве такой единицы использовалась функция, тождественно равная единице на отрезке $[-1, 1]$, а во втором — $\text{sign}(x)$. В первом примере конус L_+ состоял из всех неотрицательных п. в. функций $\rho(x) \in L_2[-1, 1]$, а во втором из всех функций п. в. неположительных на $[-1, 0]$ и п. в. неотрицательных на $[0, 1]$ из $L_2[-1, 1]$.

Для определения неотрицательной дисперсии $D_\sigma(f)$, мажорирующей квазидисперсию $\mathcal{D}_\sigma(f)$, в общем случае необходимо определить билинейную операцию квазиумножения в L^*

$$A : L^* \times L^* \rightarrow L^*, \quad (2.15)$$

сужение которой на диагональ \mathcal{A} — однородная операция степени два, действующая из L^* в L_+^* , называемая квазиквадратом:

$$(f)_\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}(f) = A(f, f) \in L_+^*, \quad \forall f \in L^*. \quad (2.16)$$

В качестве такого квазиквадрата в первом случае был использован обычный квадрат, а во втором — квадрат, умноженный на $\text{sign}(x)$. В терминах квазиквадрата определяется квазидисперсия элемента $f \in L^*$ относительно нормированного заряда $\sigma \in L_+$:

$$\mathcal{D}_\sigma(f) = ((f - e \mathcal{A}(f))_p^2, \sigma), \quad (2.17)$$

где $M_\sigma(f) = \langle f, \sigma \rangle$, $(e, \sigma) = 1$.

Для того, чтобы сохранить описанную выше статистическую интерпретацию квазидисперсии как нижней границы среднеквадратичной ошибки произвольного косвенного измерения,

потребуем дополнительно выполнения условия положительной определенности квазиквадрата в следующем смысле. Пусть для любого конечного набора функций $\{m^i\}_{1,\infty}$ из сопряженного положительного конуса L_+^* , мажорируемых в сумме единичным элементом

$$e - \sum_1^n m^i \in L_+^*,$$

для любого $n > 0$ выполняются матричные неравенства

$$(-M_n^\sigma + M_n^\sigma) \geq 0, \quad (2.18)$$

где M_n^σ — симметричная, а M_n^σ — диагональная матрицы размера $n \times n$, зависящие от $\sigma \in L_+$:

$$M_n^{ij} = (A(m^i, m^j), \sigma), \quad M_n^{ii} = (m^i, \sigma). \quad (2.19)$$

Неравенства (2.18), понимаемые в смысле неотрицательной определенности разности соответствующих матриц, содержат в качестве простейшего условия ($n=1$) для функций на R^n неравенство

$$\int (m^i)^2(x) \sigma(x) dx \leq \int m(x) \sigma(x) dx \quad (2.20)$$

для любого $M(x)$, мажорируемого единицей e .

На языке теории вероятностей неравенство (2.20) означает, что среднее значение квазиквадрата неотрицательной функции, мажорируемой единицей, не превосходит ее среднего значения.

Предположим, что билинейная операция $A: L^* \times L^* \rightarrow L^*$ удовлетворяет дополнительно условию корректности

$$A(f, e) = A(e, f) = f, \quad \forall f \in L^*. \quad (2.21)$$

Тогда имеет место

Предложение 2.1. Пусть борелевская мера $m^i(d\lambda): R^1 \rightarrow L_+^*$ определяет разложение квазиединицы e из L_+^*

$$e = \int m^i(d\lambda)$$

и удовлетворяют условию несмещенности

$$f = \int \lambda m^i(d\lambda), \quad \forall f \in L^+.$$

Пусть билинейная операция A и квазиквадрат \mathcal{A} удовлетворяют условиям корректности и положительной определенности (2.21) и (2.18). Тогда для любого $\sigma \in L_+$ и любого $f \in L^*$ квазидисперсия $\mathcal{D}_\sigma(f)$, определенная формулой (2.17), дает нижнюю оценку среднеквадратичной ошибки $D_\sigma(f)$ косвенного измерения величины f относительно заряда σ :

$$D_\sigma(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int (\lambda - M_\sigma(f))^2 P_\sigma^f(d\lambda) \geq \mathcal{D}_\sigma(f),$$

где

$$M_{\sigma}(f) = (f, \sigma) \text{ и } P_{\sigma}^f(a) = (m^f(a), \sigma).$$

Доказательство. Учитывая условия несмещенности оценок, корректности билинейной операции A и нормировку заряда, нетрудно получить следующее тождество, связывающее квазидисперсию $\mathcal{D}_{\sigma}(f)$ и дисперсию косвенного измерения $D_{\sigma}(f)$:

$$\begin{aligned} D_{\sigma}(f) &= \left(\int_{\Lambda} (\lambda - (f, \sigma))_s^2 m^f(d\lambda), \sigma \right) = \left(\int \lambda^2 m^f(d\lambda) - (f)_s^2, \sigma \right) + \\ &\quad + ((f - e(f, \sigma))_s^2, \sigma) = \\ &= \left(\int \lambda^2 m^f(d\lambda) - \left(\int \lambda m^f(d\lambda) \right)_s^2, \sigma \right) + \mathcal{D}_{\sigma}(f). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Всякую измеримую функцию $m^f(d\lambda)$ можно сколь угодно точно аппроксимировать простыми функциями

$$m^f \cong \sum_1^n m_j^f,$$

причем можно считать, что сумма простых функций сходится к m^f снизу в смысле отношения порядка в L_{+}^* :

$$m^f - \sum_1^n m_j^f \in L_{+}^*.$$

При этом

$$\left(\int \lambda^2 m^f(d\lambda), \sigma \right) \rightarrow (\lambda^{(n)}, \mu_n^{\sigma} \lambda^{(n)}) \text{ и } \left(\left(\int \lambda m^f(d\lambda) \right)_s^2, \sigma \right) \rightarrow (\lambda^{(n)}, \mu_n^{\sigma} \lambda^{(n)}).$$

Теперь неотрицательность первого слагаемого в правой части равенства (2.22) следует из условия положительной определенности матриц (2.18). Предложение доказано.

Как показывает предложение 2.1, условия (2.18) и (2.21) существенны для статистической интерпретации квазидисперсии. Отказавшись от них, можно, тем не менее, определить содержательные оценки отклонения функций от средних значений относительно знакопеременных плотностей (т. е. зарядов). Сейчас мы рассмотрим вопрос о том, в каком случае можно ввести операцию квазиквadrата, отображающую банахово пространство L^* в положительный конус L_{+}^* так, чтобы квазидисперсия (2.17) обладала естественными свойствами

$$\mathcal{D}_{\sigma}(f) \geq 0, \quad (2.23)$$

$$\{\mathcal{D}_{\sigma}(f) = 0, \forall \sigma \in L_{+}\} \Leftrightarrow \{f = M_{\sigma}(f)\}, \quad (2.24)$$

где $M_{\sigma}(f) = (f, \sigma)$, $\mathcal{D}_{\sigma}(f) = ((f - M_{\sigma}(f))_s^2, \sigma)$. Для того, чтобы выполнялось условие (2.23), достаточно, чтобы операция квазиквadrата отображала L^* в конус L_{+}^* . Для выполнения второго

условия достаточно, чтобы конус L_+ был воспроизводящим и операция квазиквadrата имела только тривиальное ядро. Справедливо следующее

Предложение 2.2. Пусть L_+^* — воспроизводящий конус банахова пространства L^* , сопряженного сепарабельному банаховому пространству L . Тогда существует билинейный оператор $A: L^* \times L^* \rightarrow L^*$, сужение \mathcal{A} которого на диагональ действует из L^* в L_+^* , причем $\mathcal{A}(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$.

Доказательство. В сепарабельном банаховом пространстве L существует полная минимальная система нормированных базисных элементов $\{e_k\}$, а в сопряженном пространстве L^* — сопряженная нормированная система $\{e_k^*\}$, образующие вместе биортогональную систему (см. [13]).

Каждый элемент e_k^* сопряженной системы можно представить в виде разности элементов положительного воспроизводящего конуса L_+^* :

$$e_k^* = e_1^*(k) - e_2^*(k), \quad e_{1,2}^*(k) \in L_+^*.$$

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел, обеспечивающая сходимость ряда

$$\sum_1^\infty \lambda_k (\|e_1^*(k)\| + \|e_2^*(k)\|),$$

и $\mathcal{A}(u, v)$ — билинейный оператор, действующий из $L^* \times L^*$ в L^* по правилу

$$A(u, v) = \sum_1^\infty \lambda_k (e_1^*(k) + e_2^*(k)) (u, e_k) (v, e_k),$$

и $\mathcal{A}(f)$ — его сужение на диагональ:

$$A(f) = \sum_1^\infty \lambda_k (e_1^*(k) + e_2^*(k)) (f, e_k)^2.$$

Тогда оператор $\mathcal{A}(u)$ обладает указанными выше свойствами. Действительно, поскольку $\lambda_k (f, e_k)^2 \geq 0$ и $e_1^*(k) + e_2^*(k) \in L_+^*$, то ясно, что $\mathcal{A}: L^* \rightarrow L_+^*$.

Пусть $\mathcal{A}(f) = 0$. Если $f \neq 0$, то существует номер $k \geq 1$ такой, что $(f, e_k) \neq 0$, в силу плотности системы $\{e_k\}$. С другой стороны, из условия $\mathcal{A}(f) = 0$ мы заключаем, что для данного k выполнено равенство, противоречащее определению положительного конуса:

$$e_1^*(k) + e_2^*(k) = -\frac{1}{\lambda_k (f, e_k)^2} \sum_{j \neq k} \lambda_j (f, e_j)^2 (e_1^*(j) + e_2^*(j)),$$

ибо левая часть — элемент конуса L_+^* , а правая часть заведомо не принадлежит этому конусу. Предложение доказано.

Следствие. Если выполнены условия предложения 2.2 и конус L_+ — воспроизводящий, то в качестве квазиквадрата можно взять операцию \mathcal{A} :

$$(f)_s^2 = \mathcal{A}(f).$$

До сих пор мы ограничивались изучением простейшего в своем роде случая, когда плотности положительных и отрицательных зарядов были нормируемыми, а суммарный заряд отличен от нуля. С точки зрения приложений, значительно больший интерес представляет изучение флуктуаций зарядов в электронейтральных системах, содержащих бесконечно большое число положительных и отрицательных зарядов: $\sigma = \rho_+ - \rho_-$, $\langle \sigma, e \rangle = 0$, $\int \rho_{\pm}(x) dx = a$. Эту ситуацию мы рассмотрим при дополнительном предположении о том, что часть переменных в некотором смысле выделена и может быть охарактеризована как «скрытые» параметры. Как мы увидим ниже, перенормировка решений вероятностных уравнений по скрытому параметру связывает вероятностные и квантовомеханические процессы. Кроме того, вероятностные уравнения со скрытым параметром дают новые содержательные примеры положительных конусов L_+ , L_+^* и конструкции дисперсии косвенных измерений относительно знакопеременных плотностей.

§ 3. СКРЫТЫЙ ПАРАМЕТР

Предположим, что знакопеременная функция $\sigma(q, s)$, являющаяся элементом положительного конуса L_+ банахова пространства L , зависит от параметра s . Иными словами, в системе есть дополнительная степень свободы. Для простоты будем считать, что она одна. Зависимость от параметра будем называть нормируемой, если

$$\int ds \left| \int dq \sigma(q, s) \right| < \infty$$

и локально нормируемой, если для любого действительного N существует компактная измеримая область ω_N такая, что

$$\int_{\omega_N} ds \int dq \sigma(q, s) = N. \quad (3.1)$$

Примером такого параметра может служить параметр s , лимитирующий по числу частиц или по доступному для измерений объему разрешающую способность прибора, измеряющего распределение системы частиц по энергиям. С уменьшением разрешающей способности прибор измеряет распределение по энергиям системы, состоящей из все большего числа частиц или системы, заключенной во все большем объеме. Если все частицы имеют одинаковое распределение по энергиям, не зависящее от пространственных координат, то с уменьшением разрешающей способности прибора характер распределения, очевид-

но, изменится, смещаясь в сторону больших значений энергии. В то же время наблюдаемое распределение не зависит от того, каким образом выбираются частицы или фиксируется пространственная область. Это свойство зависимости плотности от параметра s мы назовем свойством интегральной инвариантности.

Определение 3.1. (Локально) нормируемая функция $\sigma(q, s)$ называется интегрально инвариантной относительно параметра s , если функция

$$\sigma_N(q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \int_{\omega_N} ds \sigma(q, s) \quad (3.2)$$

не зависит от области ω_N , определенной соотношением (2.1), а зависит только от N . Параметр s в этом случае называется скрытым.

Рассмотрим ситуацию, когда система, а вместе с ней и функция $\sigma(q, s)$ меняются со временем. Если в начальный момент функция $\sigma \in L_+$ содержала зависимость от скрытого параметра s , то естественно потребовать, чтобы параметр s оставался скрытым в процессе эволюции, а заряд $\sigma(q, s)$ оставался элементом положительного конуса L_+ . С другой стороны, если динамика системы задана, это условие в ряде случаев можно рассматривать как ограничение на класс начальных условий и конструкцию конуса L_+ .

Определение 3.2. Семейство функций $\sigma(q, s, t)$ называется динамически инвариантным относительно параметра $s \in S$ на множестве T , если при каждом $t \in T$ параметр s является скрытым и $\sigma(\cdot, s, t) \in L_+$ при всех значениях $s \in S, t \in T$.

Ниже будет построен пример системы, динамически инвариантной относительно скрытого параметра.

Рассмотрим дискретное фазовое пространство \mathbb{R}^{2n} , состоящее из точек $\{x_i, p_i\}$, $x_i \in \mathbb{R}^n, p_i \in \mathbb{R}^n$, на котором заданы две неотрицательные функции $\rho_{\pm}(x, p) \geq 0$, удовлетворяющие условию нормировки:

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \sum_j e^{-\alpha(|x_j|^2 + |p_j|^2)} (\rho_+(x_j, p_j) - \rho_-(x_j, p_j)) = 0.$$

Иными словами, в точках $\{x_j, p_j\}$ фазового пространства расположены заряды $\rho_{\pm}(x_j, p_j)$, причем в целом система электронейтральна, но локальные флуктуации зарядов имеют ненулевую вероятность.

Пусть множество точек $\{x, p\}$ образует фазовое пространство \mathbb{R}^{2n} и частицы движутся по ее узлам, перескакивания в случайные моменты времени из одной точки непрерывного фазового пространства в другую по правилам, которые будут сформулированы ниже. При этом меняется заряд $\sigma(x, p, t, s) = \rho_+(x, p, t, s) - \rho_-(x, p, t, s)$, зависящий от скрытого параметра s , управляющего движением частиц Гамильтониан

системы, описывающий это движение и обеспечивающий динамическую инвариантность заряда σ и существование инвариантного конуса L_+ , будет предъявлен ниже, а сейчас мы сформулируем первое условие на класс начальных зарядов $\sigma_0(x, p, s) = \sigma(x, p, s, t)|_{t=0}$. Именно, в дальнейшем изложении предполагается, что заряд σ_0 локально нормируем и s — скрытый параметр. Такой заряд будем называть статистическим.

Рассмотрим более подробно движение заряженных частиц $\{x_i, p_i\}$ в фазовом пространстве. Их движение предполагается дискретным, т. е. в случайные моменты t_i координаты (x, p) заряженной частицы изменяются на величину $(\pm \frac{\hbar k}{2}, \pm \frac{\hbar k'}{2})$, где k, k' — точки R^n , а \hbar — некоторая фиксированная величина. Плотность совместного распределения величин k и k' равна $\frac{\hbar}{\beta} \mu(k, k')$, где $\beta = \hbar^{-1} \int \mu(k, k') dk dk'$. Она сосредоточена в точках плотности R^{2n} и удовлетворяет условию четности: $\mu(k, k') = \mu(-k, -k')$. Знак \pm приращения координат частицы определяется знаком дискретной случайной величины $\kappa(t)$, принимающей значения $\pm 1/2$ в момент t_j , распределенные по закону Пуассона со средним равным β . Этот процесс можно трактовать как обмен частиц импульсами со случайным полем в случайные моменты времени, где $\frac{\hbar k}{2}, \frac{\hbar k'}{2}$ — импульсы поля.

Выберем непрерывный справа гамильтониан, определяющий движение частиц (3.3) в виде

$$H(x, p, \kappa, s) = -\hbar \sum_j [\kappa(pk_j + xk_j') + f(k, k', \kappa)] \delta(t - t_j + 0) - s \sum_j \delta(t - t_j + 0) d(k, k', \kappa). \quad (3.3)$$

Такой выбор функции Гамильтона основан на следующих предположениях. Первый член в сумме (3.3) отвечает за скачки координаты и импульса. Слагаемое $f(k, k', \kappa)$ и $s \cdot d(\kappa)$ можно прибавить к гамильтониану, не нарушив предположений о величине скачков. В дальнейшем изложении предполагается, что функция $f(k, k', \kappa)$ имеет производную $\frac{\partial f}{\partial \kappa} = g(k, k') + 2\pi n(k, k')$, где $n(k, k')$ — произвольная целочисленная функция, а $d(k, k', \kappa)$ — гладкая функция, равная $\text{sign}(\kappa)$ при $|\kappa| \gg \varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$.

Функции Гамильтона (3.3) отвечает следующая система уравнений движения:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\hbar \sum_j k_j' \kappa \delta(t - t_j - 0), \\ \dot{x} &= +\frac{\partial H}{\partial p} = +\hbar \sum_j k_j \kappa \delta(t - t_j - 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial H}{\partial \kappa} = h \sum \left(pk_j + xk_j' + \frac{\partial f}{\partial \kappa} (k_j k_j' \kappa) \delta(t - t_j - 0) \right), \quad (3.4) \\ &\quad - \sum s \frac{\partial d}{\partial \kappa} (k_j k_j' \kappa) \delta(t - t_j - 0), \\ \dot{\kappa} &= -\frac{\partial H}{\partial s} = + \sum d(k_j k_j' \kappa) \delta(t - t_j - 0). \end{aligned}$$

В системе (3.4) s — гамильтонова переменная, сопряженная κ . Значения κ определяются из последнего уравнения. Конечные значения гамильтоновых переменных считаются заданными в конечный момент t :

$$x(t) = x, \quad p(t) = p, \quad s(t) = s, \quad \kappa(t) = \pm \frac{1}{2}.$$

Решение системы (3.4) ищется при $\tau \in [0, t)$. Именно поэтому нас интересуют решения, непрерывные справа.

Пусть в момент t значение переменной κ равно $\pm \frac{1}{2}$ с вероятностью $\frac{1}{2}$. Из уравнения для κ и определения функции α следует, что приращения значений κ в моменты t_i равны $\text{sign} \kappa$. Таким образом, значения κ образуют непрерывную справа последовательность, которая с вероятностью $\frac{1}{2}$ равна либо $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$, либо $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots$.

Производная $\partial d / \partial \kappa$ равна нулю при $|\kappa| \geq \varepsilon$ для $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и предполагается, что это условие выполнено. Поэтому вторая сумма в правой части уравнения для \dot{s} также равна нулю. Теперь нетрудно выписать решение системы (3.4), учитывая, что моменты t_i образуют убывающую последовательность с интервалами $t_i - t_{i+1}$, распределенными по закону Пуассона со средним $\beta = h^{-1} \int \mu(kk') dkdk'$. При $\tau \in [t_{i+1}, t_i - 1)$ имеем:

$$\begin{aligned} p_\tau &= p_\tau(xps) = p + h \sum_{j=1}^{i-1} \kappa_j k_j' + h \kappa_i k_i' \theta(t_i - \tau - 0), \\ x_\tau &= x_\tau(xps) = x - h \sum_{j=1}^{i-1} \kappa_j k_j - h \kappa_i k_i \theta(t_i - \tau - 0), \\ s_\tau &= s_\tau(xps) = s + h \sum_{j=1}^{i-1} \left[pk_j + k_j \sum_{l=1}^{j-1} \kappa_l k_l' + xk_j' - \right. \\ &\quad \left. - k_j' \sum_{l=1}^{j-1} \kappa_l k_l + \frac{\partial f}{\partial \kappa} (k_j k_j' \kappa_j) \right] + h \left[pk_i + k_i \sum_{l=1}^{i-1} \kappa_l k_l' + \right. \\ &\quad \left. + xk_i' - k_i' \sum_{l=1}^{i-1} \kappa_l k_l + \frac{\partial f}{\partial \kappa} (k_i k_i' \kappa_i) \right] \theta(t_i - \tau - 0), \\ \kappa_\tau &= \kappa_{i-1-0} - \text{sign}(\kappa_{i-1-0}) \cdot \theta(t_i - \tau - 0), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\theta(t-\tau-0)$ — непрерывная справа в точке t функция, равная нулю при $\tau \geq t$ и единице при $\tau < t$. Решение (3.5) стохастической системы (3.4) удобно записать, используя случайную аддитивную функцию множества $\nu(dk, dk', d\tau)$, равную числу скачков описанного выше случайного процесса в фазовом пространстве за время $d\tau$, значения которых принадлежат области фазового пространства $dk \times dk'$:

$$\begin{aligned}
 p_\tau &= p + h \int_\tau^t \kappa_\nu \int k' \nu(dk dk' d\tau), \\
 x_\tau &= x - h \int_\tau^t \kappa_\nu \int k \nu(dk dk' d\tau), \\
 s_\tau &= s + h \int_\tau^t \left(p_\nu k + x_\nu k' + \frac{\partial f}{\partial \kappa}(kk' \kappa_\nu) \right) \nu(dk dk' d\tau), \\
 \kappa_\tau &= [\nu(R^n, R^n, (\tau, t]) \pmod{2} - \frac{1}{2}] \xi,
 \end{aligned}$$

где ξ — не зависящая от времени случайная величина, равная плюс или минус единице с равной вероятностью.

Из полученного решения системы Гамильтона следует, что приращения гамильтоновых переменных за один скачок равны

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= -h \kappa k, \\
 \Delta p &= h \kappa k', \\
 \Delta s &= h [k p + k' \kappa + \partial f / \partial \kappa], \\
 \Delta \kappa &= -\text{sign } \kappa,
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

где k, k' — случайные целые числа с совместной плотностью распределения $\beta^{-1} \cdot h(\mu(kk'))$, $\beta = h^{-1} \int \mu(kk') dk dk'$, а производная $\partial f / \partial \kappa$ равна $g(kk') + 2\pi n(kk')$, где $n(kk')$ — произвольная целочисленная функция, μ — четная, а g — нечетная функции.

Функция $g(kk')$ в дальнейшем изложении называется фазовой функцией гамильтоновой системы (3.4).

Будем говорить, что плотность распределения зарядов $G_t(xps)$ переносится стохастической гамильтоновой системой (3.4), если функция $G_t(xps)$ равна математическому ожиданию ее начального состояния G_0 :

$$G_t(xps) = M_t G_0(x_0(x, p, s), p_0(x, p, s), s_0(x, p, s)),$$

где $x_0(x, p, s), p_0(x, p, s), s_0(x, p, s)$ — координаты гамильтоновой траектории в момент $\tau=0$.

Исходя из формул (3.6) для приращения гамильтоновых переменных за один скачок, нетрудно вывести уравнение Кол-

могорова—Феллера для функции G_t :

$$h \frac{\partial G_t}{\partial t}(xps) = \int \{G_t(x + \Delta x, p + \Delta p, s + \Delta s) - G_t(x, p, s)\} \times \\ \times \mu(kk') \frac{S(x + \frac{1}{2}) + \delta(x - \frac{1}{2})}{2} dk dk' dx, \quad (3.7)$$

$$G|_{t=0} = G_0(xps). \quad (3.8)$$

Предположим теперь, что при любом t параметр s функции $G_t(xps)$ является скрытым, т. е. функция

$$G_N(xpt) = \int_{\omega_N} G_t(x, p, s) ds \quad (3.9)$$

не зависит от области $\omega_N(t)$, определяемой соотношением

$$\int dx dp \int_{\omega_N} ds G_t(xps) = N, \quad (3.10)$$

а зависит только от N для любого действительного значения N .

Пусть плотность распределения зарядов $G_t(xps)$, зависящая от скрытого параметра, переносится стохастической гамильтоновой системой (3.4).

Определение 3. Функция

$$G(xpt) = \int_{\omega_1(t)} G_t(xps) ds$$

называется перенормированной по скрытому параметру плотностью распределения зарядов, если область $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$\int dx dp \int_{\omega_1(t)} G_t(xps) ds = 1,$$

где $\mu(kk')$ — плотность вероятности совместного распределения скачков гамильтоновой системы (3.4).

Для того, чтобы определить квазидисперсию относительно G , зависимость от скрытого параметра функции $G_t(xps)$ должна быть такой, чтобы при всех t перенормированная плотность распределения зарядов $G(xpt)$ принадлежала некоторому положительному конусу L_+ . Для электронейтральных систем (3.4) таким конусом, по-видимому, может быть лишь L_+ , порожденный множеством S , состоящим из непрерывных, ограниченных вещественных функций специального вида

$$\sigma(x, p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \int e^{\frac{ipr}{\hbar}} \psi^* \left(x + \frac{r}{2}\right) \psi \left(x - \frac{r}{2}\right) dr, \quad \psi \in L_2(\mathbb{R}^n), \quad (3.11)$$

называемых чистыми состояниями. Непрерывность чистых состояний по обоим аргументам следует из плотности в $L_2(\mathbb{R}^n)$

множества $C_0^\infty(R^n)$, ограниченность — из неравенства Коши — Буняковского:

$$|\sigma(x, p)| \leq \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^n \|\psi\|_{L_2(R^n)}^2,$$

а вещественность доказывается путем замены переменных $v = -v$:

$$\begin{aligned} \sigma^*(xp) &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \int e^{-\frac{ipr}{\hbar}} \psi\left(x + \frac{r}{2}\right) \psi^*\left(x - \frac{r}{2}\right) dr = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \int e^{\frac{ipv}{\hbar}} \psi\left(x - \frac{v}{2}\right) \psi^*\left(x + \frac{v}{2}\right) dv = \sigma(x, p). \end{aligned}$$

Тождество

$$\tilde{\psi}^*(\eta) \tilde{\psi}(\eta') = \int e^{\frac{ix(\eta-\eta')}{\hbar}} \sigma\left(x, \frac{\eta+\eta'}{2}\right) dx,$$

где $\tilde{\psi}(\eta) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{n/2} \int e^{\frac{i\eta x}{\hbar}} \psi(x) dx$ — справедливое для чистых состояний, показывает, что ψ — функция, отвечающая чистому состоянию, определяется с точностью до постоянного множителя $e^{i\theta}$, где θ — вещественная постоянная. Поэтому в дальнейшем изложении функция ψ в формуле (3.11) называется производящей функцией чистого состояния.

Рассмотрим начальную плотность распределения зарядов специального вида

$$G_0(x, p, s) = \sigma(x, p) \varphi(s).$$

В этом простейшем случае параметр s является скрытым. Для того, чтобы обеспечить инвариантность конуса L_+ относительно разрешающего оператора уравнения (3.7), в дальнейшем изложении предполагается, что

$$\varphi(s) = \cos(s/\hbar).$$

Опишем более подробно конус L_+ и содержащее его банахово пространство L .

Пусть S — множество чистых состояний (3.8) и L_+ — положительный конус, состоящий из линейных комбинаций элементов из S с неотрицательными коэффициентами. Конус L_+ можно включать в различные банаховы пространства. Однако удобно выбрать такое банахово пространство L , в котором конус L_+ — производящий. Таким пространством является пополнение L линейной оболочки множества S по следовой норме:

$$\|G\|_+ = \inf \{\lambda_1 + \lambda_2 \mid G = \lambda_1 \sigma_1 - \lambda_2 \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \sigma_1, \sigma_2 \in S\}. \quad (3.12)$$

Положительный конус L_+ полученного банахова пространства L является воспроизводящим, а банахово пространство L — сепарабельным.

В качестве критерия принадлежности произвольной функции конусу L_+ можно использовать следующее условие.

Лемма 3.1. Пусть $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — произвольная полная ортонормированная система в $L_2(R^n)$. Функция $\sigma(x, p)$ тогда и только тогда принадлежит L_+ , когда для любого j

$$a_j \stackrel{\text{def}}{=} \int \sigma(x, p) dx dp \int e^{\frac{ipr}{\hbar}} \psi_j^* \left(x + \frac{r}{2}\right) \psi_j \left(x - \frac{r}{2}\right) dr \geq 0.$$

Знак коэффициентов a_j не зависит от выбора ортонормированной системы.

Доказательство этой леммы, по существу, состоит в вычислении неотрицательных коэффициентов разложения a_j относительно ортонормированных систем, содержащих произвольную заданную функцию ψ .

Множество чистых состояний S образует множество крайних точек конуса L_+ . Единичным сечением конуса L_+ называется множество плотностей распределения заряда, удовлетворяющих условию

$$\int_{\omega_i(t)} ds \int dx dp G_i(x, p, s) = 1.$$

Чистые состояния, принадлежащие единичному сечению, называются единичными чистыми состояниями. Как будет показано ниже, разрешающий оператор уравнения (3.7) сохраняет не только множество чистых состояний S , но и единичное сечение конуса L_+ . Это обстоятельство позволяет дать единообразное для всех G определение квазидисперсии относительно плотностей распределения зарядов $G_i(x, p, s)$.

Рассмотрим теперь банахово пространство L^* , состоящее из всех линейных непрерывных функционалов на L . В качестве квазиединичного элемента $e \in L^*$ примем функцию, тождественно равную единице. Множество L_+^* состоит из всех линейных неотрицательных функционалов на L_+ :

$$(l_+, l_+^*) \geq 0, \forall l_+ \in L_+, \forall l_+^* \in L_+^*. \quad (3.13)$$

Элементы множества L_+^* ограничены относительно нормы L_+ , которая, помимо обычного определения

$$\|l^*\|_* = \sup_{l: \|l\|_+ = 1} |(l^*, l)|,$$

может быть задана следующим образом:

$$\|l^*\|_* = \max \{ \lambda_1, \lambda_2 \mid \lambda_1 e - l^* \in L_+^*, l^* + \lambda_2 e \in L_+^*, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \}.$$

Таким образом, любой элемент из L^* мажорируется снизу и сверху квазиединицей.

Теорема 3.2, приводимая ниже, устанавливает взаимно однозначную связь между вероятностными объектами — плотностями распределения зарядов, эволюционирующими в соответствии со стохастической гамильтоновой системой (3.4) и

квантовыми объектами, функции состояния которых эволюционируют в соответствии с уравнениями Шредингера.

Билинейную операцию $A: L^* \times L^* \rightarrow L^*$, удовлетворяющую условиям п. 2, определим следующим соотношением:

$$(A(f, \varphi), \rho) \stackrel{\text{def}}{=} (f, (\varphi, \mathcal{R}(\rho))), \quad \forall \rho \in L, \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\rho) &= \mathcal{R}_\rho(\xi, \eta | \sigma, \delta) = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2n} \int dk dk' dndn' e^{\frac{\hbar}{2i}(n'k - nk') - i(k\xi + k'\eta) - i(n\sigma + n'\delta)} \times \\ &\quad \times \int e^{i(k+n)x + i(k'+n')p} \rho(x, p) dx dp, \end{aligned} \quad (3.15)$$

причем

$$(\varphi, \mathcal{R}(\rho)) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi, \mathcal{R}_\rho(\xi, \eta | \cdot, \cdot)) = R_\rho(\xi, \eta) \in L,$$

т. е. элемент φ действует по второй паре аргументов функции ρ . Для гладких быстро убывающих функций f и φ результатом действия операции A вновь является функция, причем

$$\begin{aligned} A(f, \varphi)(x, p) &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{\frac{\hbar}{2i}(n'k - nk') + i(k+n)x + i(k'+n')p} \times \\ &\quad \times \tilde{f}(k, k') \tilde{\varphi}(n, n') dk dk' dndn', \end{aligned} \quad (3.16)$$

где \tilde{f} и $\tilde{\varphi}$ — Фурье-образы функций f и φ .

В этом случае справедлива также следующая формула (см. [17, 20—21]):

$$\begin{aligned} A(f, \varphi) &= (f * \varphi)(x, p) = \\ &= f(x, p) e^{\frac{\hbar}{2i} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \right)} \varphi(x, p), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где операторы, помеченные стрелкой \leftarrow , действуют на функции, стоящие слева, а операторы, помеченные стрелкой \rightarrow , действуют на функции, стоящие справа. Равенство (3.17) можно понимать как операторную запись определения (3.16).

Нетрудно видеть, что для операции A , определенной соотношением (3.14) — (3.15), выполнено условие корректности (2.21). Действительно, Фурье-образом единичного элемента $e \in L^*$ является дельта-функция Дирака. Поэтому

$$\begin{aligned} A(f, e) &= A(e, f) = \\ &= \int e^{\frac{\hbar}{2i}(n'k - nk') + i(k+n)x + i(k'+n')p} \tilde{f}(k, k') \times \\ &\quad \times \delta(n) \delta(n') dk dk' dndn' = f(x, p). \end{aligned}$$

Как мы увидим ниже, сужение \mathcal{A} операции A на диагональ действует в конус L_+^* и условия неотрицательности (2.18) также выполняются.

Теорема 3.2. Пусть начальное значение плотности распределения зарядов, переносимой вдоль траекторий стохастической гамильтоновой системы (3.4), имеет вид

$$G_0(x, p, s) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \int e^{i\frac{pz}{\hbar}} \psi_0^* \left(x + \frac{z}{2}\right) \psi_0 \left(x - \frac{z}{2}\right) dz \cdot \cos \frac{s}{\hbar},$$

$$\psi_0 \in L_2(\mathbb{R}^n), \|\psi_0\| = 1.$$

Тогда среднее значение (3.18) любой ограниченной измеримой функции $F(p, x)$ относительно перенормированной по скрытому параметру плотности распределения зарядов $G(x, p, t)$ равно квантовому среднему значению псевдодифференциального оператора \hat{F}_W с вейлевским символом $F(p, x)$ относительно ψ -функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера (3.19):

$$\int dp dx F(p, x) G(x, p, t) = \int dx \psi^*(x, t) \hat{F}_W \psi(x, t), \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{H}}_W\right) \psi(x, t) = 0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0(x). \quad (3.19)$$

Вейлевский символ псевдодифференциального оператора $\hat{\mathcal{H}}_W$ равен

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{1}{2} \int e^{i(p\hbar + x\hbar' + g(k, \hbar'))} \mu(k, k') dk dk'. \quad (3.20)$$

Квазидисперсия относительно перенормированной по скрытому параметру плотности распределения зарядов является нижней оценкой дисперсии косвенных измерений.

Доказательство. Упростим уравнение Колмогорова—Феллера (3.7). Для этого заметим, что второе слагаемое в правой части уравнения (3.7) можно исключить, рассматривая вместо $G_t(x, p, s)$ новую функцию $\tilde{G}_t(x, p, s) = e^{\beta t} G_t(x, p, s)$, где

$$\hbar\beta = \int \mu(k, k') dk dk',$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{G}_t(x, p, s) = \int \tilde{G}_t(x + \Delta x, p + \Delta p, s + \Delta s) \mu(k, k') \times$$

$$\times \frac{1}{2} \left(\delta\left(\kappa + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(\kappa - \frac{1}{2}\right) \right) dk dk' d\kappa. \quad (3.21)$$

Представим начальное распределение зарядов в виде

$$G_0(x, p, s) = \tilde{G}_0(x, p, s) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^n \int e^{i\frac{pz}{\hbar}} \times$$

$$\times \psi_0^* \left(x + \frac{z}{2} \right) \psi_0 \left(x - \frac{z}{2} \right) dz e^{i\frac{s}{\hbar}},$$

и будем искать решение уравнения (3.21) в виде аналогичного выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_t(x, p, s) &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^n \operatorname{Re} \int e^{i\frac{pz}{\hbar}} \psi^* \left(x + \frac{z}{2}, t\right) \times \\ &\times \psi \left(x - \frac{z}{2}, t\right) dz e^{i\frac{s}{\hbar} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} \tilde{\rho}(x, p, t) e^{i\frac{s}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Подставим (3.22) в (3.21) и, учитывая формулы (3.6), получим уравнение для вещественной составляющей $\tilde{\rho}$:

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(x, p, t) &= \int \tilde{\rho}(x + \Delta x, p + \Delta p, t) e^{i\frac{\Delta s}{\hbar}} \times \\ &\times \frac{1}{2} \left(\delta \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) + \delta \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \right) \mu(k, k') dk dk' d\kappa = \\ &= \int e^{i(\pi\kappa + k p + k' x + g(k, k'))} e^{-\hbar k \kappa \frac{\partial}{\partial x} + \hbar k' \kappa \frac{\partial}{\partial p}} \times \\ &\times \tilde{\rho}(x, p, t) \frac{1}{2} \left(\delta \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) + \delta \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \right) \mu(k, k') dk dk' d\kappa. \end{aligned}$$

Выполним интегрирование по переменной κ и для упрощения записи будем считать, что операторы дифференцирования действуют первыми, а операторы умножения на независимую переменную — вторыми. Тогда уравнение для G примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(x, p, t) &= \frac{1}{\hbar} \int e^{i\pi\kappa} e^{ik \left[p - \frac{\kappa\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right] + ik' \left[x + \frac{\kappa\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right] + ig(k, k')} \times \\ &\times \tilde{\rho}(x, p, t) \mu(k, k') \frac{1}{2} \left(\delta \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) + \delta \left(\kappa - \frac{1}{2} \right) \right) dk dk' d\kappa = \\ &= \frac{i}{\hbar} (\hat{\mathcal{H}}_+ - \hat{\mathcal{H}}_-) \tilde{\rho}(x, p, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{\hbar} \hat{F} \tilde{\rho}(x, p, t), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_{\pm}$ — псевдодифференциальные операторы

$$\hat{\mathcal{H}}_{\pm} = \hat{\mathcal{H}}_{\pm} \left(p \mp \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial x}, x \pm \frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \quad (3.24)$$

с символом

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{1}{2} \int e^{i(kp + k'x + g(k, k'))} \mu(k, k') dk dk'. \quad (3.25)$$

Таким образом, функция $\tilde{\rho}$ является решением задачи Коши

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - \hat{F} \right) \tilde{\rho} = 0, \quad (3.26)$$

$$\tilde{\rho}|_{t=0} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^n \int e^{i\frac{pz}{\hbar}} \psi^* \left(x + \frac{z}{2} \right) \psi_0 \left(x - \frac{z}{2} \right) dz,$$

а решение уравнения Колмогорова — Феллера (3.7) выражается

через $\tilde{\rho}$ по формуле

$$G_t(x, p, s) = e^{-\beta t} \tilde{\rho}(x, p, t) \cos \frac{s}{h}. \quad (3.27)$$

Покажем, что существует решение задачи (3.26) специального вида [21]:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x, p, t) &= \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^n \int e^{i\frac{pz}{h}} \psi^*\left(x + \frac{z}{2}, t\right) \psi\left(x - \frac{z}{2}, t\right) dz, \\ \psi &\in L_2(R^n). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Для этого рассмотрим результат действия оператора $\hat{\mathcal{H}}_W = \mathcal{H}\left(\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{2}(x+x^3)\right)$ с вейлевским символом (3.25) на функции из $C_0^\infty(R^n)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_W \varphi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}\left(\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{2}(x+x^3)\right) \varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^n \int e^{i\frac{px}{h}} dp \int e^{-\frac{p\xi}{h}} \mathcal{H}\left(p, \frac{1}{2}(x+\xi)\right) \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^n \int e^{i\frac{px}{h}} dp \int e^{-\frac{p\xi}{h}} \times \\ &\quad \times \int e^{i(g(h, k') + pk + \frac{1}{2}(x+\xi)k')} \mu(k, k') dk dk' = \\ &= \frac{1}{2} \int e^{ig(h, k') + i(x + \frac{1}{2}kh)k'} \mu(k, k') \varphi(x + kh) dk dk'. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Поскольку $\|\hat{\mathcal{H}}_W \varphi\|_{L_2} \leq \beta/2 \|\varphi\|_{L_2}$, то формула (3.29) продолжается по непрерывности на все функции из $L_2(R^n)$.

Теперь нетрудно убедиться, что для функции вида (3.28) справедливо важное равенство [21]:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{H}}_+ - \hat{\mathcal{H}}_-) \tilde{\rho} &= \hat{H} \tilde{\rho}(x, p, t) = \\ &= \left(-\frac{1}{2\pi h}\right)^n \int e^{i\frac{pz}{h}} dz \left\{ \psi^*\left(x + \frac{z}{2}, t\right) \hat{\mathcal{H}}_W \psi\left(x - \frac{z}{2}, t\right) - \right. \\ &\quad \left. - \psi\left(x - \frac{z}{2}, t\right) \hat{\mathcal{H}}_W^* \psi^*\left(x + \frac{z}{2}, t\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Действительно, в силу (3.29), выполнено равенство:

$$\begin{aligned} &\int e^{i\frac{pz}{h}} \psi^*\left(x + \frac{z}{2}, t\right) \hat{\mathcal{H}}_W \psi\left(x - \frac{z}{2}, t\right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int dz e^{i\frac{pz}{h}} \psi^*\left(x + \frac{z}{2}, t\right) \int e^{ig(hk') + ik'(x - \frac{z}{2} + \frac{kh}{2})} \times \\ &\quad \times \mu(k, k') \psi\left(x - \frac{z}{2} + kh, t\right) dk dk'. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Введем новую переменную $z - kh = v$. Тогда правая часть равенства (3.31) преобразуется к интегралу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int e^{i(g(kk') + \rho k + k'x)} \mu(kk') dk dk' \int e^{\frac{iv}{h} (p - \frac{k'h}{2})} \times \\ & \times \psi^* \left(x + \frac{kh}{2} + \frac{v}{2}, t \right) \psi \left(x + \frac{kh}{2} - \frac{v}{2}, t \right) \frac{dv}{(2\pi h)^2} = \quad (3.32) \\ & = \frac{1}{2} \int e^{i(g(k'h) + \rho k + k'x)} \mu(kk') dk dk' \tilde{\rho} \left(x + \frac{kh}{2}, p - \frac{hk'}{2}, t \right) = \\ & = \hat{\mathcal{H}}_0 \tilde{\rho} (x, p, t). \end{aligned}$$

Используя четность функции μ нечетность g и замену переменных $z + kh = v$, получим аналогичное равенство для $\hat{\mathcal{H}}_{+0}^*$:

$$\begin{aligned} & \int dz e^{\frac{ipz}{h}} \psi \left(x - \frac{z}{2}, t \right) \hat{\mathcal{H}}_W^* \psi^* \left(x + \frac{z}{2}, t \right) = \frac{1}{2} \int dz e^{\frac{ipz}{h}} \psi \left(x - \frac{z}{2}, t \right) \times \\ & \times \int e^{-ig(kh') - ik' \left(x + \frac{z}{2} + \frac{kh}{2} \right)} \mu(kk') \psi^* \left(x + \frac{z}{2} + kh, t \right) dk dx' = \\ & = \frac{1}{2} \int \mu(kk') dk dk' e^{-ig(kh')} \int e^{\frac{iv}{h} (v - kh) - ik' \left(x + \frac{v}{2} \right)} \times \\ & \times \psi \left(x - \frac{v}{2} + \frac{kh}{2} \right) \psi^* \left(x + \frac{v}{2} + \frac{kh}{2} \right) dv = \\ & = \frac{1}{2} \int \mu(kk') dk dk' e^{ig(kh') + i\rho k + ik'x} \int e^{\frac{iv}{h} (p + \frac{k'h}{2})} \times \\ & \times \psi \left(x - \frac{v}{2} - \frac{kh}{2} \right) \psi^* \left(x + \frac{v}{2} - \frac{kh}{2} \right) dv = \\ & = \frac{1}{2} \int \mu(kk') dk dk' e^{ig(kh') + i\rho k + ik'x} \times \\ & \times \tilde{\rho} \left(x - \frac{kh}{2}, p + \frac{k'h}{2}, t \right) = \hat{\mathcal{H}}_{+0}^* \tilde{\rho}. \end{aligned}$$

Равенство (3.30) доказано. Из него стандартным образом (см. [9,21]) выводится уравнение для функций ψ и ψ^* :

$$\begin{aligned} & \int e^{\frac{ipz}{h}} \left\{ \psi^* \left(x + \frac{z}{2}, t \right) \left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{H}}_W \right) \psi \left(x - \frac{z}{2}, t \right) - \right. \\ & \left. - \psi \left(x + \frac{z}{2}, t \right) \left(ih \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{H}}_W^* \right) \psi^* \left(x + \frac{z}{2}, t \right) \right\} dz = 0, \quad (3.33) \end{aligned}$$

которое выполнено, если ψ является решением уравнения Шредингера:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{H}}_W \right) \psi(x, t) = 0, \\ & \psi|_{t=0} = \psi_0(x) \in L_2(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Заметим, что вещественность символа $\mathcal{H}(p, x)$ (т. е. само-сопряженность оператора $\widehat{\mathcal{H}}_W$) следует из предположений относительно функций μ и g . Поэтому решение уравнения (3.34) обязано сохранять L_2 -норму начального условия.

Итак, мы доказали, что решение уравнения Колмогорова — Феллера (3.7) с начальным условием (3.11) может быть представлено в виде чистого состояния:

$$G_t(xps) = e^{-\beta t} \bar{p}(xpt) \cos \frac{s}{h} = \\ = \frac{e^{-\beta t}}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{ipz}{h}} \psi^* \left(x + \frac{z}{2}, t \right) \psi \left(x - \frac{z}{2}, t \right) dz \cdot \cos \frac{s}{h}, \quad (3.35)$$

где $\psi^*(x, t)$ — решение задачи Коши для уравнения Шредингера (3.34). Отсюда следует, что распределение зарядов G_t является также крайней точкой описанного выше конуса L_+ банахова пространства L с нормой (3.12). Единственность такого представления решения G_t следует из единственности решения задачи Коши для уравнения (3.23) в классе непрерывных ограниченных функций переменных x и p , непрерывно дифференцируемых по t .

Перенормировка функции $G_t(xps)$ по скрытому параметру s :

$$G(xp_t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\omega_1} G_t(xps) ds$$

позволяет записать $G(xp_t)$ в виде:

$$G(xp_t) = \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^n \int e^{\frac{ipz}{h}} \psi^* \left(x + \frac{z}{2}, t \right) \psi \left(x - \frac{z}{2}, t \right) dz, \quad (3.36)$$

где $\psi(x, t)$ — решение задачи Коши для уравнения Шредингера (3.34). Таким образом, перенормированная по скрытому параметру плотность распределения заряда является крайней точкой единичного сечения конуса L_+ .

Для доказательства равенства (3.18) воспользуемся представлением (3.36). В соответствии с определением оператора \widehat{F}_W имеем:

$$\int \psi^*(xt) \widehat{F}_W \psi(xt) dx = \\ = \int \psi^*(x, t) dx \left(\frac{1}{2\pi h} \right)^n \int e^{\frac{ipx}{h}} dp \int e^{-\frac{ip\xi}{h}} \mathcal{F}_W \left(p, \frac{x+\xi}{2} \right) \psi(\xi, t) d\xi.$$

С помощью новых переменных $\frac{x+\xi}{2} = y$, $x-\xi = z$ правая часть последней формулы переписывается в виде (3.18):

$$\left(\frac{1}{2\pi h} \right)^n \int \mathcal{F}(p, y) dp dy \int e^{\frac{ipz}{h}} \psi^* \left(y + \frac{z}{2}, t \right) \psi \left(y - \frac{z}{2}, t \right) dz = \\ = \int \mathcal{F}(p, y) G(y p_t) dp dy.$$

Относительно $G(x, p_i)$ можно определить квазидисперсию и дисперсию косвенных измерений для операции квазиумножения (3.16).

Для доказательства того факта, что квазидисперсия относительно зарядов $G_i(xp)$ дает нижнюю оценку дисперсии косвенных измерений, можно воспользоваться предложением 2.1. Для этого достаточно убедиться, что операция квазиумножения (3.16) удовлетворяет условию неотрицательности (2.18). Проверим выполнение этого условия.

Заметим, что операция квазиумножения (3.16) сопоставляет вейлевским символам ограниченных операторов $L_2(\mathbb{R}^n)$ вейлевский символ их произведения, а положительный конус в L_+^* состоит из ограниченных в L_2 неотрицательно определенных операторов:

$$L_+^* = \{M(p, x) : (\psi, \hat{H}_W \psi) > 0, \psi \in L_2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Условие положительной определенности квазиумножения достаточно проверить для крайних точек положительного конуса L_+^* , т. е. для функций (3.36).

В этом случае

$$M_n^{ij} = (\psi, \hat{M}_i \psi) \geq 0; \quad \mathcal{M}_n^{ij} = (\hat{H}_i \psi, \hat{H}_j \psi) \geq 0,$$

где $\{\hat{H}_{ij}\}_1^n$ — множество неотрицательно определенных ограниченных операторов в L_2 , мажорируемых в сумме единичным оператором:

$$e - \sum_{i=1}^n \hat{H}_i \geq 0.$$

Поэтому ясно, что для любого k

$$\begin{aligned} (\hat{H}_k \psi, \psi) &\geq \left(\hat{H}_k \psi, \sum_{i=1}^n \hat{H}_i \psi \right) \geq 0, \\ (\hat{H}_k \psi, \hat{H}_i \psi) &= (\psi, \hat{H}_k \hat{H}_i \psi) \geq 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Неотрицательная определенность матрицы

$$M_n - \mathcal{M}_n = \begin{vmatrix} (\hat{H}_1 \psi, (E - \hat{H}_1) \psi) & (-\hat{H}_1 \psi, \hat{H}_2 \psi) & \dots & (-\hat{H}_1 \psi, \hat{H}_n \psi) \\ (-\hat{H}_2 \psi, \hat{H}_1 \psi) & (\hat{H}_2 \psi, (E - \hat{H}_2) \psi) & \dots & (-\hat{H}_2 \psi, \hat{H}_n \psi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-\hat{H}_n \psi, \hat{H}_1 \psi) & (\hat{H}_n \psi, \hat{H}_2 \psi) & \dots & (\hat{H}_n \psi, (E - \hat{H}_n) \psi) \end{vmatrix}$$

следует из оценок (3.37) и теоремы Гершгорина (см. [3]) о спектре матриц. Таким образом, теорема (3.2) доказана.

В заключение отметим, что в отличие от классического случая, квантовомеханическая квазидисперсия не всегда достигается в том смысле, что для произвольной функции $f(p, q)$ не всегда удается указать несмещенное косвенное измерение

$mf(d\lambda)$, дающее среднеквадратичную ошибку, совпадающую со своей нижней границей — квазидисперсией $\mathcal{D}(f)$. Условия, при которых существуют эффективные косвенные измерения в квантовых системах, реализующие минимальную ошибку $\mathcal{D}(f)$, исследовались в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белавкин В. П.*, Об обобщенных соотношениях неопределенности Гейзенберга и эффективных измерений в квантовых системах. Теор. и мат. физика, 1976, 26, № 3, 316—329
2. —, Операционная теория стохастических процессов. В сб. «VII Всесоюзная конференция по кодированию и передаче информации. Часть I». Москва — Вильнюс, 1978, 23—28
3. *Восводин В. В.*, Вычислительные основы линейной алгебры. М., Наука, 1977, 303 с. (РЖМат, 1978, 4Б675К)
4. *Дирак П.*, Принципы квантовой механики. Пер. с англ. М. Физматгиз, 1960, 434 с.
5. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.*, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, 1950
6. *Колмогоров А. Н.*, Основные понятия теории вероятностей. М., Наука, 119 с. (РЖМат, 1974, 9ВК)
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Статистическая физика. М., Наука, 1964, 567 с. (РЖФиз, 1965, 5Б60)
8. *Маслов В. П.*, Операторные методы. М., Наука, 1973, 543 с.
9. —, Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Феймана для нелинейных уравнений. М., Наука, 1975, 192 с. (РЖМат, 1976, 11Б972К)
10. —, *Чеботарев А. М.*, Скачкообразные процессы и их применения в квантовой механике. «Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. Сер. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет.», 1978, 18, 1—78
11. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.*, Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. Изд. 2-е перераб. М., Наука, 1973, 494 с. (РЖМат, 1974, 1В110К)
12. *Рихтмайер Р., Мортон К.*, Разностные методы решения краевых задач. Пер. с англ. М., Мир, 1972, 420 с. (РЖМат, 1972, 9Б738К)
13. Функциональный анализ. Изд. 2-е перераб. и доп. Ред. Крейн С. Г. М., Наука, 1972, 544 с. (РЖМат, 1972, 10Б419К)
14. *Холето А. С.*, Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М., Наука, 1980, 320 с.
15. *Хурец Я. И., Яковлев В. П.*, Финитные функции в физике и технике. М., Наука, 1971, 408 с. (РЖМат, 1972, 1А41К)
16. *Эмх Ж.*, Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. Пер. с англ. М., Мир, 1976, 423 с. (РЖМат, 1976, 10Б455К)
17. *Bayeh F.*, Deformation theory and quantization. I—II. Ann. Iis. New York, 1978, 111, № 1, 61—151
18. *Davies E. B., Lewis J. T.*, An operational approach to quantum probability. Commun. Math. Phys., 1970, 17, № 3, 239—260 (РЖМат, 1971, 2Б856)
19. *Mielnik K. B.*, Theory of filters. Commun. Math. Phys., 1969, 15, № 1, 1—46
20. *Sharan P.*, Star-product representation of path integrals. Phys. Rev., 1979, 20, № 2, 414—418 (РЖМат, 1980, 3Б460)
21. *Smith T. B.*, Semiclassical approximation in the Weyl picture by path summation. J. Phys. Math. Gen, 1978, A11, № 11, 2179—2190 (РЖМат, 1979, 5Б486)