Ф. М. Кириллова, С. В. Чуракова, К проблеме управляемости линейных систем с последействием, *Дифференц. уравнения*, 1967, том 3, номер 3, 436–445

МАРТ 1967 г., ТОМ III, № 3

УДК 517.941.32

К ПРОБЛЕМЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ф. М. КИРИЛЛОВА, С. В. ЧУРАКОВА

Рассматривается задача об управлении динамическими системами с запаздывающим аргументом. Вводится понятие относительно управляемой системы, что обусловлено спецификой дифференциальных уравнений с запаздываниями; исследуются вопросы относительной управляемости линейных систем. Также приводятся условия, обеспечивающие управляемость [1] для некоторых линейных систем с запаздыванием.

Полученные результаты тесно связаны с теорией оптимальных процессов [2—5].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть Z — пространство состояний динамической системы; U — множество управляющих воздействий (управлений); $z = z(z_0, u, t)$ — вектор, характеризующий состояние динамической системы в момент времени t, обусловленное начальным условием z_0, $z_0 \in Z$, $(z_0 = z|_{t=t_0})$ и управлением u, $u \in U$. Через X обозначим подпространство из Z, через $x = x(z_0, u, t)$ — проекцию вектора состояния $z(z_0, u, t)$ на X.

Определения. 1.1. Состояние z_0 назовем *управляемым* в классе U (*управляемое состояние*), если существуют управление u, $u = u_{z_0} \in U$, и число T, $t_0 \leqslant T = T_{z_0} < \infty$, такие, что $z(z_0, u, T) = 0$.

1.2. Состояние z_0 назовем *управляемым в классе* U *относительно заданного множества* X (*относительно управляемое состояние*), если существуют управление u, $u = u_{z_0} \in U$, и число T, $t_0 \leqslant T = T_{z_0} < \infty$, такие, что $x(z_0, u, T) = 0$.

1.3. Если каждое состояние z_0, $z_0 \in Z$, динамической системы управляемо, то будем говорить, что система *управляема* (*управляемая система*). Аналогично под *относительно управляемой* системой будем понимать динамическую систему, каждое состояние z_0 которой относительно управляемо.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-h) + Cu(t), \quad t \in [0, T], \quad T < \infty,$$
$$x(0) = x^0, \quad x(\theta) = \varphi(\theta), \quad -h \leqslant \theta < 0, \tag{1.1}$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — вектор фазовых координат, $x \in X$; $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_r(t)\}$ — управление, $u \in U$, U — множество кусочно-непрерывных функций; A, B, C — постоянные матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times r)$ соответственно, h — постоянное запаздывание.

Пространство состояний Z рассматриваемой системы суть множество n-мерных вектор-функций

$$\{x(\theta), \quad t-h \leqslant \theta \leqslant t\}. \tag{1.2}$$

Пространство n-мерных векторов x (фазовое пространство X) является подпространством для Z. Начальное состояние z_0 системы (1.1) определяется условиями

$$z_0 = \{x_0(\theta), \quad x_0(\theta) = \varphi(\theta), \quad -h \leqslant \theta < 0, \quad x(0) = x^0\}. \tag{1.3}$$

Состояние $z = z(z_0, u, t)$ системы (1.1) в пространстве Z в момент t определяется отрезком траектории (1.2) из фазового пространства X.

Ниже предполагается, что движения системы (1.1) происходят ($t \geqslant 0$) в пространстве непрерывных функций. Определяющие начальное состояние (1.3) функции $\varphi(\theta)$ считаются кусочно-непрерывными.

В соответствии с введенными определениями состояние (1.3) системы (1.1) управляемо, если существует управление u, $u \in U$, такое, что $x(t) \equiv \equiv 0$, $T-h \leqslant t \leqslant T$ при $T < \infty$.

Состояние (1.3) системы (1.1) является относительно управляемым, если существует такое управление u, $u \in U$, что $x(T) = 0$ при $T < \infty$.

Замечание 1.1. Понятие относительно управляемой системы обусловлено спецификой дифференциальных уравнений с запаздыванием. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений ($B = 0$) множества Z и X совпадают и, следовательно, понятие «относительно управляемое состояние» эквивалентно известному [1] термину «управляемое состояние».

§ 2. ОТНОСИТЕЛЬНО УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Пусть в уравнении (1.1) c — n-мерный вектор. Образуем последовательность p_l^k, $l = 1, \ldots, 2^{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$:

$$p_1^1 = c, \quad p_{2l-1}^{r+1} = Ap_l^r, \quad p_{2l}^{r+1} = Bp_l^r \tag{2.1}$$

и обозначим через $r_{(2.1)}$ число линейно независимых векторов в (2.1).

Лемма 2.1. *Пусть $r_{(2.1)} = m$. Тогда среди элементов p_l^k, $k \leqslant m$, содержится система векторов, образующая базис для (2.1).*

Доказательство. Пусть для каждого k, $k = 1, \ldots, s$, найдется хотя бы один элемент p_l^k линейно независимый по отношению к элементам p_l^r, $r < k$, но все p_l^{s+1}, $l = 1, \ldots, 2^s$, линейно выражаются через p_l^k, $k \leqslant s$. Обозначим через $p_1, \ldots, p_\sigma$, $s \leqslant \sigma \leqslant m$, максимальную линейно независимую систему векторов p_l^k, $k \leqslant s$. Покажем, что все p_l^k, $s+1 < k \leqslant n$, являются некоторой линейной комбинацией $p_1, \ldots, p_\sigma$.

Действительно, если

$$p_l^{s+1} = \lambda_{1l}^{s+1} p_1 + \ldots + \lambda_{\sigma l}^{s+1} p_\sigma, \quad l = 1, \ldots, 2^s,$$

то

$$p_{2l-1}^{s+2} = Ap_l^{s+1} = A(\lambda_{1l}^{s+1} p_1 + \ldots + \lambda_{\sigma l}^{s+1} p_\sigma) =$$

$$= \lambda_{1l}^{s+1} Ap_1 + \ldots + \lambda_{\sigma l}^{s+1} Ap_\sigma = \lambda_{1,2l-1}^{s+2} p_1 + \ldots + \lambda_{\sigma,2l-1}^{s+2} p_\sigma.$$

Аналогично

$$p_{2l}^{s+2} = Bp_l^{s+1} = B(\lambda_{1l}^{s+1} p_1 + \ldots + \lambda_{\sigma l}^{s+1} p_\sigma) = \lambda_{1,2l}^{s+2} p_1 + \ldots + \lambda_{\sigma,2l}^{s+2} p_\sigma.$$

Вообще, если

$$p_l^k = \mu_{1l}^k p_1 + \ldots + \mu_{\sigma l}^k p_\sigma, \quad l = 1, \ldots, 2^{k-1}, \quad k = s+1, \ldots, r, \quad r < n,$$

то

$$p_{2l-1}^{r+1}=Ap_l^r=A(\mu_{1l}^r\, p_1+\ldots+\mu_{\sigma}^r\, p_\sigma)=\mu_{1,2l-1}^{r+1}p_1+\ldots+\mu_{\sigma,2l-1}^{r+1}p_\sigma$$

и

$$p_{2l}^{r+1}=Bp_l^r=B(\mu_{1l}^r\, p_1+\ldots+\mu_{\sigma l}^r p_\sigma)=\mu_{1,2l}^{r+1}\, p_1+\ldots+\mu_{\sigma,2l}^{r+1}p_\sigma.$$

Отсюда следует, что $\sigma=m$.

Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Для того чтобы система (1.1) ($r=1$) была относительно управляемой, необходимо чтобы* $r_{(2.1)}=n$.

Доказательство. Предположим, что $r_{(2.1)}=m$, $m<n$. Максимальную линейно независимую систему векторов $d_1,\ldots,d_m$ из p_l^k, $k\leqslant m$, (см. лемму 2.1) дополним векторами $g_{m+1},\ldots,g_n$ так, чтобы совокупность $d_1,\ldots,d_m,g_{m+1},\ldots,g_n$ образовала базис в X.

Пусть D — матрица, столбцы которой состоят из координат векторов $d_1,\ldots,d_m,g_{m+1},\ldots,g_n$. Полагая $x=Dy$, после элементарных преобразований получим

$$\dot y(t)=A_1y(t)+B_1y(t-h)+c_1u(t), \tag{2.2}$$

где

$$A_1=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} & \alpha_{1,m+1} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mm} & \alpha_{m,m+1} & \ldots & \alpha_{mn}\\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{m+1,m+1} & \ldots & \alpha_{m+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,m+1} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \ldots & \beta_{1m} & \beta_{1,m+1} & \ldots & \beta_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{m1} & \ldots & \beta_{mm} & \beta_{m,m+1} & \ldots & \beta_{mn}\\ 0 & \ldots & 0 & \beta_{m+1,m+1} & \ldots & \beta_{m+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \ldots & 0 & \beta_{n,m+1} & \ldots & \beta_{nn}\end{pmatrix},\quad c_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, последние $n-m$ координат системы (2.2) не зависят от управления $u(t)$. Но тогда в силу неособенности матрицы D исходная система (2.1) не является относительно управляемой, что противоречит условию теоремы. Значит, $r_{(2.1)}=n$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим последовательность q_l^k, $l=1,\ldots,k$, $k=1,\ldots,n$:

$$q_1^1=c,\quad q_l^{r+1}=Bq_{l-1}^r+Aq_l^r, \tag{2.3}$$

$q_l^k=0$ при $l=0$ и $l>k$.

Нетрудно видеть, что $r_{(2.3)}\leqslant r_{(2.1)}$.

Теорема 2.2. *Если* $r_{(2.3)}=n$, *то система (1.1) ($r=1$) относительно управляема.*

Доказательство. Запишем решение $x=x(T)$ уравнения (1.1) в момент $t=T$ в виде

$$x=e+Su, \tag{2.4}$$

$$e=\int_{-h}^{0}F(T,\,\tau+h)B\varphi(\tau)\,d\tau+F(T,\,0)x^0,\quad Su=\int_0^T F(T,\,\tau)cu(\tau)\,d\tau.$$

Здесь $F(t, \tau)$ — матрица, удовлетворяющая условиям

$$\frac{dF(t, \tau)}{dt} = AF(t, \tau) + BF(t-h, \tau),$$

$$F(t, \tau) \equiv 0, \quad \tau > t, \quad \lim_{\tau \to t+0} F(t, \tau) = 0, \quad \lim_{\tau \to t-0} F(t, \tau) = E.$$

Если

$$(g, F(T, \tau)c) \not\equiv 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad \|g\| \neq 0, \tag{2.5}$$

то для каждого начального состояния (1.3) можно указать [6, 7] кусочно-постоянную функцию $u^0(t)$, которая удовлетворяет (2.4), где $x = 0$. Значит, при $u = u^0(t)$ имеем: $x(T) = 0$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться в выполнении условия (2.5).

Допустим противное. Пусть существует вектор g, $\|g\| \neq 0$, такой, что $(g, F(T, \tau)c) \equiv 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

Рассмотрим тождества:

$$(g, F(T, \tau)c) \equiv 0, \quad T-h \leqslant \tau \leqslant T, \tag{2.6}$$

$$(g, F(T, \tau)c) \equiv 0, \quad T-2h \leqslant \tau \leqslant T-h, \tag{2.7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(g, F(T, \tau)c) \equiv 0, \quad T-nh \leqslant \tau \leqslant T-(n-1)h. \tag{2.8}$$

В силу соотношения

$$\frac{dF(T, \tau)}{d\tau} = -F(T, \tau)A - F(T, \tau+h)B$$

после дифференцирования (2.6) получаем

$$\psi_i^{(1)}(\tau) = \left(g, F(T, \tau)q_1^i\right) + \left(g, F(T, \tau+h)q_2^i\right) \equiv 0,$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad T-h \leqslant \tau \leqslant T.$$

Определим пределы функций $\psi_i^{(1)}(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$ при $\tau \to T-h+0$ и $\tau \to T-0$. Имеем

$$A_1) \quad \left(g, F(T, T-h)q_1^i\right) = 0; \quad B_1) \quad \left(g, q_1^i\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Аналогично из (2.7) получаем

$$\psi_i^{(2)}(\tau) = \left(g, F(T, \tau)q_1^i\right) + \left(g, F(T, \tau+h)q_2^i\right) + \left(g, F(T, \tau+2h)q_3^i\right) \equiv 0,$$

$$i = 1, \ldots, n, \quad T-2h \leqslant \tau \leqslant T-h.$$

Переход к пределу при $\tau \to T-2h+0$ и $\tau \to T-h-0$ приводит к соотношениям

$$A_2) \quad \left(g, F(T, T-2h)q_1^i\right) + \left(g, F(T, T-h)q_2^i\right) = 0; \quad B_2) \quad \left(g, q_2^i\right) = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Для отрезка $[T-nh, T-(n-1)h]$ путем аналогичных преобразований приходим к условиям

$$A_n) \quad \sum_{k=1}^{n}\left(g, F(T, T-(n-k+1)h)q_k^i\right) = 0; \quad B_n) \quad \left(g, q_n^i\right) = 0, \ i=1, \ldots, n.$$

Объединяя соотношения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, получаем $(g, q_l^k) = 0$, $l = 1, \ldots, k$; $k = 1, \ldots, n$. Но $r_{(2.3)} = n$. Значит, вектор g является нулевым, что невозможно.

Теорема доказана.

Замечания. 2.1. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений ($B = 0$) последовательности (2.1) и (2.3) совпадают, а условие $r_{(2.1)} = r_{(2.3)} = n$ превращается в условие линейной независимости векторов $c, Ac, \ldots, A^{n-1}c$.

2.2. Если $A = 0$, то необходимое и достаточное условие относительной управляемости системы (1.1) ($r = 1$) выражается требованием линейной независимости векторов $c, Bc, \ldots, B^{n-1}c$.

2.3. Если $n \leqslant 3$, то равенство $r_{(2.1)} = r_{(2.3)}$ выполнено для любых матриц A и B. Следовательно, условие $r_{(2.1)} = n$ является необходимым и достаточным для относительной управляемости таких систем.

Подобное утверждение не имеет места в случае, например, систем 4-го порядка. В этом можно убедиться, рассматривая систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + cu(t),$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & 0 & a_2 & a_7 \\ 0 & 0 & -1 & a_8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 1 & 0 & a_4 & b_4 \\ 0 & 1 & 0 & b_5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь a_i $(i = 1, \ldots, 8)$ и b_j $(j = 1, \ldots, 5)$ — произвольные постоянные. Имеем: $r_{(2.1)} = 4$, $r_{(2.3)} = 3$, т. е. достаточные условия относительной управляемости системы не выполнены.

Рассмотрим теперь систему (2.1) в предположении, что $r > 1$. Утверждения, содержащие необходимые и достаточные условия относительной управляемости для таких систем, приведем без доказательства, так как они в основных чертах повторяют схему рассуждений из теорем 2.1 и 2.2.

Теорема 2.3. *Для того чтобы система (1.1) была относительно управляемой, необходимо, чтобы ранг матрицы*

$$P = \{P_1^1, P_1^2, P_2^2, P_1^3, \ldots, P^n_{2^{n-1}}\}$$

был равен n, где

$$P_1^1 = C, \quad P_{2l-1}^{k+1} = AP_l^k, \quad P_{2l}^{k+1} = BP_l^k, \quad l = 1, \ldots, 2^{k-1}; \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{2.9}$$

Заметим, что при преобразовании системы (1.1) к виду (ср. с (2.2))

$$\dot{y}(t) = A_1 y(t) + B_1 y(t-h) + C_1 u(t),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1m} & \gamma_{1,m+1} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mm} & \gamma_{m,m+1} & \cdots & \gamma_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{m+1,m+1} & \cdots & \gamma_{m+1,n} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n,m+1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1m} & \delta_{1,m+1} & \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{m1} & \dots & \delta_{mm} & \delta_{m,m+1} & \dots & \delta_{mn} \\ 0 & \dots & 0 & \delta_{m+1,m+1} & \dots & \delta_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \delta_{n,m+1} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

используется следующее свойство последовательности матриц (2.9): если ранг матрицы P равен m, $m \leqslant n$, то ранг матрицы

$$P = \{P_1^1,\ P_1^2,\ P_2^2,\ P_1^3,\ \dots,\ P_{2m-1}^m\}$$

также равен m.

Теорема 2.4. *Если ранг матрицы*

$$Q = \{Q_1^1,\ Q_1^2,\ Q_2^2,\ Q_1^3,\ \dots,\ Q_n^n\} \tag{2.10}$$

равен n, где

$$Q_1^1 = C,\ \ Q_l^{k+1} = BQ_{l-1}^k + AQ_l^k,\quad l = 1, \dots, k,\quad k = 1, \dots, n,$$

$$Q_l^k = 0,\quad l = 0,\quad l > k,$$

то система (1.1) относительно управляема.

§ 3. УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Результаты по относительной управляемости, описанные в § 2, позволяют в ряде случаев полностью исследовать вопросы управляемости. Рассмотрение таких связей между относительной управляемостью и управляемостью начнем с уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t-h) + cu(t). \tag{3.1}$$

Пусть в (3.1) управление u — скалярная функция, c — n-мерный вектор. Справедливо утверждение.

Теорема 3.1 *Для того чтобы система (3.1) была управляема, необходимо и достаточно, чтобы она была относительно управляема.*

Необходимость очевидна.

Достаточность. Приведем систему (3.1) к виду ([8], стр. 170)

$$\dot y(t) = B_1 y(t-h) + c_1 u(t), \tag{3.2}$$

$$B_1 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \dots 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \dots 0 & \alpha_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 1 & \alpha_n \end{Bmatrix},\quad c_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Пусть $\alpha_i = 0$, $i \leqslant k$, но $\alpha_{k+1} \neq 0$. Систему (3.2) разобьем на две подсистемы относительно векторов $\bar{y} = \{y_1, \ldots, y_k\}$ и $\bar{\bar{y}} = \{y_{k+1}, \ldots, y_n\}$:

$$\dot{\bar{y}}(t) = D_1 \bar{y}(t-h) + e_1 u(t), \tag{3.3}$$

$$\dot{\bar{\bar{y}}}(t) = D_2 \bar{\bar{y}}(t-h) + e_2 y_k(t-h). \tag{3.4}$$

Здесь

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{k+1} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{k+2} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_{k+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие

$$y(t) \equiv 0, \quad T-h \leqslant t \leqslant T, \tag{3.5}$$

будет выполнено, если управление $u(t)$ на отрезке $[T-nh,\ T-kh]$ найти как решение уравнения

$$\bar{\bar{y}}^{(n)}(t) = 0, \quad T-h \leqslant t \leqslant T, \tag{3.6}$$

положить $u(t) \equiv 0$ на отрезке*) $[T-kh,\ T]$ и, кроме того, при $u \in U$ обеспечить равенства

$$y_k^{(i)}(T-h) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

(считаем $y_0(t-h) = u(t)$ в случае $k = 0$).

В силу (3.3), (3.4) уравнение (3.6) можно представить в виде

$$\begin{gathered} D_2^n \bar{\bar{y}}(t-nh) + D_2^{n-1} e_2 y_k(t-nh) + D_2^{n-2} e_2 y_{k-1}(t-nh) + \\ + \ldots + D_2^{n-k} e_2 y_1(t-nh) + D_2^{n-k-1} e_2 u(t-(n-1)h) + \\ + D_2^{n-k-2} e_2 \dot{u}(t-(n-2)h) + \ldots + D_2 e_2 u^{(n-k-2)}(t-(k+1)h) + \\ + e_2 u^{(n-k-1)}(t-kh) = 0, \quad T-h \leqslant t \leqslant T. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Так как векторы $e_2, D_2 e_2, \ldots, D^{n-k-1} e_2$ линейно независимы, то (3.7) представляет собой разрешимую относительно переменных $u(t-(n-1)h)$, $\dot{u}(t-(n-2)h), \ldots, u^{(n-k-1)}(t-kh)$ систему, причем искомые переменные на отрезке $[T-nh,\ T-kh]$ определяются через траекторию системы (3.2) на предыдущем отрезке $[T-(n+1)h,\ T-nh]$.

Пусть управление $u(t)$, $T-nh \leqslant t \leqslant T-kh$, найдено из условия (3.7). Тогда на отрезке $[T-h,\ T]$ имеют место следующие тождества:

$$\begin{gathered} D_2^n \bar{\bar{y}}(t-nh) + D_2^{n-1} e_2 y_k(t-nh) + D_2^{n-2} e_2 \dot{y}_k(t-(n-1)h) + \ldots + \\ + D_2 e_2 y_k^{(n-2)}(t-2h) + e_2 y_k^{(n-1)}(t-h) \equiv 0, \end{gathered}$$

*) В точках разрыва τ управления $u(t)$ полагаем $u(\tau) = u(\tau - 0)$.

$$D_2^{n-1}\bar{\bar{y}}(t-(n-1)h)+D_2^{n-2}e_2y_k(t-(n-1)h)+D_2^{n-3}e_2\dot{y}_k(t-(n-2)h)+$$
$$+\ldots+D_2e_2y_k^{(n-3)}(t-2h)+e_2y_k^{(n-2)}(t-h)\equiv d_1,$$
$$D_2^{n-2}\bar{\bar{y}}(t-(n-2)h)+D_2^{n-3}e_2y_k(t-(n-2)h)+D_2^{n-4}e_2\dot{y}_k(t-(n-3)h)+$$
$$+\ldots+D_2e_2y_k^{(n-4)}(t-2h)+e_2y_k^{(n-3)}(t-h)\equiv d_1t+d_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D_2\bar{\bar{y}}(t-h)+e_2y_k(t-h)\equiv d_1\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+d_2\frac{t^{n-3}}{(n-3)!}+\ldots+d_{n-1},$$
$$\bar{\bar{y}}(t)\equiv d_1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+d_2\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+d_{n-1}t+d_n, \tag{3.8}$$

где d_i $(i=1,\ \ldots,\ n)$ — произвольные постоянные векторы. Можно показать, что имеют место соотношения

$$\left(\frac{T^{n-2}}{(n-2)!}E-\frac{(T-h)^{n-1}}{(n-1)!}D_2\right)d_1+\left(\frac{T^{n-3}}{(n-3)!}E-\frac{(T-h)^{n-2}}{(n-2)!}D_2\right)d_2+$$
$$+\ldots+(E-(T-h)D_2)d_{n-1}-D_2d_n=e_2y_k(T-h),$$
$$\left(\frac{T^{n-3}}{(n-3)!}E-\frac{(T-h)^{n-2}}{(n-2)!}D_2\right)d_1+\left(\frac{T^{n-4}}{(n-4)!}E-\frac{(T-h)^{n-3}}{(n-3)!}D_2\right)d_2+$$
$$+\ldots+(E-(T-h)D_2)d_{n-2}-D_2d_{n-1}=e_2\dot{y}_k(T-h) \tag{3.9}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(E-(T-h)D_2)d_1-D_2d_2=e_2y_k^{(n-2)}(T-h),$$
$$-D_2d_1=e_2y_k^{(n-1)}(T-h).$$

Так как справедливо равенство (3.8), то для выполнения условия (3.6) необходимо равенство нулю всех d_i. Но поскольку определитель системы (3.9) отличен от нуля (матрица D_2 неособая), то нулевое решение получим только в случае, если

$$y_k^{(i)}(T-h)=0,\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{3.10}$$

Покажем, что (3.10) можно обеспечить за счет выбора управления $u(t)$ на отрезке $[0,\ T-nh]$. Из (3.6) имеем

$$y_k^{(n-1)}(t-h)=\big(a_1,\ y(t-nh)\big),\quad T-h\leqslant t\leqslant T, \tag{3.11}$$

где a_1 — некоторый постоянный вектор; $\|a_1\|\neq 0$. Дифференцируя (3.11) по t, в силу (3.2) получаем

$$y_k^{(n)}(t-h)=\big(a_1,\ B_1y(t-(n+1)h)\big)+(a_1,\ c_1)u(t-nh),\quad T-h\leqslant t\leqslant T.$$

Если $(a_1,c_1)\neq 0$, то последнее уравнение управляемо. Если же $(a_1,c_1)=0$, то можно указать s, $s\leqslant n-1$, такое, что $(a_1,\ B_1^sc_1)\neq 0$. Уравнение

$$y_k^{(n+s)}(t-h)=(a_1,\ B_1^{s+1}y\big(t-(n+s+1)h)\big)+(a_1,\ B_1^sc_1)u(t-(n+s)h),$$
$$T-h\leqslant t\leqslant T,$$

очевидно, управляемо.

Таким образом, существует управление $u(t) \in U$, $0 \leqslant t \leqslant T - kh$, при котором справедливо тождество (3.6).

Покажем, что на отрезке $[T - kh, T]$ управление $u(t)$ можно выбрать таким образом, что будет выполнено условие

$$\bar{y}(t) \equiv 0, \quad T - h \leqslant t \leqslant T. \tag{3.12}$$

Положим $u(t) \equiv 0$, при $T - kh \leqslant t \leqslant T$. Так как выполнено условие (3.10), то

$$y_j(T - (k - j + 1)h) = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Решая систему (3.3), убеждаемся в справедливости (3.12). Условия (3.6), (3.12) обеспечивают (3.5).

Теорема доказана.

В заключение рассмотрим несколько случаев управляемости системы (1.1) в общем виде ($A \neq 0$).

I. Если матрица C неособая, то система (1.1) управляема. Действительно, $x(t) \equiv 0$, $T - h \leqslant t \leqslant T$, если

$$x(T - h) = 0 \tag{3.13}$$

и

$$u(t) = -C^{-1}Bx(t - h), \quad T - h \leqslant t \leqslant T.$$

Но в силу теоремы 2.4 рассматриваемая система относительно управляема. Поэтому условие (3.12) можно обеспечить подходящим выбором управления на отрезке $[0, T - h]$.

II. Если матрицы B и C имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \end{pmatrix},$$

где

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{n-r+1,1} & \cdots & b_{n-r+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} c_{n-r+1,1} & \cdots & c_{n-r+1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nr} \end{pmatrix},$$

и матрица C_1 имеет ранг r, $r < n$, а ранг матрицы (2.10) равен n, то система (1.1) управляема. Как и в предыдущем случае, здесь нужно положить

$$u(t) = -C_1^{-1}B_1x(t - h), \quad T - h \leqslant t \leqslant T,$$

и потребовать, чтобы

$$x(T - h) = 0. \tag{3.14}$$

Так как система (1.1) в силу теоремы (2.4) относительно управляема, то (3.14) возможно при $u \in U$.

Замечание 3.1. Рассмотренный случай II является обобщением часто встречающегося в теории автоматического регулирования уравнения с запаздыванием по производным:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{(n-i)}(t) + \sum_{i=1}^{n} b_i x^{(n-i)}(t - h) = \sum_{j=0}^{m} c_j u_j(t), \quad m < n.$$

Это уравнение управляемо, если $\sum_{j=0}^{m} c_j^2 \neq 0$.

Авторы выражают благодарность Р. Габасову за обсуждение результатов статьи и ряд ценных замечаний.

Литература

1. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. Первого международного конгресса ИФАК, **2.** Изд. АН СССР, 1961.

2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.

3. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. ГИФМЛ, 1965.

4. Беллман Р. Динамическое программирование, ИЛ, 1960.

5. Красовский Н. Н. ПММ, т. XXVIII, в. 1, 1964.

6. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, Науч.-техн. изд. Украины, 1938.

7. Габасов Р., Кириллова Ф. М. ДАН СССР, **156,** № 5, 1964.

8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., ГИТТЛ, 1953.

Поступила в редакцию
9 марта 1966 г.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова