Детерминированные системы

УДК 62-501.45

СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИ СКОНСТРУИРОВАННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

А. Г. АЛЕКСАНДРОВ

(Саратов)

Вводятся понятия передаточных операторов, а также оператора чувствительности управлений нестационарных систем. Получено условие оптимальности в операторной форме. Показана низкая чувствительность к параметрическим возмущениям. Установлена связь регулируемых переменных и возмущений.

1. Введение

Аналитическое конструирование регуляторов (АКОР) [1—3] является эффективным методом синтеза регуляторов линейных нестационарных систем. Однако при его применении возникает сложная проблема выбора коэффициентов функционалов оптимизации.

Одним из направлений на пути расширения области применения процедур АКОР является исследование свойств, не зависящих от выбора коэффициентов функционала оптимизации, а также установление связей между параметрами функционала и точностью, реализуемостью и т. п. Так, для стационарных многомерных оптимальных линейных систем в [4—6] установлены границы запасов устойчивости по фазе и модулю, а также связь между структурой и коэффициентами функционала оптимизации, с одной стороны, и точностью, полосой пропускания, реализуемостью и так далее — с другой.

В настоящей работе это направление развивается на нестационарные оптимальные системы: исследуется грубость и точность этих систем.

Исследование опирается на полученное в работе условие оптимальности в операторной форме, которое обобщает условия оптимальности стационарных систем в частотной форме [7].

Для оценки грубости используется понятие оператора чувствительности управлений. Это понятие основывается на известной [8] идее сравнения реакций эквивалентных разомкнутой и замкнутой систем, подверженных параметрическим возмущениям.

2. Понятие передаточного оператора

Рассмотрим систему регулирования, возмущенное движение которой описывается в первом приближении уравнениями

(1) $\dot{x}=P(t)x+B(t)u,\ x(t_0)=x^{(0)},\ t\in[t_0,t_1],$

(2) $u=C'(t)x,$

где x — n-мерный вектор фазовых переменных объекта, u — m-мерный вектор управления, $P(t)$, $B(t)$, $C'(t)$ — заданные матрицы (штрих — символ транспонирования) непрерывных и необходимое число раз дифференцируемых функций размеров $n\times n$, $n\times m$, $m\times n$ соответственно, $x^{(0)}$—n-мерный вектор начальных условий. Объект (1) полностью управляем, а закон управления (2) полностью наблюдаем.

Введем понятие передаточного оператора системы (1), (2) в разомкнутом состоянии. Для этого заменим в (1) вектор u некоторым вектором $r(t)$ непрерывных функций и запишем при нулевых начальных условиях решение уравнения (1)

$$(3)\qquad x(t)=\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)r(\tau)\,d\tau,$$

где $X(t,\tau)$ — фундаментальная матрица [9]. В этом случае вектор выходных переменных регулятора

$$(4)\qquad u=C'(t)\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)r(\tau)\,d\tau.$$

Передаточным оператором W системы (1), (2) в разомкнутом состоянии будем называть взятый с обратным знаком оператор, связывающий векторы u и r. Этот оператор в соответствии с (4) имеет вид

$$(5)\qquad W=-C^*MB,$$

где C и B — конечномерные операторы, порождаемые матрицами $C(t)$ и $B(t)$ соответственно; символ $*$ означает сопряженный оператор, т. е. C^* — оператор, порожденный матрицей $C'(t)$; оператор M — интегральный оператор, отображающий вектор $\psi(t)=B(t)r(t)$ в вектор x по формуле (3).

Сопряженным передаточным оператором системы (1), (2) в разомкнутом состоянии назовем оператор

$$(6)\qquad W^*=-B^*M^*C,$$

где M^* — оператор, сопряженный с M.

Для конкретизации сопряженных операторов далее будем рассматривать пространство $L_2[t_0,t_1]$ [9] всех непрерывных вектор-функций, заданных на интервале $[t_0,t_1]$ со скалярным произведением $(h^{(1)}(t),\ h^{(2)}(t))=$ $=\int_{t_0}^{t_1} h^{(1)\prime}(t)h^{(2)}(t)\,dt$ и нормой $\|h(t)\|=\left(\int_{t_0}^{t_1} h'(t)h(t)\,dt\right)^{1/2}$.

Нетрудно проверить, что

$$(7)\qquad M^*\psi=\int_{t}^{t_1} X'(\gamma,t)\psi(\gamma)\,d\gamma.$$

Введем теперь понятие передаточного оператора многомерной системы, разомкнутой по ν-му входу объекта. В связи с этим представим уравнения (1), (2) в следующей [6] эквивалентной форме:

$$(8)\qquad \dot{x}=[P(t)+\overset{\nu}{\overline{B}}(t)\overset{\nu}{\overline{C}}{}'(t)]x+B(t)_{[\nu]}u_\nu,$$

$$(9)\qquad u_\nu=C'^{[\nu]}(t)x,$$

где $B(t)_{[\nu]}$ — ν-й столбец матрицы $B(t)$, $C'(t)^{[\nu]}$ — ν-я строка матрицы $C'(t)$, $\overset{\nu}{\overline{B}}(t)$ — матрица размеров $n\times(m-1)$, полученная из матрицы $B(t)$ после вычеркивания ν-го столбца; $\overset{\nu}{\overline{C}}{}'(t)$ — матрица размеров $(m-1)\times n$, полученная из матрицы $C'(t)$ вычеркиванием ν-й строки.

«Объект» (8) — это объект (1), замкнутый всеми регуляторами, кроме ν-го.

Передаточный оператор системы (8), (9) в разомкнутом состоянии

$$W_\nu = -C^{[\nu]*} M_\nu B_{[\nu]}, \tag{10}$$

где M_ν — интегральный оператор (аналогичный оператору M), соответствующий матрице

$$P_\nu(t) = P(t) + \overset{\nu}{B}(t)\overset{\nu}{C}'(t).$$

Оператор (10) будем называть передаточным оператором многомерной системы (1), (2), разомкнутой по ν-му входу объекта.

3. Условие оптимальности в операторной форме

Пусть регулятор (2) получен в результате оптимизации системы (1), (2) (для всех $x^{(0)}$) в смысле функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x'H'(t)H(t)x + u'u)\,dt, \tag{11}$$

(где $H(t)$ — заданная матрица размеров $n\times n$, такая, что $Q(t) = H'(t)H(t)$ — определенно-положительная). Оптимальность означает [10], что матрица

$$C(t) = -A(t)B(t), \tag{12}$$

где $A(t)$ — симметричная матрица размеров $n\times n$, удовлетворяющая матричному уравнению Риккати

$$\dot{A}(t) = -A(t)P(t) - P'(t)A(t) + A(t)B(t)B'(t)A(t) - \tag{13}$$
$$-Q(t),\ A(t_1) = 0.$$

Теорема 1. Передаточный оператор системы (1), (2), оптимальной в смысле функционала (1), удовлетворяет равенству

$$(I_m + W)^*(I_m + W) = I_m + \breve{H}^*\breve{H}, \tag{14}$$

где I_m — m-мерный оператор тождества (т. е. $I_m h = h$), $\breve{H} = HMB$.

Соотношение (14) будем называть условием оптимальности нестационарных систем в операторной форме.

Теорема 2. Передаточный оператор оптимальной (в смысле функционала (3)) системы (1), (2), разомкнутой по ν-му входу объекта, удовлетворяет равенству

$$(I_1 + W_\nu)^*(I_1 + W_\nu) = I_1 + \breve{H}^{\nu*}\breve{H}^\nu \quad (\nu = 1, \dots, m), \tag{15}$$

где $\breve{H}^\nu = H^\nu M_\nu B_{[\nu]}$, $H^{\nu\prime}(t)H^\nu(t) = Q^\nu(t) = Q(t) + \overset{\nu}{\underline{C}}(t)\overset{\nu}{\underline{C}}'(t)$.

Доказательство теорем 1, 2 приведено в приложении.

4. Оператор чувствительности управлений

Пусть система (1), (2) подвержена параметрическим возмущениям. Это означает, что матрицы $P(t)$, $B(t)$, $C'(t)$ могут отличаться от расчетных (заданных) некоторыми матрицами $\Delta P(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta C'(t)$. Параметрические возмущения могут вызываться различными причинами (неточное описание объекта, неточная реализация параметров регулятора, «старение» элементов системы и т. п.).

Для характеристики чувствительности движения системы (1), (2) к параметрическим возмущениям введем оператор чувствительности управлений. В связи с этим рассмотрим движения системы (1), (2), возбужденные m-мерным вектором внешних возмущений $f(t)\in L_2[t_0,\ t_1]$:

$$(16)\qquad \dot{x}=P(t)x+B(t)(u+f),$$

$$(17)\qquad u=C'(t)x.$$

Установим связь вектора управлений с вектором возмущений. При нулевых начальных условиях из (16) следует $x=MB(u+f)$, при этом $u=$ $=C^*x=-W(u+f)$ и, таким образом, получаем

$$(18)\qquad u=-(I_m+W)^{-1}Wf$$

(символ (-1) означает обратный оператор, т. е. $A^{-1}A=AA^{-1}=I_m$).

Структурная схема системы (16), (17), выражающая соотношение (18), приведена на **рис. 1**.

Схема, приведенная на рис. 1, содержит обратную связь. Эквивалентная ей схема без обратной связи приведена на рис. 2. Оператор g этой схе-

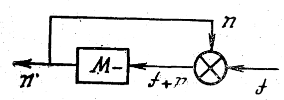

Рис. 1

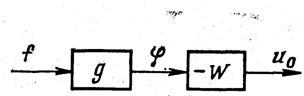

Рис. 2

мы выбирается так, чтобы при отсутствии параметрических возмущений и нулевых начальных условиях выполнялось равенство $u_0=u$. Непосредственно из (18) следует с учетом очевидного соотношения $(I_m+W)^{-1}W=$ $=W(I_m+W)^{-1}$

$$(19)\qquad g=(I_m+W)^{-1}.$$

Операторы g и W реализуются различными физическими устройствами, поэтому параметрические возмущения этих операторов независимы. Будем полагать, что оператор g не подвержен параметрическим возмущениям.

Рассмотрим разность векторов управлений для исходной и параметрически возмущенной замкнутой системы $e=u-u_\alpha$. Для системы, приведенной на рис. 2, эта разность $e_0=u_0-u_{0_\alpha}$.

Неравенство

$$(20)\qquad \|e_0\|\geqslant\beta\|e\|,\ \beta>1$$

назовем условием низкой чувствительности замкнутой системы по сравнению с разомкнутой.

Векторы e и e_0, входящие в это условие, при малых параметрических возмущениях связаны соотношением (доказанным в приложении)

$$(21)\qquad e_0=(I_m+W)e.$$

Используя (21), получим достаточное условие низкой чувствительности, выраженное через передаточный оператор разомкнутой системы:

$$(22)\qquad (I_m+W)^*(I_m+W)\geqslant\beta^2I_m.$$

Действительно, из (22) следует, что $((I_m+W)^*(I_m+W)e,e)\geqslant\beta^2(e,e)$, или, что то же самое, $\|(I_m+W)e\|\geqslant\beta\|e\|$. С другой стороны, из (21) следует $\|e_0\|=\|(I_m+W)e\|$ и, таким образом, (22) установлено.

Оператор (I_m+W), входящий в соотношение (21), будем называть оператором чувствительности управления. Он отличается от оператора, введенного в [8]. Последний является по построению оператором чувствительности переменных объекта.

5. Свойства оптимальных систем

Свойство 1. Система (1), (2), оптимальная в смысле функционала (11), обладает низкой чувствительностью к параметрическим возмущениям.

Действительно, сравнивая (22) и (14), заключаем, что свойство 1 следует из неравенства $I_m+\breve{H}^*H\geqslant\beta^2I_m$, $\beta>1$, в справедливости которого нетрудно убедиться, если принять во внимание, что $(\breve{H}^*\breve{H}h,h)=\|\breve{H}h\|^2\geqslant\geqslant\gamma^2\|h\|^2$, $\gamma>0$ и, следовательно, $((I_m+\breve{H}^*\breve{H})h,h)\geqslant\|h\|^2+\gamma^2\|h\|^2=\beta^2\|h\|^2$, где $\beta=\sqrt{1+\gamma^2}>1$.

Свойство 2. Оптимальная система (1), (2) обладает низкой чувствительностью по каждому из выходов регулятора.

Это свойство выражается неравенством

$$(I_1+W_\nu)^*(I_1+W_\nu)\geqslant\beta^2I_1,\quad(\beta\geqslant1)\quad(\nu=1,\ldots,m),\tag{23}$$

а его доказательство следует из (15) и повторяет предыдущее.

Переходя к свойству 3, рассмотрим систему

$$\dot{x}=P(t)x+B(t)(u+f),\quad u=C'(t)x,\quad x^{(0)}=0,\tag{24}$$

$$\theta=N(t)x,\tag{25}$$

где θ—m-мерный вектор регулируемых переменных, $f(t)$—m-мерный вектор внешних возмущений, $N(t)$ — заданная матрица непрерывных функций размеров $m\times n$, матрица $C'(t)$ регулятора получена в результате оптимизации системы (1), (2) в смысле функционала (11), в котором матрица $H(t)=H_1(t)N(t)$, $H_1(t)$ — заданная матрица размеров $m\times m$, такая, что $Q_1(t)=H_1'(t)H_1(t)$ — определенно-положительная матрица.

Свойство 3. Процессы по регулируемым переменным в оптимальной системе, подверженной внешним возмущениям, удовлетворяют неравенству

$$\int_{t_0}^{t_1}\theta'(t)Q_1(t)\theta(t)\,dt\leqslant\int_{t_0}^{t_1}f'(t)f(t)\,dt.\tag{26}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Сформируем операторы

$$\Gamma_1=A+AP+P^*A,\quad\Gamma_2=ABB^*A-H^*H,\tag{П.1}$$

где A – оператор, порожденный матрицей $A(t)$, и составим произведения $B^*M^*\Gamma_1MB$ и $B^*M^*\Gamma_2MB$. В силу (13) $\Gamma_1=\Gamma_2$ и, следовательно,

$$B^*M^*\Gamma_1MB=B^*M^*\Gamma_2MB.\tag{П.2}$$

Выразим операторы в левой и правой частях этого равенства через операторы W и W^*. Из (5), (6) и (12) следует

$$W=B^*AMB,\quad W^*=B^*M^*AB.\tag{П.3}$$

Непосредственно из (П.1) и (П.3) получим выражение правой части (П.2) в виде

$$B^*M^*\Gamma_2MB=W^*W-\breve{H}^*\breve{H},\tag{П.4}$$

где $\breve{H}=HMB$.

Запишем теперь левую часть (П.2), прибавляя и вычитая из нее оператор $B^*M^*A(I_n+PM)B$,

$$\begin{aligned}B^*M^*\Gamma_1MB&=B^*M^*(A+AP+P^*A)MB+B^*M^*A(I_n+PM)B-\\&-B^*M^*A(I_n+PM)B=B^*M^*(A+P^*A)MB+B^*M^*A(I_n+PM)B-W^*.\end{aligned}\tag{П.5}$$

Ниже будет показано, что

$$M^*(A+P^*A)M+M^*A(I_n+PM)=-AM.\tag{П.6}$$

Подставляя это выражение в (П.5), имеем $B^*M^*\Gamma_1MB=-W-W^*$.

Подставляя это выражение вместе с (П.4) в (П.2), получим равенство $W+W^*+W^*W=\check{H}^*\check{H}$, из которого следует (14).

Переходя к доказательству равенства (П.6), рассмотрим

$$\int_t^{t_1} \frac{d}{d\gamma}\left[X'(\gamma,t)A(\gamma)\int_{t_0}^{\gamma} X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]d\gamma.$$

С одной стороны, этот интеграл можно записать с учетом краевого условия $A(t_1)=0$ в виде

(П.7)
$$\int_t^{t_1} \frac{d}{d\gamma}\left[X'(\gamma,t)A(\gamma)\int_{t_0}^{\gamma} X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]d\gamma =$$

$$=\left[X'(\gamma,t)A(\gamma)\int_{t_0}^{\gamma} X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]\Bigg|_{\gamma=t}^{\gamma=t_1} = X'(t_1,t)A(t_1)\int_{t_0}^{t_1} X(t_1,\tau)\psi(\tau)\,d\tau -$$

$$- X'(t,t)A(t)\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\psi(\tau)\,d\tau = -AM\psi.$$

С другой стороны,

$$\int_t^{t_1} \frac{d}{d\gamma}\left[X'(\gamma,t)A(\gamma)\int_{t_0}^{\gamma} X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]d\gamma =$$

$$=\int_t^{t_1}\left[\frac{dX'(\gamma,t)}{d\gamma}A(\gamma)\int_{t_0}^{\gamma} X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]d\gamma +$$

$$+\int_t^{t_1}\left[X'(\gamma,t)\frac{dA(\gamma)}{d\gamma}\int_{t_0}^{\gamma} X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]d\gamma +$$

$$+\int_t^{t_1}\left[X'(\gamma,t)A(\gamma)\frac{d}{d\gamma}\int_{t_0}^{\gamma} X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]d\gamma.$$

Принимая во внимание, что

$$dX'(\gamma,t)/d\gamma = X'(\gamma,t)P'(\gamma),$$

$$\frac{d}{d\gamma}\int_{t_0}^{\gamma} X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau = X(\gamma,\gamma)\psi(\gamma)+\int_{t_0}^{\gamma} P(\gamma)X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau,$$

заключаем, что

$$\int_t^{t_1} \frac{d}{d\gamma}\left[X'(\gamma,t)A(\gamma)\int_{t_0}^{\gamma} X(\gamma,\tau)\psi(\tau)\,d\tau\right]d\gamma = M^*P^*AM\psi+M^*AM\psi+M^*A[I_n+PM]\psi.$$

Сравнивая это выражение с (П.7), убеждаемся в справедливости равенства (П.6). Это завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Вначале найдем матрицу $C^0(t)$ регулятора (9), при котором система (8), (9) оптимальна в смысле функционала

(П.8)
$$J=\int_{t_0}^{t_1}\{x'[Q(t)+\check{C}(t)\check{C}'(t)]x+u_{\vee}^2\}\,dt,$$

где $\check{C}(t)=-A(t)\check{B}(t)$.

Искомый вектор определяется уравнениями

(П.9) $$C^0(t) = -A^0(t)B(t)_{[\nu]},$$

(П.10) $$\dot{A}^0(t) = -A^0(t)P_\nu(t) - P'_\nu(t)A^0(t) + A^0(t)B(t)_{[\nu]}B'(t)_{[\nu]}A^0(t) - Q(t) - A(t)\underset{\smile}{\overset{\nu}{B}}(t)\underset{\smile}{\overset{\nu}{B'}}(t)A(t),\quad A^0(t_1) = 0.$$

Подставляя в (П.10) выражение для $P_\nu(t)$, нетрудно убедиться, что это уравнение совпадает с (13) и, следовательно, $A^0(t) = A(t)$. Это означает, что $C^0(t) = -A(t)B(t)_{[\nu]}$. Из оптимальности в смысле функционала (П.8) системы (8), (9), теоремы 1 и последнего равенства следует (15). Изложенное справедливо для любого ν, и, таким образом, теорема 2 доказана.

Вывод оператора чувствительности. Рассмотрим систему (16), (17)

$$\dot{x} = P(t)x + B(t)(u+f),\quad u = C'(t)x.$$

При параметрических возмущениях передаточный оператор

$$W_\alpha = W + \Delta W$$

и сигнал на выходе регулятора

(П.11) $$u_\alpha = -(I_m + W_\alpha)^{-1}W_\alpha f.$$

Разность

(П.12) $$e = u - u_\alpha = -(I_m+W)^{-1}Wf + (I_m+W_\alpha)^{-1}W_\alpha f = -(I_m+W_\alpha)^{-1}\{(I_m+W+\Delta W)(I_m+W)^{-1}W - W - \Delta W\}f = -(I_m+W_\alpha)^{-1}\Delta W\{(I_m+W)^{-1}W - I_m\}f.$$

Принимая во внимание соотношение $(I_m+W)^{-1}W - I_m = -(I_m+W)^{-1}$, в справедливости которого нетрудно убедиться, умножая его слева на (I_m+W), получим окончательно

(П.13) $$e = (I_m+W_\alpha)^{-1}\Delta W(I_m+W)^{-1}f.$$

Рассмотрим теперь разомкнутую систему, приведенную на рис. 2. При параметрических возмущениях

(П.14) $$u_{0\alpha} = W_\alpha g f = -W_\alpha(I_m+W)^{-1}f.$$

Подчеркнем, что в этом равенстве оператор g остался без изменения, так как по построению он служит для обеспечения эквивалентности схем, приведенных на рис. 1 и рис. 2, в параметрически невозмущенном состоянии, и поэтому после его построения нужно «забыть» о его происхождении и считать, как и в [8], что входящий в g оператор W лишь формально совпадает с оператором W системы (1), (2).

Составляя разность

(П.15) $$e_0 = u_0 - u_{0_\alpha} = \Delta W(I_m+W)^{-1}f$$

и сравнивая это выражение с (П.13), заключаем

(П.16) $$e_0 = (I_m+W_\alpha)e.$$

При малых параметрических возмущениях $W_\alpha \approx W$, и поэтому (П.16) можно записать приближенно в искомой форме (21).

Отметим в заключение, что при выводе соотношения (П.16) использовалось формальное выражение $(I_m+W)^{-1}$.

Покажем, что этот оператор существует. Действительно, из схемы, приведенной на рис. 2, следует, что векторы f и φ связаны уравнением

$$(I_m+W)\varphi = f.$$

В более подробной записи это уравнение имеет вид

(П.17) $$\varphi(t) - \int_{t_0}^{t} C'(t)X(t,\tau)B(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t)$$

и является системой уравнений Вольтерра II рода. Элементы ядра $K(t,\tau) = C'(t)X(t,\tau)B(\tau)$ и вектора $f(t)$ являются непрерывными функциями, поэтому (П.17) однозначно разрешимо [11] и, следовательно, оператор $(I_m+W)^{-1}$ существует.

Доказательство свойства 3. Найдем оператор, связывающий векторы θ и f в системе (24), (25):

$$\theta = Nx = NMB[I_m - (I_m+W)^{-1}W]f.$$

Принимая во внимание, что $I_m-(I_m+W)^{-1}W=(I_m+W)^{-1}$, получим

(П.18) $$\theta=NMB(I_m+W)^{-1}f.$$

Нетрудно видеть, что

(П.19) $$(H_1\theta,\ H_1\theta)=(\check{H}(I_m+W)^{-1}f,\ \check{H}(I_m+W)^{-1}f)=(\check{H}^*\check{H}(I_m+W)^{-1}f,\ (I_m+W)^{-1}f),$$

где $\check{H}=H_1NMB$.

Принимая во внимание оптимальность регулятора рассматриваемой системы, исключим из (П.19) $\check{H}^*\check{H}$ с помощью (14). Тогда получим соотношение

$$(((I_m+W)^*(I_m+W)-I_m)(I_m+W)^{-1}f,\ (I_m+W)^{-1}f)=$$
$$=(f',f)-((I_m+W)^{-1}f,\ (I_m+W)^{-1}f),$$

из которого при учете (П.19) и неравенства $((I_m+W)^{-1}f,\ (I_m+W)^{-1}f)\geqslant 0$ следует $(H_1\theta,\ H_1\theta)\leqslant(f',f)$. Таким образом, свойство 3 доказано.

Автор благодарен А. П. Хромову за помощь и полезные советы.

Поступила в редакцию
3 мая 1979 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I–IV. Автоматика и телемеханика, № 4, стр. 436–441, № 5, стр. 561–568, № 6, стр. 661–665, 1960; № 4, стр. 425–435, 1961.
2. *Летов А. М.* Теория оптимального управления. Труды II конгр. ИФАК «Оптимальные системы. Статистические методы», стр. 7–38. «Наука», 1965.
3. *Kalman R.* Contributions to the Theory of optimal control. Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, v. 5, Segunda, ser. No. 1, pp. 102–119, 1960.
4. *Александров А. Г.* Частотные свойства оптимальных линейных систем. Автоматика и телемеханика, № 9, стр. 176–181, 1969.
5. *Александров А. Г.* Аналитический синтез передаточных матриц регуляторов по частотным критериям качества. II. Автоматика и телемеханика, № 2, стр. 17–29, 1972.
6. *Александров А. Г.* Свойства аналитически сконструированных систем. Автоматика и телемеханика, № 10, стр. 5–11, 1975.
7. *Калман Р. Е.* Когда линейная система является оптимальной. Тр. американского общества инженеров-механиков, сер. Д, № 1, стр. 69–84. «Мир», 1964.
8. *Перкис В., Крус Д.* Операторы чувствительности для линейных систем с переменными параметрами. В сб. «Чувствительность автоматических систем», стр. 45–51. «Наука», 1968.
9. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. «Наука», 1968.
10. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. «Наука», 1971.
11. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, 1959.

PROPERTIES OF ANALYTICALLY STRUCTURED NONSTATIONARY LINEAR SYSTEMS

A. G. ALEKSANDROV

The notions of transfer operators and operators of control sensitivity are introduced for nonstationary systems. The optimality condition in the operator form is obtained. Low sensitivity to parametric disturbances is shown. The relaton of controlled variables and disturbances is established.