В. П. Танана, Н. Ю. Колесникова, Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи для параболического уравнения,
Изв. вузов. Матем., 2009, номер 9, 46–52

Известия вузов. Математика
2009, № 9, с. 46–52

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

В.П. ТАНАНА, Н.Ю. КОЛЕСНИКОВА

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В статье решается обратная граничная задача тепловой диагностики методом проекционной регуляризации. Получены точные по порядку оценки погрешности соответствующего приближенного решения.

Ключевые слова: гильбертово пространство, банахово пространство, регуляризация операторного уравнения, обратная задача.

УДК: 517.948

Abstract. This paper is devoted to solving the inverse boundary problem of the heat diagnostics by the projective regularization method. We obtain exact with respect to the order error estimates of the corresponding approximate solution.

Keywords: Hilbert space, Banach space, regularization of operator equations, inverse problem.

Во многих отраслях техники встречаются процессы, связанные с нагреванием твердых тел потоками жидкости или газа. Особую роль при этом играет информация о температуре на поверхности этих тел.

Как правило, единственным способом определения этой температуры является решение граничных обратных задач для уравнений параболического типа по результатам измерения температуры внутри тел [1]. В настоящей работе решается одна из таких задач и в ней обобщаются теоремы, сформулированные в [2].

1. Постановка обратной задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a(x)u(x,t), \tag{1}$$

в котором $x \in [0,1]$, $t \geq 0$, $a(x) \leq 0$ и $a(x) \in C^2[0,1]$. Предположим, что

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

и

$$u(x_0,t) = f(t); \quad 0 < x_0 < 1, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

Поступила 14.06.2007

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, региональный грант р_урал_а № 07-01-96001.

а граничное значение $u(1,t)$ функции $u(x,t)$ требуется определить.

Эта задача является некорректно поставленной. Поэтому предположим, что при $f(t) = f_0(t)$, где $f_0 \in L_2[0,\infty)$, существует точное решение $u_0(1,t) \not\equiv 0$ нашей задачи, которое принадлежит пространству $C^1[0,\infty)$, $u_0(1,0) = 0$, и существует число $T > 0$ такое, что при $t \geq T$

$$u_0(1,t) = 0. \tag{5}$$

Кроме того, $u_0(1,t) \in M_r$, где

$$M_r = \{u_0 : u_0 \in C^1[0,\infty),\ \|u_0\|^2_{L_2} + \|u_0'\|^2_{L_2} \leq r^2\}, \tag{6}$$

$u_0'(1,t)$ — производная функции $u_0(1,t)$ по t, точное значение $f_0(t)$ не известно, вместо него даны некоторое приближение $f_\delta(t) \in L_2[0,\infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_0 - f_\delta\|_{L_2} \leq \delta. \tag{7}$$

Требуется, используя исходные данные f_δ, δ и M_r задачи (1)–(4), построить приближенное решение $u_\delta(t)$ и оценить его уклонение $\|u_\delta - u_0\|_{L_2}$ от точного решения $u_0(t) = u_0(1,t)$.

Из (1)–(5) следует, что при $t \geq T$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет следующей вспомогательной задаче:

$$u(x,T) = \varphi(x), \quad x \in [0,1], \tag{8}$$

и

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \text{ при } \ t \geq T. \tag{9}$$

Поскольку $\varphi(x) \in C[0,1]$, запишем решение задачи (1), (8), (9) в виде ортогонального ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\lambda_n(t-T)} \psi_n(x), \tag{10}$$

где

$$b_n = \int_0^1 \varphi(x)\psi_n(x)\,dx, \tag{11}$$

$\{\psi_n\}$ — полная ортонормированная система собственных функций соответствующей задачи Штурма–Лиувилля, а $\{\lambda_n\}$ — последовательность собственных значений этой задачи.

Из теоремы ([3], с. 37) следует существование чисел C_1 и $C_2 > 0$ таких, что для любого n

$$-C_1 n^2 \leq \lambda_n \leq -C_2 n^2, \tag{12}$$

а из (10) вытекает

$$u_t'(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n e^{\lambda_n(t-T)} \psi_n(x) \tag{13}$$

и

$$u_{xx}''(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - a(x)) b_n e^{\lambda_n(t-T)} \psi_n(x). \tag{14}$$

Исследуем поведение функций, определяемых формулами (10), (13), (14) при $t \to \infty$. Для этого оценим общий член в сумме (14):

$$|(\lambda_n - a(x)) b_n e^{\lambda_n(t-T)}| \leq (|\lambda_n| + |a(x)|)|b_n| e^{\lambda_n(t-T)}. \tag{15}$$

Так как

$$\sup_{y\geq 0} \frac{y^p}{e^y} \leq \left(\frac{p}{e}\right)^p, \quad p > 0,$$

то из (12) и (15) следует существование числа $C_3 > 0$ такого, что

$$|(\lambda_n - a(x))b_n e^{-\lambda_n(t-T)}| \le C_3 n^{-2}|b_n|(t-T-1)^{-1}. \tag{16}$$

Учитывая (11), (16),

$$|b_n|n^{-2} \le b_n^2 + n^{-4}$$

и сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$, получим число $C_4 > 0$ такое, что для любого $t \ge T+2$ справедлива оценка

$$\sup_{x\in[0,1]} \{u^2(x,t),\ [u''_{xx}(x,t)]^2,\ [u'_t(x,t)]^2\} \le C_4(t-T-1)^{-2}. \tag{17}$$

Так как

$$u'_x(x,t) = \int_{x_0(t)}^{x} u''_{xx}(\xi,t)d\xi, \quad 0 < x_0(t) < 1,$$

где $u'_x(x_0(t),t) = 0$, то для любого $x \in [0,1]$ и $t > 0$ имеем

$$[u'_x(x,t)]^2 \le \sup_{x\in[0,1]} [u''_{xx}(x,t)]^2. \tag{18}$$

Из соотношений (17), (18) и сходимости интеграла от мажорантной функции $C_4(t-T-1)^{-2}$ в пределах от $T+2$ до ∞ следует выполнение всех условий, позволяющих применять к задаче (1)–(4) преобразование Фурье по t в предположении, что

$$u(x,t) = 0 \ \text{ при } \ t < 0. \tag{19}$$

2. Сведение уравнения (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению

Учитывая (19), в качестве рабочего пространства $\overline{H}$ возьмем комплексный вариант $L_2[0,\infty)$ над полем действительных чисел. Тогда пространство $\overline{H}$ будет гильбертовым, а преобразование F на нем определим формулой

$$F(u+iv) = \frac{1}{\sqrt{2}}F_c(u) - \frac{i}{\sqrt{2}}F_s(v), \tag{20}$$

где F_c и F_s — соответствующие косинус и синус преобразования.

Из теоремы Планшереля ([4], с. 412) следует изометричность преобразования F, определяемого формулой (20). Применяя к уравнению (1) с учетом (19) преобразование F, получим

$$\frac{d^2\widehat{u}(x,\tau)}{dx^2} + a(x)\widehat{u}(x,\tau) = i\tau\widehat{u}(x,\tau) :\ x \in [0,1], \quad \tau \ge 0, \tag{21}$$

где $\widehat{u}(x,\tau) = F[u(x,t) + iu(x,t)]$.

Для уравнения (21) поставим задачу, добавив условия

$$\widehat{u}(0,\tau) = 0 \ \text{ при } \ \tau \ge 0 \tag{22}$$

и

$$\widehat{u}(x_0,\tau) = i\widehat{f}(\tau) \ \text{ при } \ \tau \ge 0, \tag{23}$$

где $\widehat{f}(\tau) = F[f(t) + if(t)]$.

Из общего вида решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка следует, что задача (21), (22) имеет решение

$$\widehat{u}(x,\tau) = l(\tau)e(x,\tau); \quad x \in [0,1], \quad \tau \ge 0, \tag{24}$$

где $l(\tau)$ — некоторая функция, а $e(x,\tau)$ — решение задачи (21), (22), удовлетворяющее условию $e'_x(0,\tau) = 1$.

Используя условие (23), определим функцию $l(\tau)$ формулой

$$l(\tau) = \frac{i\widehat{f}(\tau)}{e(x_0, \tau)}, \quad \tau \geq 0. \tag{25}$$

В силу (24), (25)

$$\widehat{u}(1, \tau) = i\widehat{f}(\tau)e^{-1}(x_0, \tau)e(1, \tau), \quad \tau \geq 0. \tag{26}$$

Исследуем поведение функции $l(\tau)$, определяемой формулой (25).

Теорема 1. *Функция $l(\tau)$ непрерывна на полупрямой $[0, \infty)$.*

Доказательство. Так как $\widehat{f}(\tau)$ и $e(x_0, \tau)$ непрерывны на полупрямой $[0, \infty)$, то для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что $e(x_0, \tau) \neq 0$ для любого $\tau \geq 0$.

Предположим противное, т. е. найдется число $\tau_0 > 0$ такое, что

$$e(x_0, \tau_0) = 0. \tag{27}$$

Тогда рассмотрим пространство $H_0 = L_2[0, x_0]$ над полем комплексных чисел и оператор A_1, действующий из H_0 в H_0 и определяемый формулой

$$A_1 u = \frac{d^2 u}{dx^2} + a(x)u, \quad u \in D(A_1), \tag{28}$$

где

$$D(A_1) = \{u : u, A_1 u \in H_0,\ u(0) = u(x_0) = 0\}. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует, что оператор A_1 отрицательно определен и самосопряжен. Поэтому существует число $\lambda_1 < 0$ такое, что $\mathrm{Sp}\,(A_1) \subset (-\infty, \lambda_1]$, где $\mathrm{Sp}\,(A_1)$ — спектр оператора A_1. Так как

$$A_1 e(x, \tau_0) = i\tau_0 e(x, \tau_0),$$

то $e(x, \tau_0) = 0$ при $x \in [0, x_0]$ и $e'_x(0, \tau_0) = 0$, что противоречит определению функции $e(x, \tau)$. □

Пусть $\lambda = \sqrt{\tau}$, а $e_1(x, \lambda) = e(x, \tau)$. Тогда функция $e_1(x, \lambda)$ будет удовлетворять интегральному уравнению

$$e_1(x, \lambda) = \frac{\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda}{\mu_0\lambda} - \int_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0(x - \xi)\lambda}{\mu_0\lambda} a(\xi)e_1(\xi, \lambda)\, d\xi, \tag{30}$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $x \in [0, 1]$, а $\lambda \geq 0$.

Исследуем поведение функции $|e_1(x, \lambda)|$ при $\lambda \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть $a(x) \in C^2[0, 1]$. Тогда существует число $\lambda_1 > 0$ такое, что для любого $\lambda \geq \lambda_1$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{3}\frac{|\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda|}{\lambda} \leq |e_1(x, \lambda)| \leq \frac{4}{3}\frac{|\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda|}{\lambda}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon(x, \lambda) = \frac{\mu_0\lambda}{\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda}\, e_1(x, \lambda)$. Тогда из (30) следует

$$\varepsilon(x, \lambda) = 1 - \frac{1}{\mu_0\lambda}\int_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0(x - \xi)\lambda \operatorname{sh}\mu_0\xi\lambda}{\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda} a(\xi)\varepsilon(\xi, \lambda)\, d\xi. \tag{31}$$

Так как

$$\left|\frac{\operatorname{sh}\mu_0(x - \xi)\lambda \operatorname{sh}\mu_0\xi\lambda}{\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda}\right| = 1 + o(1) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,$$

то из (31) следует существование числа $\lambda_1 > 0$ такого, что для любого $\lambda \geq \lambda_1$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{\mu_0\lambda}\int_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0(x-\xi)\lambda \operatorname{sh}\mu_0\xi\lambda}{\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda} a(\xi)d\xi\right| \leq \frac{1}{4}. \tag{32}$$

Решение уравнения (31) будем искать в виде

$$\varepsilon(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k(x,\lambda), \tag{33}$$

где $\varepsilon_0(x,\lambda) = 1$, а

$$\varepsilon_{k+1}(x,\lambda) = -\frac{1}{\mu_0\lambda}\int_0^x \frac{\operatorname{sh}\mu_0(x-\xi)\lambda \operatorname{sh}\mu_0\xi\lambda}{\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda} a(\xi)\varepsilon_k(\xi,\lambda)\,d\xi. \tag{34}$$

Согласно (32)–(34) для любых значений k, $\lambda \geq \lambda_1$ и $x \in [0,1]$

$$\left|\varepsilon_k(x,\lambda)\right| \leq 4^{-k}, \tag{35}$$

а из (33) и (35) вытекает, что для любых значений $x \in [0,1]$ и $\lambda \geq \lambda_1$

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} \leq |\varepsilon(x,\lambda)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}.$$

Таким образом, для любых значений $x \in [0,1]$ и $\lambda \geq \lambda_1$ имеем

$$\frac{1}{3}\frac{|\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda|}{\lambda} \leq |e_1(x,\lambda)| \leq \frac{4}{3}\frac{|\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda|}{\lambda}. \qquad \square$$

Так как

$$|\operatorname{sh}\mu_0 x\lambda| = e^{\frac{x\lambda}{\sqrt{2}}}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,$$

то из теоремы 2 следует существование числа $\lambda_2 \geq \lambda_1$ такого, что для любых $\lambda \geq \lambda_2$ и $x \in [0,1]$

$$\frac{1}{6}\frac{e^{\frac{x\lambda}{\sqrt{2}}}}{\lambda} \leq |e_1(x,\lambda)| \leq \frac{8}{3}\frac{e^{\frac{x\lambda}{\sqrt{2}}}}{\lambda}. \tag{36}$$

Разобьем задачу (26) на две.

Первая задача:

$$\widehat{u}(1,\tau) = i\widehat{f}(\tau)e^{-1}(x_0,\tau)e(1,\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \lambda_1^2. \tag{37}$$

Так как функции $e(x,\tau)$ непрерывны и в силу теоремы 1 положительны, то функция $e^{-1}(x_0,\tau)e(1,\tau)$ непрерывна на отрезке $[0,\lambda_1^2]$. Поэтому существует число $C_5 > 0$ такое, что для любого $\tau \in [0,\lambda_1^2]$

$$|e^{-1}(x_0,\tau)e(1,\tau)| \leq C_5. \tag{38}$$

Из соотношения (38) следует корректность задачи (37) в пространстве $\overline{H}_1 = L_2[0,\lambda_1^2] + iL_2[0,\lambda_1^2]$.

Вторая задача является задачей вычисления значений неограниченного оператора (26) в пространстве $\overline{H}_2 = L_2[\lambda_1^2,\infty] + iL_2[\lambda_1^2,\infty]$. Сведем эту задачу к операторному уравнению

$$A\widehat{u}(\tau) = -ie(x_0,\tau)e^{-1}(1,\tau)\widehat{u}(\tau) = \widehat{f}(\tau), \quad \tau \geq \lambda_1^2, \tag{39}$$

где $\widehat{u}(\tau) = \widehat{u}(1,\tau)$. Оператор A задачи (39), не меняя обозначения, продолжим на все пространство $\overline{H}_2$. Тогда на основании теоремы 2 оператор A и его сопряженный оператор

A^* будут инъективны. Из леммы, сформулированной в [5], будет следовать существование унитарного оператора Q, отображающего пространство $\overline{H}_2$ на $\overline{H}_2$ и такого, что

$$A\widehat{u}(\tau) = QC\widehat{u}(\tau), \tag{40}$$

где

$$C\widehat{u}(\tau) = |e(x_0,\tau)|\,|e^{-1}(1,\tau)|\widehat{u}(\tau); \quad \tau \geq \lambda_1^2. \tag{41}$$

Согласно (41) и (42) уравнение (39) может быть сведено к

$$C\widehat{u}(\tau) = \widehat{g}(\tau); \quad \tau \geq \lambda_1^2, \tag{42}$$

где $\widehat{g}(\tau) = Q^*\widehat{f}(\tau)$, а Q^* — оператор, сопряженный Q.

Теперь рассмотрим класс корректности $\widehat{M_r}$ в пространстве $\overline{H}_2$. Из формул (5) и (6) имеем $\widehat{M_r} = B\overline{S}_r$, где $\overline{S}_r = \{\widehat{v} : \widehat{v} \in \overline{H}_2,\ \|\widehat{v}\| \leq r\}$, а

$$B\widehat{v}(\tau) = \tau^{-1}\widehat{v}(\tau); \quad \tau \geq \lambda_1^2. \tag{43}$$

Из постановки исходной задачи следует, что при $\widehat{g}_0(\tau) = Q^*\widehat{f}_0(\tau)$ существует точное решение $\widehat{u}_0(\tau)$ уравнения (42), принадлежащее множеству $\widehat{M_r}$. Вместо $\widehat{g}_0(\tau)$ нам известны $\widehat{g}_\delta(\tau)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|\widehat{g}_0 - \widehat{g}_\delta\| \leq \delta.$$

Используя метод проекционной регуляризации в [6], приближенное решение $\widehat{u}_\delta^\alpha(\tau)$ уравнения (42) определим формулой

$$\widehat{u}_\delta^\alpha(\tau) = \begin{cases} |e^{-1}(x_0,\tau)|\,|e(1,\tau)|\widehat{g}_\delta(\tau) & \text{при } \lambda_1^2 \leq \tau \leq \alpha; \\ 0 & \text{при } \tau > \alpha, \end{cases} \tag{44}$$

где параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ найдем из уравнения

$$\frac{r}{\tau} = 16e^{(1-x_0)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}\delta; \quad \tau \geq \lambda_1^2, \tag{45}$$

которое при достаточно малых значениях δ имеет единственное решение.

Пусть $\psi(\sigma)$ — функция, обратная к функции $\sigma = \frac{1}{16\tau}e^{(x_0-1)\sqrt{\frac{\tau}{2}}}$, $\tau \geq \lambda_1^2$. Тогда из теоремы в [6] для приближенного решения $\widehat{u}_\delta^{\alpha(\delta)}(\tau)$, определенного формулами (44) и (45), справедлива оценка

$$\|\widehat{u}_\delta^{\alpha(\delta)} - \widehat{u}_0\| \leq \sqrt{2}\,r\psi^{-1}\left(\frac{\delta}{r}\right).$$

Из (36) и (43) следует

$$\sqrt{2}\,r\psi^{-1}\left(\frac{\delta}{r}\right) \sim \ln^{-2}\left(\frac{1}{\delta}\right) \ \text{ при } \ \delta \to 0.$$

Приближенное решение $\overline{u}_\delta(\tau)$ задачи (37) запишем в виде

$$\overline{u}_\delta(\tau) = ie^{-1}(x_0,\tau)e(1,\tau)\widehat{f}_\delta(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \lambda_1^2.$$

В силу (38)

$$\|\overline{u}_0(\tau) - \overline{u}_\delta(\tau)\| \leq C_5\delta,$$

где $\overline{u}_0(\tau)$ — соответствующее сужение функции $\widehat{u}_0(\tau)$ на отрезке $[0,\lambda_1^2]$.

Окончательно определим приближенное решение $u_\delta(t)$ задачи (1)–(5) формулой

$$u_\delta(t) = \begin{cases} v_\delta(t) & \text{при } t \in [0,T]; \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases}$$

где
$$v_\delta(t) = \mathrm{Re}\,[F^{-1}(\widetilde{u}_\delta(\tau))],$$
а
$$\widetilde{u}_\delta(\tau) = \begin{cases} \overline{u}_\delta(\tau) & \text{при } 0 \le \tau \le \lambda_1^2; \\ \widehat{u}_\delta(\tau) & \text{при } \tau \ge \lambda_1^2. \end{cases}$$
При этом существует число $C_6 > 0$ такое, что для функции $u_\delta(\tau)$ справедлива оценка
$$\|u_\delta(t) - u_0(t)\|_{L_2} \le C_6 \ln^{-2}\left(\frac{1}{\delta}\right); \quad 0 < \delta \le \delta_0.$$

Литература

[1] Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. *Экстремальные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1988. – 288 с.

[2] Танана В.П. *Об оптимальном по порядку методе решения одной обратной задачи для параболического уравнения* // Докл. РАН. – 2006. – Т. 407. – № 3. – С. 316–318.

[3] Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. *Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами.* – М.: Наука, 1986. — 304 с.

[4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1972. – 496 с.

[5] Менихес Л.Д., Танана В.П. *Конечномерная аппроксимация в методе М.М. Лаврентьева* // Сиб. журн. вычисл. матем. – 1998. – Т. 1. – № 1. – С. 59–66.

[6] Танана В.П., Данилин А.Р. *Об оптимальности регуляризующих алгоритмов при решении некорректных задач* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 7. – С. 1323–1326.

В.П. Танана

профессор, кафедра вычислительной математики,
Южноуральский государственный университет,
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, д. 76,

`e-mail:` tanana@csu.ru

Н.Ю. Колесникова

ассистент, кафедра математического анализа,
Южноуральский государственный университет,
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, д. 76,

`e-mail:` natasha720221@mail.ru

V.P. Tanana

Professor, Chair of Computational Mathematics,
Southern-Ural State University,
76 Lenin Ave., Chelyabinsk, 454080 Russia,

`e-mail:` tanana@csu.ru

N.Yu. Kolesnikova

Assistant, Chair of Mathematical Analysis,
Southern-Ural State University,
76 Lenin Ave., Chelyabinsk, 454080 Russia,

`e-mail:` natasha720221@mail.ru