Ю. Н. Бибиков, Бифуркация устойчивых инвариантных торов из инвариантных торов меньшей размерности, *Дифференц. уравнения*, 1983, том 19, номер 2, 354–357

ФЕВРАЛЬ 1983 г., ТОМ XIX, № 2

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.52

Ю. Н. БИБИКОВ

БИФУРКАЦИЯ УСТОЙЧИВЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ ИЗ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ МЕНЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

Рассмотрим вещественную аналитическую систему дифференциальных уравнений, зависящих от малого многомерного параметра ε, имеющую аналитическое семейство m-мерных инвариантных торов $\tau(\varepsilon)$. Предположим, что существуют локальные координаты, в которых дифференциальные уравнения в окрестности $\tau(\varepsilon)$ имеют вид

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + f(x, \varepsilon, \vartheta), \quad \dot{\vartheta} = \omega(\varepsilon) + g(x, \varepsilon, \vartheta), \tag{1}$$

где $A(\varepsilon)$ — аналитическая при $\|\varepsilon\| < \varepsilon_0$ (норма евклидова) $2n \times 2n$-матрица, собственные числа $A(0)$ суть чисто мнимые, равные $\pm i\lambda_1, \ldots, \pm i\lambda_n$ $(i = \sqrt{-1})$, $\omega(\varepsilon)$ — аналитическая при $\|\varepsilon\| < \varepsilon_0$ m-мерная вектор-функция, $f: D \to \mathrm{R}^{2n}$, $g: D \to \mathrm{R}^m$ — аналитические 2π-периодические по ϑ функции, $D = \{x, \varepsilon, \vartheta: \|x\| < x_0, \|\varepsilon\| < \varepsilon_0, \|\mathrm{Im}\,\vartheta\| < \vartheta_0\}$, $f(0, \varepsilon, \vartheta) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, \varepsilon, \vartheta) = 0$, $g(0, \varepsilon, \vartheta) = 0$.

Исходному семейству торов $\tau(\varepsilon)$ в (1) соответствует семейство $x(\varepsilon) = 0$.

1°. Рассмотрим вопрос о существовании при $\varepsilon \neq 0$ устойчивых инвариантных торов системы (1) размерности $n + m$. Случай $n = 1$ рассматривался в [1] (при этом случай $n = 1$, $m = 0$, 1 был исследован ранее, см. [2]). В дополнение к сделанным предположениям предположим также, что при $m \geqslant 2$

1) справедливо неравенство

$$q_1\lambda_1 + \cdots + q_n\lambda_n + p_1\omega_1(0) + \cdots p_m\omega_m(0) \neq 0, \tag{2}$$

где p_j, q_k — целые числа такие, что $0 < \Sigma|p_j| < N$, $0 < \Sigma|q_k| \leqslant 5$;

2) коэффициенты разложений f_k (g_k) по степеням x_j до порядка 4 (3) включительно являются как функции ϑ конечными рядами Фурье (в этой работе всюду f_k обозначают координаты вектора f).

При $m = 1$ условие 2) излишне, а в условии 1) следует считать $N = \infty$. Тогда если N в (2) достаточно велико, то система (1) аналитически эквивалентна при достаточно малых $\|\varepsilon\|$ своей нормальной форме [3] до членов порядка 5 в f и порядка 4 в g, т. е. системе

$$\dot{x}_k = [\alpha_k(\varepsilon) + i\beta_k(\varepsilon)]x_k + x_k\sum_{s=1}^{n} a_{ks}(\varepsilon)x_s\bar{x}_s + X_k(x, \bar{x}, \varepsilon, \vartheta),$$

$$\dot{\bar{x}}_k = [\alpha_k(\varepsilon) - i\beta_k(\varepsilon)]\bar{x}_k + \bar{x}_k\sum_{s=1}^{n} \bar{a}_{ks}(\varepsilon)x_s\bar{x}_s + \bar{X}_k, \tag{3}$$

$$\dot{\vartheta}_j = \omega_j(\varepsilon) + \sum_{s=1}^{n} A_{js}(\varepsilon)x_s\bar{x}_s + \Theta_j(x, \bar{x}, \varepsilon, \vartheta), \quad (k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m),$$

где разложения X_k, $\bar{X}_k$, Θ_j по степеням x_s, $\bar{x}_s$ не содержат членов порядка ниже 5-го (4-го), их коэффициенты аналитичны при $\|\varepsilon\| < \delta$, $\|\mathrm{Im}\,\vartheta\| < \vartheta_0$, а α_k, β_k, ω_j, a_{ks}, A_{js} аналитичны по ε при $\|\varepsilon\| < \delta$ и не зависят от ϑ. При этом из условия вещественности следует, что вторые уравнения в системе (3) являются комплексно сопряженными по отношению к первым.

По условию $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = \lambda$. Будем считать, что размерность ε не меньше n. Пусть

$$\mathrm{rank}\,\frac{d\alpha}{d\varepsilon}(0) = n, \tag{4}$$

$$\det B(0) \neq 0, \tag{5}$$

где $B(\varepsilon)$ — матрица с элементами $\operatorname{Re} a_{ks}(\varepsilon)$ на пересечении k-ой строки и s-го столбца.

Перейдем в (3) к полярным координатам: $x_k = \rho e^{i\varphi}$, $\overline{x_k} = \rho e^{-i\varphi}$. В результате получим вещественную систему

$$\dot\rho_k = \alpha_k(\varepsilon)\rho_k + \rho_k \sum_{s=1}^{n} b_{ks}(\varepsilon)\rho_s^2 + \mathrm{P}_k(\rho, \varepsilon, \varphi, \vartheta),$$

$$\dot\varphi_k = \beta_k(\varepsilon) + \sum_{s=1}^{n} c_{ks}(\varepsilon)\rho_s^2 + \rho_k^{-1}\Phi_k(\rho, \varepsilon, \varphi, \vartheta), \tag{6}$$

$$\dot\vartheta_j = \omega_j(\varepsilon) + \sum_{s=1}^{n} A_{js}(\varepsilon)\rho_s^2 + \Theta_j(\rho, \varepsilon, \varphi, \vartheta), \quad (k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m),$$

где $b_{ks} = \operatorname{Re} a_{ks}$, $c_{ks} = \operatorname{Im} a_{ks}$, функции P_k, Φ_k, Θ_j аналитичны при $\|\rho\| < \rho_0$, $\|\varepsilon\| < \delta$, $\|\operatorname{Im}\varphi\| < \varphi_0$, $\|\operatorname{Im}\vartheta\| < \vartheta_0$, причем разложения P_k, Φ_k по степеням ρ_j не содержат членов порядка ниже 5-го, а разложения Θ_j — ниже 4-го. Рассмотрим бифуркационное уравнение

$$\alpha(\varepsilon) + B(\varepsilon)\rho^2 = 0, \tag{7}$$

где ρ^2 — вектор с координатами ρ_k^2. В силу (4) и (5) уравнение (7) имеет единственное решение $\rho^2 = h(\varepsilon)$, $h(0) = 0$, причем

$$\operatorname{rank} \frac{dh}{d\varepsilon}(0) = \operatorname{rank}\left[B^{-1}(0)\frac{d\alpha}{d\varepsilon}(0)\right] = n.$$

Пусть неравный нулю минор n-го порядка матрицы $\frac{dh}{d\varepsilon}(0)$ образован первыми n координатами вектора ε. Положим $\varepsilon = (\mu, \nu)$, где μ — n-мерный вектор. Не нарушая общности, можно принять h за n-мерную часть параметра, т. е. считать $\mu = h$. Будем предполагать, что параметр изменяется в области

$$\|\varepsilon\| < \delta, \quad d\|\mu\| < \sqrt{n}\,\mu_k \quad (0 < d < 1;\ k = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Введем переменные r_k по формулам $\rho_k^2 = \sqrt{\mu_k} + \mu_k r_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда система (6) примет вид

$$\dot r = P(\varepsilon) r + R(r, \varepsilon, y), \quad \dot y = \sigma(\varepsilon) + Q(\varepsilon)\mu + S(r, \varepsilon, y), \tag{9}$$

где $y = \operatorname{col}(\varphi, \vartheta)$, $\sigma = \operatorname{col}(\beta, \omega)$, P — матрица с элементами $2b_{ks}\mu_k^{-1/2}\mu_s^{3/2}$, $Q = \operatorname{col}(C, E)$, C — матрица с элементами c_{ks}, E — матрица с элементами A_{ks},

$$R = O(\|\mu\|^{3/2}), \quad S = O(\|\mu\|^{3/2}). \tag{10}$$

Правая часть (9) аналитична при $\|r\| < 1$, $\|\operatorname{Im} y\| < y_0$, а по ε — в комплексной окрестности области (8).

Предположим, что собственные числа $\varkappa_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ матрицы $B(0)$ имеют отрицательные вещественные части и пусть — e — наибольшая из них. В ε зафиксируем ν и положим $\mu_j = z_j\mu_1$ $(z_j > 0;\ j = 2, \ldots, n)$. Тогда собственные числа $\gamma_k(\mu)$ матрицы $P(\mu)$ имеют вид

$$\gamma_k = \mu_1 q_k(z_2, \ldots, z_n), \tag{11}$$

где $q_k \to 2\varkappa_k$ при $z_j \to 1$ $(j = 2, \ldots, n)$. Если z_j достаточно близки к единице, то в силу (11)

$$\operatorname{Re}\gamma_k(\mu) < -e\mu_1 < -\frac{ed}{\sqrt{n}}\|\mu\|. \tag{12}$$

Этого можно добиться, выбрав d в (8) достаточно близким к единице.

При указанных значениях параметра к системе (9) можно применить теорему Дж. Хейла ([4], теорема 15.1) о существовании инвариантной тороидальной поверхности вида $r = F(y, \varepsilon)$, где F — сколь угодно гладкая функция, 2π-периодическая по y. Хотя в указанной теореме ε считался одномерным параметром, доказательство ее сохраняет силу вследствие (10) и (12). Отсюда вытекает

Теорема 1. *Если δ и $1-d$ достаточно малы, выполняется условие (4) и собственные числа $B(0)$ имеют отрицательные вещественные части, то каждому ε из области (8) соответствует асимптотически устойчивый инвариантный тор $T(\varepsilon): \rho_k = \sqrt{\mu_k} + \mu_k F_k(y, \varepsilon)$ $(k = 1, \ldots, n)$ системы (6).*

Замечание. Условие аналитичности исходной системы можно ослабить до условия Липшица (см. [4]).

2°. Теперь рассмотрим вопрос, при каких условиях тор $T(\varepsilon)$ является носителем квазипериодических решений с $n+m$ базисными частотами. Установим размерность параметра ε равной $n+m$. Вместо системы (9) рассмотрим систему

$$\dot r = Pr + R,\ \dot y = \Omega + \Delta + S, \tag{13}$$

где Ω — $n+m$-мерный постоянный вектор, координаты которого удовлетворяет условию

$$|k_1\Omega_1 + \cdots + k_{n+m}\Omega_{n+m}| > K\|\mu\|(|k_1| + \cdots + |k_{n+m}|)^{-(n+m+1)}, \tag{14}$$

где $K > 0$ не зависит от μ, $\Sigma k_j > 0$, k_j целые.

Правые части системы (9) и (13) аналитичны по ε в области

$$\|\varepsilon\| < \delta,\ |\operatorname{Im}\mu_k| < \eta\operatorname{Re}\mu_k \tag{15}$$

при любом $\eta > 0$. К системе (13) применим теорему Н. Н. Боголюбова о существовании квазипериодических решений ([5], теорема 3). Согласно этой теореме, если δ достаточно мало, существует $n+m$-мерная векторная функция $\Delta(\varepsilon)$ такая, что система (13) имеет квазипериодические решения

$$r = u(\bar y + \Omega t,\ \varepsilon),\ y = \bar y + \Omega t + v(\bar y + \Omega t,\ \varepsilon), \tag{16}$$

где $u(y,\ \varepsilon)$, $v(y,\ \varepsilon)$ — 2π-периодические функции y, аналитические по y при $\|\operatorname{Im} y\| < y^*$, $\bar y$ — произвольный постоянный вектор. При этом в силу (10)

$$\Delta(\varepsilon) = O(\|\mu\|^{3/2}). \tag{17}$$

Далее, можно показать ([5], § 5), что u, v, Δ являются аналитическими функциями ε в области, где аналитична система (13) и выполняется неравенство

$$\|e^{Pt}\| \leqslant He^{-c\|\mu\|t},\quad \alpha > 0,\ H > 0.$$

Из (11) вытекает, что эти условия выполняются, когда ε изменяется в области (15) при достаточно малом $\eta > 0$, если z_j в (11) достаточно близки к единице. В частности, $\Delta(\varepsilon)$ непрерывно дифференцируема в вещественной области (8), причем из оценок Коши и из (17) следует, что там

$$\frac{d\Delta}{d\varepsilon} = O(\|\mu\|^{1/2}). \tag{18}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(\delta)$ область, представляющую собой образ области (8) при отображении $\varepsilon \to \sigma(\varepsilon) + Q(\varepsilon)\mu - \Delta(\varepsilon)$. В силу (18) при выполнении условия

$$\det\left[\frac{d\sigma}{d\varepsilon}(0) + (Q(0),\ \bar O)\right] \neq 0, \tag{19}$$

где $\bar O$ — нулевая $n+m \times m$-матрица, мера $\mathfrak{M}(\delta)$ имеет порядок δ^{n+m}. Выбором достаточно малого $K > 0$, не зависящего от δ, можно добиться, чтобы множество точек $\mathfrak{N}(\delta) \subset \mathfrak{M}(\delta)$, удовлетворяющих условию (14) при $\|\mu\| = \delta$, было непусто и его мера была бы сколь угодно близка к мере $\mathfrak{M}(\delta)$. Так как $\delta \geqslant \|\varepsilon\| \geqslant \|\mu\|$, то для точек $\mathfrak{N}(\delta)$ выполняется и (14). Рассмотрим уравнение

$$\Omega + \Delta = \sigma + Q\mu,\quad \Omega \in \mathfrak{N}(\delta). \tag{20}$$

При условии (19) уравнение (20) имеет решение $\varepsilon(\Omega)$, определенное при $\Omega \in \mathfrak{N}(\delta)$, причем $\varepsilon(\Omega) \to 0$ при $\Omega \to (\lambda,\ \omega(0))$. Поскольку при выполнении (20) системы (13) и (9) совпадают, из вышеизложенного вытекает

Теорема 2. *Если δ и $1-d$ в (8) достаточно малы, выполнены условия (4) и (19) и собственные числа матрицы $B(0)$ имеют отрицательные вещественные части, то каждому $\varepsilon(\Omega)$, где $\Omega \in \mathfrak{N}(\delta)$, соответствует асимптотически устойчивый инвариантный тор системы (6) с квазипериодическими решениями (16):* $\rho_k = \sqrt{\mu_k + \mu_k u_k(\bar y + \Omega t,\ \varepsilon)}$, $y_j = \bar y_j + \Omega_j t + v_j(\bar y + \Omega t,\ \varepsilon)$.

При $m = 0$ это утверждение доказано в [6].

Литература

1. Sell G. R. Bifurcation of Higher Dimensional Tori.— Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1979, vol. 69, N 3, p. 199—230.
2. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978, с. 304.
3. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1979, с. 253.
4. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах.— М.: Мир, 1966, с. 230.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Ме-

тод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1969, с. 247.

6. Бибиков Ю. Н.— Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 9, с. 1539—1544.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию 15 июля 1980 г.

УДК 517.929

П. С. ГРОМОВА

ОБ ОБРАЩЕНИИ ТЕОРЕМ Б. С. РАЗУМИХИНА

Долгое время рядом авторов [1—4] высказывалось утверждение о необратимости теорем второго метода Ляпунова для систем с отклоняющимся аргументом в классе функций конечного числа переменных и, в частности, теорем Б. С. Разумихина [1]. В основе этих высказываний лежали следующие рассуждения: если бы эти теоремы допускали обращение, то для уравнений вида $x'(t)=f(t,x(t),\ x(t-\tau))$ и $x'(t)=kf(t,\ x(t),\ x(t-\tau))$, $\tau=\mathrm{const}$ при любых положительных k устойчивость или неустойчивость должна была бы иметь место одновременно, так как если тривиальное решение первого уравнения устойчиво, то в силу теоремы обращения это уравнение должно иметь функцию Ляпунова $v\ (t,\ x)$, а тогда для второго уравнения в качестве функции Ляпунова можно взять $v(kt,\ x)$.

На простейших примерах линейных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием показывалось, что области устойчивости таких уравнений не совпадают. Отсюда делался вывод о невозможности обращения теорем Ляпунова для систем с отклоняющимся аргументом в классе функций конечного числа переменных. В этих рассуждениях не был учтен тот факт, что при переходе от первого из приведенных выше уравнений ко второму вместе с переходом от переменной t к переменной kt происходит соответствующее растяжение или сжатие запаздывания во втором уравнении в k раз. Поскольку для уравнений с отклоняющимся аргументом область устойчивости, как правило, зависит от величины запаздывания, то приводимые в [2—4] примеры не противоречат возможности обращения теорем Ляпунова для уравнений с отклоняющимся аргументом в классе функций конечного числа переменных. Теоремы обращения в случае равномерной асимптотической устойчивости в классе функционалов доказаны в [4]. В данной заметке приводится теорема о существовании функции Ляпунова для систем с запаздыванием в случае асимптотической устойчивости, равномерной по начальным данным.

Рассмотрим систему

$$x'(t)=F(t,\ x(t),\ x(t-\tau(t))), \tag{1}$$

где $x(t)\in R^n$ при каждом фиксированном t, $\tau(t)$ — непрерывная функция $0\leqslant\tau(t)\leqslant h=\mathrm{const}$, векторная функция $F(t,\ x,\ y)$ определена и непрерывна по t в области

$$|x(t)|<H,\ t\geqslant t_0, \tag{2}$$

удовлетворяет в этой области условию Липшица по переменным x и y и $F(t,\ 0,\ 0)=0$. Здесь и в дальнейшем $|x(t)|$ — евклидова норма.

Рассмотрим решение системы (1) $x(t)=x(t,\ \varphi,\ t_0)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(t)=\varphi(t)$, $t\in E_{t_0}=[t_0-\tau,\ t_0]$, $\tau=\sup\{\tau(t)-t+t_0,\ t\geqslant t_0\}$, $\varphi(t)\in C(E_{t_0})$. Будем говорить, что тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво равномерно по начальному моменту $t_0\geqslant 0$ и по начальным функциям из области

$$|\varphi(t)|<\delta,\quad t\in E_{t_0} \tag{3}$$

(равномерно по начальным данным), если оно равномерно устойчиво по t_0 и если для любого $\alpha>0$ существует $T(\alpha)>0$ такое, что для всех $t\geqslant t_0+T$ и всех $\varphi(t)$ из области (3) справедливо неравенство $|x(t)|<\alpha$. Будем рассматривать вещественные функции $v(t,\ x)$, определенные и непрерывные в области (2). Обозначим через $Dv(t,\ x)$ верхнее правое производное число функции $v(t,\ x)$ на решениях системы (1)

$$Dv(t,\ x)=\limsup_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}\,[v(t+\Delta t,\quad x(t+\Delta t,\ \varphi,\ t_0))-v(t,\ x(t,\ \varphi,\ t_0))].$$

Теорема. *Для асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1), равномерной по начальным данным, необходимо и достаточно, чтобы в области (2) существовала определенно положительная, допускающая бесконечно малый высший предел функция $v(t,\ x)$, для которой функционал $Dv(t,\ x)$ определенно отрицателен на множествах решений системы (1), удовлетворяющих условию*

$$v(x(\sigma),\ \sigma)\leqslant v(x(t),\ t),\quad \sigma\leqslant t,\ t\geqslant t_0. \tag{4}$$