



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Островский, Задача трех пространств для слабого свойства Банаха–Сакса,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 721–725

<https://www.mathnet.ru/mzm5585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

22 мая 2025 г., 20:02:28



ЗАДАЧА ТРЕХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ СЛАБОГО СВОЙСТВА БАНАХА — САКСА

М. И. Островский

«Задачей трех пространств» для некоторого свойства A банахова пространства называется задача о том, влечет ли наличие свойства A у двух из трех пространств X , Y , X/Y (Y — замкнутое подпространство в X , X/Y — соответствующее фактор-пространство) наличие его у третьего. Такие задачи рассматривались в работах [1—4].

В работе [3] рассматривалась «задача трех пространств» для слабого свойства Банаха—Сакса. Напомним, что, по определению [5, с. 39], банахово пространство X обладает слабым свойством Банаха—Сакса (записывается: $X \in \in WBS$), если каждая слабо сходящаяся к нулю последовательность $\{x_n\} \subset X$ содержит подпоследовательность $\{y_n\}$, такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right\|_X = 0.$$

«Задача трех пространств» для свойства WBS состоит в выяснении справедливости следующих трех импликаций:

- а) $X, X/Y \in WBS \Rightarrow Y \in WBS$;
- в) $X, Y \in WBS \Rightarrow X/Y \in WBS$;
- с) $Y, X/Y \in WBS \Rightarrow X \in WBS$.

Очевидно, что импликация а) справедлива, так как свойство WBS наследуется подпространствами. В работе

[3] было установлено, что импликация в), вообще говоря, неверна, но имеет место при дополнительном предположении, что X не содержит подпространств, изоморфных l_1 . Что касается импликации с), то в [3] была установлена ее справедливость при дополнительном предположении о рефлексивности пространства X , а в [4] — при дополнительном предположении, что X не содержит подпространств, изоморфных l_1 . Вопрос о ее справедливости в общем случае оставался, насколько нам известно, открытым. Целью настоящей заметки является отрицательный ответ на него.

ТЕОРЕМА. *Существует тройка пространств $X, Y, X/Y$, для которых импликация с) не имеет места.*

Чтобы построить искомую тройку, нам понадобится пространство Шрейера. Напомним его конструкцию [5, с. 97].

Множество $A = \{n_1, \dots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ с $n_1 < \dots < n_k$ назовем допустимым, если $k \leq n_1$. Обозначим через B множество всех допустимых подмножеств в \mathbb{N} . Пространство Шрейера S — это пополнение множества финитных последовательностей вещественных чисел по норме

$$\|x\|_S = \sup_{A \in B} \sum_{i \in A} |x(i)|$$

(через $x(i)$ мы обозначаем i -й член последовательности x).

Из свойств пространства S нам понадобятся следующие два: 1) $S \notin \text{WBS}$; 2) каноническое вложение $C: S \rightarrow c_0$ ограничено и имеет единичную норму.

Положим $X = (l_1 \oplus S)_1$. Для построения подпространства $Y \subset X$ обозначим через T произвольное фактор-отображение l_1 на c_0 (такое, как известно [6, с. 108], существует) и рассмотрим оператор $F: X \rightarrow c_0$, действующий по формуле $F(x_1, x_2) = Tx_1 + Cx_2$, где $x_1 \in l_1, x_2 \in S$.

Легко убедиться, что оператор F отображает единичный шар пространства X на плотное подмножество единичного шара c_0 и поэтому является фактор-отображением. Положим $Y = \text{Ker } F$. В силу сказанного выше имеем $X/Y = c_0$.

Так как $S \notin \text{WBS}$, то и $X \notin \text{WBS}$. Легко видеть, что $c_0 \in \text{WBS}$, следовательно, $X/Y \in \text{WBS}$. Поэтому справедливость теоремы вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА. $\text{Ker } F \in \text{WBS}$.

Для ее доказательства нам понадобятся следующие факты.

Предложение А ([7], см., также, [5, с. 5—8]). Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность в банаховом пространстве Z , не имеющая подпоследовательностей Коши. Существует подпоследовательность $\{e_n\} \subset \{x_n\}$ и норма L , определенная на множестве Q финитных числовых последовательностей, такие, что для любого $a = (a_i) \in Q$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\nu = \nu(a, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, для которого

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{\nu} a_i e_{n_i} \right\|_Z - L(a) \right| < \varepsilon$$

при любых $\nu \leq n_1 < n_2 < \dots$. Пополнение Q по норме L называется [5] растягивающей моделью (р. м.) пространства Z с фундаментальной последовательностью (ф. п.) $\{e_n\}$.

Нам понадобятся два очевидных утверждения о р.м.:

а) подпоследовательность ф.п. р.м. является ф.п. некоторой р.м., канонически изометричной исходной;

б) то же можно утверждать и о любой последовательности $\{y_n\}$, для которой $\|e_n - y_n\|_Z \rightarrow 0$.

При помощи р.м. Бозами дал такую характеристику свойства WBS.

ТЕОРЕМА Б [5, с. 50]. Для того чтобы $Z \notin \text{WBS}$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ у Z имелась р.м., ф.п. которой слабо сходится к нулю и имеют место неравенства

$$(1 - \varepsilon) \sum |a_i| < L(a) < \sum |a_i|, \quad (1)$$

где $a \neq 0$.

Перейдем к доказательству леммы. Предположим, что она неверна. Используя теорему Б с $Z = \text{Ker } F$, находим слабо сходящуюся к нулю последовательность $\{e_i\} \subset \text{Ker } F$, являющуюся ф.п. для р.м., для которой выполнено условие (1). Имеем $e_i = (q_i, r_i)$, $q_i \in l_1$, $r_i \in S$, причем $\{q_i\}$ и $\{r_i\}$ слабо сходятся к нулю. Поскольку в l_1 сильная и слабая сходимости последовательностей эквивалентны [8, с. 59], имеем $\|q_i\|_{l_1} \rightarrow 0$, и, следовательно, $\|Tq_i\|_{c_0} \rightarrow 0$. Так как $(q_i, r_i) \in \text{Ker } F$, то $\|Cr_i\|_{c_0} \rightarrow 0$. Применяя утверждение б) к последовательностям $\{(q_i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{(0, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$, получим, что $\{r_i\}$ является ф.п. р.м. пространства S , удовлетворяющей условию (1). Поскольку $\{r_i\}$ слабо сходится к нулю, то существует последовательность $\{t_i\}$ дизъюнктивных блоков канонического базиса пространства S (т. е. векторов вида $t_i = \sum_{k=m_i}^{m_{i+1}-1} \alpha_k s_k$,

$m_i \in \mathbf{N}$, $m_1 < m_2 < \dots < m_i < \dots$; $s_k = \{\delta_{jk}\}_{j=1}^{\infty} \in S$, такая, что для некоторой подпоследовательности $\{r_{k_i}\} \subset \subset \{r_i\}$ имеем $\|t_i - r_{k_i}\|_S \rightarrow 0$. Используя утверждения α) и β), получаем, что $\{t_i\}$ является ф.п. некоторой р.м. пространства S , для которой имеет место (1). Из определения р.м. и из (1) следует, что

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \|t_i\|_S < 1. \quad (2)$$

Так как $\|Cr_i\|_{c_0} \rightarrow 0$, то

$$\|Ct_i\|_{c_0} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Рассмотрим последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} = \{1/2, 1/2, 0, 0, \dots\}$. Из определения р.м. и соотношений (1), (2) следует, что существует ν , такое, что при любых i, j с $i > j \geq \nu$ имеем

$$\left\| \frac{1}{2}t_i + \frac{1}{2}t_j \right\|_S > 1 - \varepsilon, \quad (4)$$

$$\|t_j\|_S < 1. \quad (5)$$

Пусть p — номер последней ненулевой координаты вектора t_ν . Ввиду (3) найдется такое $i > \nu$, что все координаты $t_i(k)$ вектора t_i будут меньше $1/(2p)$. Оценим сверху $\|(1/2)t_\nu + (1/2)t_i\|_S$. Пусть A — произвольное допустимое множество. Если его первый элемент больше p , то, ввиду $t_\nu(k) = 0$ при $k > p$, имеем

$$\sum_{k \in A} \left| \left(\frac{1}{2}t_\nu + \frac{1}{2}t_i \right)(k) \right| \leq \frac{1}{2} \|t_i\|_S < \frac{1}{2}.$$

Если же его первый элемент не превосходит p , то, используя (5) и $\text{card } A \leq p$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A} \left| \left(\frac{1}{2}t_\nu + \frac{1}{2}t_i \right)(k) \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k \in A} |t_\nu(k)| + \frac{1}{2} \sum_{k \in A} |t_i(k)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|t_\nu\|_S + \frac{1}{2} p \cdot \frac{1}{2p} < \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Так что $\|(1/2)t_\nu + (1/2)t_i\|_S < \frac{3}{4}$. Выбрав $\varepsilon = 1/4$, приходим в противоречие с (4). Лемма доказана.

Выражаю благодарность М. И. Кадецу за научное руководство.

Харьковский институт инженеров
коммунального строительства

Поступило
14.03.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Enflo P., Lindenstrauss J., Pisier G. On the «three space problem».— *Math. Scand.*, 1975, v. 36, № 2, p. 199—210.
- [2] Раков С. А. Ультрапроизведения и «задача трех пространств».— *Функц. анализ и его прил.*, 1977, т. 11, № 3, с. 88—89.
- [3] Годун Б. В., Раков С. А. Свойство Банаха—Сакса и задача трех пространств.— *Математические заметки*, 1982, т. 31, вып. 1, с. 61—74.
- [4] Островский М. И. Свойства Банаха—Сакса, инъективность и растворы подпространств банахова пространства.— *Теория функций, функц. анализ и их прил.*, 1985, т. 44, с. 69—78.
- [5] Beauzamy B., Lapresté J. T. Modèles étales des espaces de Banach.— Paris: Hermann, 1983.
- [6] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. I.— Berlin: Springer, 1977.
- [7] Brunel A., Sucheston L. On B -convex Banach spaces.— *Math. Systems Theory*, 1973, v. 7, № 4, p. 294—299.
- [8] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства.— М.: ИЛ, 1961.