В. И. Сардыко, Решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом матричных преобразований,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 3, 419–422

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 419–422

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.923

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МАТРИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

© 2005 г. В. И. Сардыко

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$e' = ue, \quad (') = d/dx, \tag{1}$$

где

$$e' = (e_1', e_2')^{\text{т}}, \quad u = (u_{ij}(x))_{i,j=1}^2, \quad e = (e_1, e_2)^{\text{т}},$$

а т означает операцию транспонирования. По теореме существования и единственности [1, 2] это уравнение имеет единственное решение

$$e(x) = U(x, x_0)e(x_0), \tag{2}$$

где матрицант (матрица эволюции) $U(x, x_0)$ [2, 3] вычисляется по формуле

$$U(x, x_0) = e^{(/u)} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} (/u)^m; \tag{3}$$

здесь $/u = \int_{x_0}^x u(t)\,dt$, $(/u)^m = /u(/u)^{m-1}$.

1. Положим сначала в матрице u диагональные элементы $u_{11} = u_{22} = 0$. Прямое вычисление матрицанта (3) приводит к результату

$$U = \left[1 + \begin{pmatrix} 0 & /u_{12} \\ /u_{21} & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} e^{(/u_{12}/u_{21})} & 0 \\ 0 & e^{(/u_{21}/u_{12})} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$U_{11,22} = \int\limits_{x_0}^{x} dt_{2n} u_{12,21}(t_{2n}) \int\limits_{x_0}^{t_{2n}} dt_{2n-1} u_{21,12}(t_{2n-1}) \ldots \int\limits_{x_0}^{t_3} dt_2 u_{12,21}(t_2) \int\limits_{x_0}^{t_2} dt_1 u_{21,12}(t_1), \tag{5}$$

$$U_{12,21} = \int\limits_{x_0}^{x} dt_{2n+1} u_{21,12}(t_{2n+1}) \times$$

$$\times \int\limits_{x_0}^{t_{2n+1}} dt_{2n} u_{12,21}(t_{2n}) \int\limits_{x_0}^{t_{2n}} dt_{2n-1} u_{21,12}(t_{2n-1}) \ldots \int\limits_{x_0}^{t_3} dt_2 u_{12,21}(t_2) \int\limits_{x_0}^{t_2} dt_1 u_{21,12}(t_1), \tag{6}$$

В теории матриц эффективным методом исследования является использование базиса собственных векторов [2–5]. Переход к базису собственных векторов можно осуществить с помощью преобразования

$$e = SE, \tag{7}$$

в силу которого уравнение (1) принимает вид $E' = vE$, где $E' = (E_1', E_2')^{\text{т}}$, $v = (v_{ij}(x))_{i,j=1}^2$, $E = (E_1, E_2)^{\text{т}}$. При этом

$$v = S^{-1}(uS - S'). \tag{8}$$

Двумерную матрицу S возьмем в виде

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где столбцы матрицы (9) пропорциональны собственным векторам матриканта U. В силу (9) матрица (8) принимает вид

$$v = (y_1 - y_2)^{-1} \begin{pmatrix} -y_2 u_{12} y_1 + u_{21} - y_1' & -y_2^2 u_{12} + u_{21} - y_2' \\ y_1^2 u_{12} - u_{21} + y_1' & y_1 u_{12} y_2 - u_{21} + y_2' \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Собственные значения матрицы U, т.е. корни характеристического уравнения

$$|U - \lambda I| = 0, \tag{11}$$

где I – единичная матрица, имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(U_{11} + U_{22} \pm ((U_{11} - U_{22})^2 + 4U_{12}U_{21})^{1/2}). \tag{12}$$

Матрица U имеет различные собственные значения при условии, что дискриминант характеристического уравнения (11), а именно

$$(U_{22} - U_{11})^2 + 4U_{12}u_{21} \equiv (\operatorname{sp} U)^2 - 4 \det U \neq 0. \tag{13}$$

В силу (12) и (13) собственные векторы матрицы U можно принять в виде $(1, y_1)^{\text{т}}$, $(1, y_2)^{\text{т}}$, где $y_{1,2}$ находятся по любой из следующих формул:

$$y_{1,2} = \frac{1}{2U_{12}}[U_{22} - U_{11} \pm ((U_{22} - U_{11})^2 + 4U_{12}U_{21})^{1/2}], \tag{14}$$

$$y_{1,2} = 2U_{21}[U_{11} - U_{22} \pm ((U_{11} - U_{22})^2 + 4U_{12}U_{21})^{1/2}]^{-1}, \tag{15}$$

U_{ij} вычисляются по формулам (5), (6).

Это решение было анонсировано в работе [6]. Приравняв к нулю недиагональные элементы матрицы v, получим специальное уравнение Риккати

$$y_{1,2}' = -y_{1,2}^2 u_{12} + u_{21}. \tag{16}$$

Матрицант $V = e^{(/v)}$, где матрица v удовлетворяет (10), (16), легко вычисляется, так как v диагональна.

Таким образом, частные решения специального уравнения Риккати (16) могут быть найдены по формулам (14), (15).

Однако если два решения совпадают $(y_1 = y_2)$, преобразование (7), (9) непригодно. Тогда необходимо применить другие преобразования [2–5], приводящие матрицу к каноническому виду, но на этом останавливаться не будем.

2. В случае произвольной матрицы u матрица v имеет вид

$$v = (y_1 - y_2)^{-1} \begin{pmatrix} -y_2(u_{11} + u_{12}y_1) + u_{21} + u_{22}y_1 - y_1' & -y_2(u_{11} + u_{12}y_2) + u_{21} + u_{22}y_2 - y_2' \\ y_1(u_{11} + u_{12}y_1) - u_{21} - u_{22}y_1 - y_1' & y_1(u_{11} + u_{12}y_2) - u_{21} - u_{22}y_2 - y_2' \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Приравняв к нулю недиагональные элементы матрицы (17), получим общее уравнение Риккати

$$y_{1,2}' = u_{12}y_{1,2}^2 + (u_{11} + u_{22})y_{1,2} + u_{21}. \tag{18}$$

Найдем представления решений для уравнений (1) и (18) и в этом случае. Применим к уравнению (1) диагональное преобразование

$$e = S_1 f, \tag{19}$$

где

$$f = (f_1, f_2)^{\text{т}}, \quad S_1 = \operatorname{diag}(e^{(/u_{11})}, e^{(/u_{22})}).$$

Операторы $e^{(/u_{11,22})}$ являются матрицантами, которые в данном случае обращаются в матричные экспоненты. Уравнение (1) преобразуется в уравнение

$$f' = wf, \tag{20}$$

где матрица w косоугольна:

$$w = s_1^{-1}(uS_1 - S_1') = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} \\ w_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-(/u_{11})}u_{12}e^{(/u_{22})} \\ e^{-(/u_{22})}u_{21}e^{(/u_{11})} & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Решение уравнения (20) можно представить в виде

$$f(x) = W(x, x_0)f(x_0), \tag{22}$$

где матрицант $W(x, x_0)$ для матрицы w представим в виде

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \equiv \left[1 + \begin{pmatrix} 0 & /w_{12} \\ /w_{21} & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} e^{(/w_{12}/w_{21})} & 0 \\ 0 & e^{(/w_{21}/w_{12})} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

причем

$$W_{11,22}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{x_0}^{x} dt_{2(k+1)}w_{12,21}(t_{2(k+1)}) \int_{x_0}^{x} dt_{2k}w_{21,12}(t_{2(k+1)}) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n-1} \int_{x_0}^{t_{2k+1}} dt_{2k}w_{12,21}(t_{2k}) \int_{x_0}^{t_{2k}} dt_{2k-1}w_{21,12}(t_{2k-1}) + 1, \tag{24}$$

$$W_{12,21}(x) = \int_{x_0}^{x} dt w_{12,21}(t)W_{22,11}(t). \tag{25}$$

Следует отметить, что элементы W_{ij} не равны $e^{(/w_{12}/w_{21})}$, $/w_{12}e^{(/w_{21}/w_{12})}$, $/w_{21}e^{(/w_{12}/w_{21})}$, $e^{(/w_{21}/w_{12})}$. Эти экспоненты являются мажорирующими функциями для скалярных матрицантных рядов (24), (25). Суммы этих рядов не выражаются через элементарные функции. Но они выражаются сходящимися рядами от мультипликативных интегралов.

Возвратившись опять к переменной e, в силу (19) и (22) получим следующее выражение для $U(x, x_0)$:

$$U(x, x_0) = S_1(x, x_0)W(x, x_0)S_1^{-1}(x, x_0). \tag{26}$$

Формула (26) дает представление решения уравнения (1).

Для нахождения решения уравнения (18) преобразуем его в специальное уравнение Риккати. Это можно сделать, например, следующим образом. Преобразуем матричное уравнение (20) к диагональному виду подстановкой

$$f = \sigma F, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}, \quad z_1 \neq z_2,$$

где матрица σ состоит из собственных векторов матрицанта W. Имеем последовательно

$$F' = \omega F, \quad \omega = \sigma^{-1}(w\sigma - \sigma'),$$

$$\omega = (z_1 - z_2)^{-1} \begin{pmatrix} -z_2w_{12}z_1 + w_{21} - z_1' & -z_2^2w_{12} + w_{21} - z_2' \\ z_1^2w_{12} - w_{21} + z_1' & z_1w_{12}z_2 - w_{21} + z_2' \end{pmatrix}.$$

Матрица ω становится диагональной, если $z_{1,2}$ удовлетворяют специальному уравнению Риккати

$$z_{1,2}' = -z_{1,2}^2w_{12} + w_{21}. \tag{27}$$

Частные решения уравнения (27) можно представить любой из формул (см. для сравнения (14), (15))

$$\begin{gathered} z_{1,2} = \frac{1}{2W_{12}}[W_{22} - W_{11} \pm ((W_{22} - W_{11})^2 + 4W_{12}W_{21})^{1/2}], \\ z_{1,2} = 2W_{21}[W_{11} - W_{22} \pm ((W_{11} - W_{22})^2 + 4W_{12}W_{21})^{1/2}]^{-1}, \end{gathered} \tag{28}$$

где W_{ij} удовлетворяют формулам (24), (25). Так как матрицы $U(x, x_0)$ и $W(x, x_0)$ подобны и, следовательно, характеристические уравнения $|U - \lambda_{1,2}I| = 0$, $|W - \lambda_{1,2}I| = 0$ совпадают, то решения общего уравнения Риккати (18) можно представить в виде $y_{1,2} = e^{/u_{22}}z_{1,2}e^{-/u_{11}}$, где $z_{1,2}$ находятся по любой из формул (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1976.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1988.
3. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1953.
4. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1979.
5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.
6. *Сардыко В.И.* // VIII Бел. мат. конф.: Тез. докл. Ч. 1. 19–24 июля 2000 г. С. 153.

г. Минск

Поступила в редакцию
03.01.2003 г.