В. Д. Ажоткин, В. М. Бабич, О распространении волн Лява вдоль поверхности анизотропного тела произвольной формы, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 165, 9–14

В.Д.Ажоткин, В.М.Бабич

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ЛЯВА ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

I. Введение.

Введенная Ю.А.Кравцовым формула для волнового поля в окрестности каустики, т.н. анзатц Кравцова, как показали более поздние исследования, имеет гораздо большую универсальность, чем это представлялось вначале. Это легко можно показать на примере выражений для волновых полей в окрестности каустик упругих и электромагнитных волн, волн шепчущей галереи разного типа. В настоящей работе анзатц Кравцова используется для описания упругих волн, распространяющихся вдоль поверхности анизотропного тела произвольной формы. Его применение согласуется с физическим смыслом явления распространения поверхностной волны и приводит к формулам, имеющим более широкую область применения, чем соответствующие погранслойные ряды. Идейно близкие построения можно найти в работах [8] (скалярный случай) и [I6] (изотропное упругое тело).

2. Постановка задачи.

Рассматриваемый нами тип волн - это волны шепчущей галереи вблизи свободной от напряжений поверхности Σ. В анизотропном случае, вообще говоря, существуют волны трех типов с разными групповыми скоростями. Мы будем строить аналитическое выражение для волн шепчущей галереи, соответствующей волне с наинизшей из скоростей (имеется в виду групповая скорость в некотором направлении, касательном к поверхности Σ). Мы предполагаем, что уравнения движения упругой среды имеют стандартный вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j},\quad \sigma_{ij}=\frac{1}{2}a_{ijkh}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x^h}+\frac{\partial u_h}{\partial x^k}\right);\quad i,j,k,h=1,2,3. \tag{2.I}$$

Тензор $a_{ijkh}(\vec{x})$, характеризующий среду, положительно определен и симметричен: $a_{ijkh}\varepsilon_{kh}\varepsilon_{ij}>0;\ \sum\limits_{i,j}\varepsilon^2_{ij}>0;\quad a_{ijkh}=a_{khij}=a_{jikh}$.

Будем искать волну шепчущей галереи в виде:

$$\vec{u}(\vec{x},t)=e^{ip\xi(\vec{x},t)}\left(\vec{A}(\vec{x},t)v(-p^{2/3}\eta(x,t))+ip^{-\frac{1}{3}}\vec{B}(\vec{x},t)v'(-p^{\frac{2}{3}}\eta(\vec{x},t))\right). \tag{2.2}$$

Здесь v и v' - функции Эйри в определении В.А.Фока ([I]), p - большой параметр. Подставив (2.2) в уравнение (2.I), получим:

$$(ip)^2([N(\xi)+\eta N(\eta)]\vec{A}+2\eta N(\xi,\eta)\vec{B}) = ip(M(\xi,\vec{A}) +$$

$$+\eta M(\eta,\vec{B}) + N(\eta)\vec{B}) + L(\vec{A}), \tag{2.3}$$

$$(ip)^2(2N(\xi,\eta)\vec{A}+[N(\xi)+\eta N(\eta)]\vec{B}) = ip(M(\eta,\vec{A})+M(\xi,\vec{B}))+L(\vec{B}) .$$

Здесь

$$(N(\xi,\eta)\vec{A})_i = \rho\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}A_i - \frac{1}{2}a_{ijkh}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x^j}\frac{\partial\eta}{\partial x^k}+\frac{\partial\eta}{\partial x^j}\frac{\partial\xi}{\partial x^k}\right)A_h ;$$

$$N(\xi) = N(\xi,\xi); \quad N(\eta) = N(\eta,\eta);$$

$$(M(\xi,\vec{A}))_i = \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}A_i+2\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial A_i}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(a_{ijkh}\frac{\partial\xi}{\partial x^h}\right)A_k-a_{ijkh}\frac{\partial\xi}{\partial x^h}\frac{\partial A_k}{\partial x^j}-a_{ijkh}\frac{\partial\xi}{\partial x^j}\frac{\partial A_k}{\partial x^h},$$

$$L(\vec{A})_i=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_i-\frac{\partial}{\partial x^j}\left(a_{ijkh}\frac{\partial A_h}{\partial x^k}\right); \quad \vec{A}=(A_1,A_2,A_3); \quad i,j,k,h = 1,2,3 .$$

Будем искать $\vec{A}$ и $\vec{B}$ в виде формальных рядов:

$$\vec{A}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\vec{A}^j(\vec{x},t)}{(ip)^j}, \qquad \vec{B}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\vec{B}^j(\vec{x},t)}{(ip)^j} . \tag{2.4}$$

Подставим (2.4) в (2.3) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях (ip) :

$$(N(\xi)+\eta N(\eta))\vec{A}^{j+2}+2\eta(N(\xi,\eta))\vec{B}^{j+2}= M(\xi,\vec{A}^{j+1})+\eta M(\eta,\vec{B}^{j+1})+N(\eta)\vec{B}^{j+1}+L(\vec{A}^j)$$

$$2N(\xi,\eta)\vec{A}^{j+2}+(N(\xi)+\eta N(\eta))\vec{B}^{j+2}= M(\eta,\vec{A}^{j+1}) + M(\xi,\vec{B}^{j+1})+L(\vec{B}^j)$$

$$i = -2,-1,0,1,\ldots ; \qquad \vec{A}^{-2}= \vec{A}^{-1} = \vec{B}^{-2}= \vec{B}^{-1}= 0 \tag{2.5}$$

Пусть $\vec{n}$ – нормаль, направленная внутрь тела, а q^1, q^2, q^3 – регулярная система координат вблизи Σ , причем q^3 – координата по нормали. Предположим, что $\eta|_\Sigma = \gamma$, где γ будет в дальнейшем играть роль малого параметра, что физически означает близость каустики $(\eta=0)$ к поверхности Σ .

Будем искать ξ, η, $\vec{A}^k$, $\vec{B}^k$ в виде формальных разложений

$$\xi=\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\gamma^j=\sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\infty}\xi_{ij}n^i\gamma^j ; \quad \eta=\sum_{j=0}^{\infty}\eta_j\gamma^j=\sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\infty}\eta_{ij}n^i\gamma^j , \tag{2.6}$$

$$(A^k)^h=\sum_{j=0}^{\infty}(A_j^k)^h\gamma^j=\sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\infty}(A_{ij}^k)^h n^i\gamma^j; \quad (B^k)^h=\sum_{j=0}^{\infty}(B_j^k)^h\gamma^j=\sum_{\substack{i=0\\j=0}}(B_{ij}^k)^h n^i\gamma^j, \tag{2.7}$$

$q^3 = n$.

Здесь $h = 1,2,3$ – номер компоненты соответствующего вектора.

Краевое условие отсутствия напряжений на Σ приводит к равенствам (с учетом (2.4)):

$$\Phi_1^{\ell} v(-p^{2/3}\gamma) + ip^{-1/3}\Phi_2^{\ell} v'(-p^{2/3}\gamma) = 0 ; \qquad \ell = 0,1,2 \ldots \quad . \tag{2.8}$$

Здесь $\Phi_1^{\ell} = a_{ijkh} n_j \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial x^h}(B^{\ell+1})^k + \frac{\partial \xi}{\partial x^h}(A^{\ell+1})^k\right) + a_{ijkh} n_j \frac{\partial (A^{\ell})^k}{\partial x^h}$,

$$\Phi_2^{\ell} = a_{ijkh} n_j \left(\frac{\partial \eta}{\partial x^h}(A^{\ell+1})^k + \frac{\partial \xi}{\partial x^h}(B^{\ell+1})^k\right) + a_{ijkh} n_j \frac{\partial (B^{\ell})^k}{\partial x^h} ,$$

где k – номер компоненты соответствующего вектора ($k = 1,2,3$) .

3. Уравнение эйконала.

Уравнения (2.5) при $j = -2$ в предположении $|\vec{A}_0| + |\vec{B}_0| > 0$, после некоторых преобразований приводят к уравнениям эйконала:

$$\left(\frac{\partial \theta^{\pm}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{\rho} H^2\left(x^i, \frac{\partial \theta^{\pm}}{\partial x^i}\right) = 0 , \qquad \theta^{\pm} = \xi \pm \frac{2}{3}\eta^{3/2} , \tag{3.1}$$

где H^2 – одно из собственных чисел положительно определенной матрицы $a_{ijkh} \frac{\partial \theta^{\pm}}{\partial x^j} \frac{\partial \theta^{\pm}}{\partial x^h}$, соответствующее скорости V_i вдоль Σ .

Переходя в (3.1) к координатам q^1, q^2, q^3 и приравнивая нулю четную и нечетную части по η , придем к соотношениям:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{\rho} H^2(q^h, p_k) + \eta g^{ij}(q^h, p_k)\frac{\partial \eta}{\partial q^i}\frac{\partial \eta}{\partial q^j} + 0(\eta^2) , \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{H^2}{\rho}\right)\frac{\partial \eta}{\partial q^j} + 0(\eta) . \tag{3.3}$$

Здесь $p_j = \frac{\partial \xi}{\partial q^j}$; $g^{ij} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial \frac{1}{\rho} H^2}{\partial p_i\, \partial p_j}\right|_{q^3=0}$; $i,j = 1,2,3$.

С учетом того, что $\eta\big|_{q^3=0} = \gamma$, $\left.\frac{\partial \eta}{\partial t}\right|_{q^3=0} = \left.\frac{\partial \eta}{\partial q^j}\right|_{q^3=0} = 0$, $j \neq 3$ равенство (3.3) приводит к соотношению:

$$-\left.\frac{\partial\left(\frac{1}{2\rho}H^2\right)}{\partial p_3}\right|_{q^3=0,\,\gamma=0} = 0 \tag{3.4}$$

означающему, что скорость волны направлена вдоль Σ . Предполагая, что $\frac{\partial^2}{\partial p_3^2}\left(\frac{1}{2\rho} H^2\right)\Big|_{q^3=0,\,\gamma=0} \neq 0$, можно найти (по крайней мере локально) $p_3 = \partial\xi / \partial q^3$, как функцию q^j, p_i ; $i, j = 1, 2$. Полагая в (3.2) $q^3 = 0$ и подставляя значение p_3, получим поверхностное уравнение эйконала

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial t} = H^2_{\Sigma}(q^i, p_j), \quad i, j = 1, 2 . \tag{3.5}$$

Дифференцируя обе части (3.2) по q^3 и полагая $q^3 = 0$, можно получить

$$\frac{\partial \eta}{\partial q^3}\Big|_{q^3=0} = \sqrt[3]{\frac{-2p_0}{R(q^i, \dot{q}^i)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g^{33}(q^i, p_j)}} \quad . \tag{3.6}$$

Здесь $p_0 = \frac{\partial \xi_0}{\partial t}\Big|_{q^3=0}$; $(R(q, \dot{q}))^{-1}$ – изотропная нормальная кривизна Σ , которую мы считаем положительной ; $i = 1, 2$, $j = 1, 2$. Решая уравнение эйконала (3.5) мы далее шаг за шагом сможем последовательно определить все члены разложения $\xi\big|_{\gamma=0}$ по степеням q^3, далее, вспомнив, что $\eta\big|_{q^3=0} = \gamma$, можно найти все члены разложения (2.6).

4. Граничные условия и определение $\vec{A}^\circ, \vec{B}^\circ$.

Краевое условие (2.8) в силу наличия множителя $\rho^{-1/3}$ из второго слагаемого преобразуется в систему :

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1^\ell\, v(-p^{2/3}\gamma) &= 0 \\ \Phi_2^\ell\, v'(-p^{2/3}\gamma) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad . \tag{4.I}$$

Если предположить, что $\Phi_1^0 = \Phi_2^0 = 0$, то получившиеся соотношения находятся в противоречии с положительной определенностью тензора $a_{ijkh}(\vec{x})$. Следовательно, $-\gamma p^{2/3}$ является корнем либо v , либо v' . Предположения $v'(-p^{2/3}\gamma) = 0$; $\Phi_1^\ell = 0$ или $v(-p^{2/3}\gamma) = 0$; $\Phi_2^\ell = 0$ приводят к невозможности определения $\vec{A}^\circ_{00}$ и $\vec{B}^\circ_{00}$. Выходом из создавшейся ситуации является добавление к исследуемой волне быстро затухающих с глубиной волн, имеющих комплексные эйконалы. Будем искать эти волны в виде

$$\vec{U}_{1,2} = e^{ip\theta_{1,2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\vec{u}^{\,j}_{1,2}}{(ip)^j}, \qquad \frac{\partial}{\partial q^3}(\mathrm{Im}(\theta_{1,2})) > 0 , \text{ при } q^3 = 0 . \tag{4.2}$$

Подстановка (4.2) в (2.1) приводит к уравнениям

$$\vec{u}^{\,j}_{1,2} = \varphi_{1,2}\, \varkappa_{1,2} + \vec{u}^{\,jo}_{1,2} \qquad \vec{u}^{\,oo}_{1,2} \equiv 0 \tag{4.3}$$

$$N(\theta_{1,2})\,\vec{u}^{\,j+2}_{1,2} + M(\theta, \vec{u}^{\,j+1}_{1,2}) + L(\vec{u}^{\,j}_{1,2}) = 0$$

$$\vec{u}^{\,-2}_{1,2} \equiv \vec{u}^{\,-1}_{1,2} = 0 \qquad j = -2, -1, 0, 1, 2, \dots \; .$$

Положим $j = -2$ и запишем (4.3) в координатах q^1, q^2, q^3

$$N(\theta_1)\Big|_{\substack{\gamma=0\\ q^3=0}} \vec{\varkappa}_1 = 0 \quad ,$$

$$N(\theta_2)\Big|_{\substack{\gamma=0\\ q^3=0}} \vec{\varkappa}_2 = 0 \quad . \tag{4.4}$$

Из соотношений $\det\left(\rho \frac{\partial \theta_s}{\partial t} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} \delta_{ik} - a_{ijkh} \frac{\partial \theta_s}{\partial x^h} \frac{\partial \theta_s}{\partial x^k}\right) = 0, \; s = 1, 2$

получаем уравнения эйконала, решив которые найдем $\theta_{1,2}$, а затем и $\vec{\varkappa}_{1,2}$. Следовательно, $\vec{u}^{\,o}_{1,2}\Big|_{\substack{\gamma=0\\ q^3=0}} = \vec{\varkappa}_{1,2}\, \chi_{1,2}$, где $\chi_{1,2}$ – скалярный множитель.

Из уравнений (2.5) при $j = -2$ получаем:

$$\vec{A}^{\,o}_{00} = \varphi_0 \vec{\xi}$$

$$\vec{B}^{\,o}_{00} = \psi_0 \vec{\xi} + \varphi_0 \vec{\sigma} \; , \tag{4.5}$$

где $N(\xi)\Big|_{\substack{\gamma=0\\ q^3=0}} \vec{\xi} = 0$ и $N(\xi)\Big|_{\substack{\gamma=0\\ q^3=0}} \vec{\sigma} = -2N(\xi, \eta)\Big|_{\substack{\gamma=0\\ q^3=0}} \vec{\xi}$.

Добавим к вектору смещения (2.2) разложения (4.2), умноженные на $ip^{-1/3}$. Подставляя результат в краевые условия и полагая $v(-p^{2/3}\gamma) = 0$, мы получим три линейных соотношения, связывающих на Σ четыре величины χ_1, χ_2, ψ_0 и φ_0. Эти соотношения мы будем рассматривать как систему трех линейных алгебраических уравнений для нахождения χ_1, χ_2, ψ_0 со свободными членами, пропорциональными φ_0. Предположим, что определитель этой системы отличен от нуля. Тогда χ_1, χ_2, ψ_0 пропорциональны φ_0 с известными коэффициентами пропорциональности:

$$\chi_{1,2} = f_{1,2}\, \varphi_0 \; , \quad \psi_0 = f_3\, \varphi_0$$

Из условия разрешимости относительно $\vec{A}^{\,1}_{10}$ первого из уравнений (2.5) при $j = -1$ можно получить уравнение переноса

$$\frac{d\varphi_0}{dt} + \varphi_0 \Lambda = 0 \; . \tag{4.6}$$

Здесь Λ – известная функция на Σ, а $\frac{d\varphi_0}{\partial t}$ – производная по времени вдоль пространственно-временного луча, соответствующего уравнению эйконала (3.5).

Знание φ_0 на Σ позволяет определить на Σ ψ_0, χ_1, χ_2 и, следовательно, волновое поле с точностью до главных членов. Нахождение коэффициентов разложений при высших степенях $1/p$ получается как результат рекуррентного процесса, описание которого мы здесь опускаем.

Литература

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., 1972, с.456.
2. Кравцов Ю.А. Об одной модификации метода геометрической оптики. - Изв.ВУЗ'ов, Радиофизика, М., 1964, т.7, № 4, с.664-673.
3. Бабич В.М., О пространственно-временном лучевом методе в теории упругих волн. - Изв.АН СССР. Физика Земли, М., 1979, № 2, с.3-13.
4. Номофилов В.Е. Квазистационарные волны Рэлея на поверхности неоднородного анизотропного упругого тела. - Докл. АН СССР, М., 1979, т.247, № 5, с.1107-1111.
5. Бабич В.М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае неоднородной анизотропной среды. - Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. М., 1961, № 5, с. 36-46.
6. Бабич В.М., Янсон З.А. О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого тела произвольной формы. - Изв. АН СССР. Физика Земли. М., 1985, № 5, с.17-27.
7. Кирпичникова Н.Я. Пространственно-временная каустика упругого коротковолнового поля. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн.12. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1981, т.117, с.147-161.
8. Кирпичникова Н.Я. Равномерная асимптотика собственных функций типа шепчущей галереи. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн.10. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1979, т.89, с.261-269.