Л. В. Розовский, Большие уклонения суммы независимых случайных величин из области притяжения устойчивого закона,

Зап. научн. сем. ПОМИ, 1996, том 228, 262–283

Л. В. Розовский

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ИЗ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО ЗАКОНА.

1. Результаты

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $\{X_i\}$ с общей функцией распределения $V(x)$, положив $S_n = X_1 + \ldots + X_n, n \geqslant 1$.

Предположим, что при $n \to \infty$ распределение S_n/B_n, где $\{B_n\}$ — некоторая положительная последовательность, слабо сходится к устойчивому распределению F_α, $1 < \alpha < 2$, или, другими словами, потребуем, чтобы $\mathbf{E}X_1 = 0$ и

$$1-V(x) = \big(c_1+o(1)\big)\,\frac{l(x)}{x^\alpha}, \quad V(-x) = \big(c_2+o(1)\big)\,\frac{l(x)}{x^\alpha}, \quad x \to \infty, \tag{1}$$

где $c_i \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$, функция $l(x)$ медленно меняется при $x \to \infty$.

Нас интересуют условия, при которых

$$\mathbf{P}\left\{S_n \geqslant x\right\} = \pi_n(x)\big(1+o(1)\big), \qquad B_n \leqslant x \leqslant \Lambda_n, \qquad n \to \infty, \tag{2}$$

где π_n — последовательность функций некоторого "естественного" вида, а Λ_n удовлетворяет ограничениям

$$\Lambda_n/B_n \uparrow \infty, \quad \Lambda_n/n \downarrow 0 \quad \text{при } n \uparrow \infty. \tag{3}$$

Следует сказать, что правая часть соотношения (2) и степень его изученности сильно зависит от того, будет или нет постоянная c_1 в условии (1) равна нулю. Так, если $c_1 > 0$, то (см., например, [1]–[4]) $\mathbf{P}\left\{S_n > x\right\} \sim n\left(1 - V(x)\right)$, $n \to \infty$, равномерно по x, таким что $x/B_n \to \infty$.

В предположении

$$\mathbf{E}\,e^{hX_1} < \infty \quad (\exists\, h > 0) \tag{4}$$

Работа над статьей была поддержана грантом РФФИ № 95-01-01260 и Международным научным Фондом, грант JFD100.

асимптотика $\pi_n(x)$ в равенстве (2) также может быть вычислена (см. [5] и следствие 1 ниже).

Настоящая работа посвящена слабо исследованному случаю (см. [10], [4], [11]), когда постоянная c_1 из условия (1) равна нулю, но условие (4) не выполняется. Она в известном смысле является продолжением статьи автора [6], в которой рассматривался случай $\alpha = 2$ и к которой в дальнейшем мы будем неоднократно обращаться.

Введем некоторые условия и обозначения. Пусть по аналогии с (1)

$$V(-x) \sim \frac{l(x)}{x^\alpha}, \quad 1 - V(x) = o(1)\big(V(-x)\big) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{5}$$

Без потери общности предположим (см. [7], теорема B.3 при $\beta = -1$), что

$$\mathbf{E}\, X_1 = 0, \qquad n\, V(-B_n) \sim c_\alpha = \frac{\alpha - 1}{\alpha\, \Gamma(2-\alpha)} \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{6}$$

и логарифм характеристической функции, отвечающей распределению F_α, равен (напоминаем, что $\alpha > 1$)

$$\alpha^{-1}\, |t|^\alpha \left(\cos \pi\alpha/2 + i\, \frac{t}{|t|}\, \sin \pi\alpha/2\right). \tag{7}$$

Отметим ([7], стр.116, 121, 122), что при $z \to \infty$

$$\begin{aligned} 1 - F_\alpha(z) &\sim \big(2\pi(\alpha-1) z^{1/r}\big)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-r z^{1/r}\}, \\ F_\alpha(-z) &\sim \tfrac{1}{\pi} \sum_{k \geqslant 1} \tfrac{\Gamma(\alpha k)}{\alpha^k k!} \sin{(2-\alpha)\pi k\, z^{-k\alpha}}, \end{aligned} \tag{7'}$$

где $r = \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Пусть дифференцируемая функция $h_*(z)$ при $z \to +0$ удовлетворяет условиям $h_*'(z) \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{h_*(z)}{z}$ и (см. (5))

$$\frac{1}{h_*(z)}\, V\Big(-\frac{1}{h_*(z)}\Big) \sim c_\alpha z. \tag{8}$$

Несложно проверить, что функция $h_*(z)/z^{\frac{1}{\alpha-1}}$ медленно меняется при $z \to +0$; кроме того, $h_*(\frac{B_n}{n}) \sim \frac{1}{B_n}$, $n \to \infty$.

Введем функции $s(a,c)$, $a, c > 0$, и $\tau(z)$, положив

$$s(a,c) = \inf_{h>0} \left(-ah + \ln \int_{-\infty}^{c} e^{hy}\, dV(y)\right), \quad \tau(z) = \big(1 - F_\alpha(z^r)\big)\, e^{rz}. \tag{9}$$

Заметим ((7′); [7], теорема 2.5.3 при $\xi = rz$), что

$$\tau(z) \sim \big(2\pi(\alpha-1)z\big)^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau'(z) \sim -\tfrac{1}{2z}\tau(z) \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{10}$$

Положим $\xi_n = \big(\Lambda_n\, h_*(\frac{\Lambda_n}{n})\big)^{-1} \ln \frac{V(-\Lambda_n)}{1-V(\Lambda_n)}$ и введем условие

$$(D_\kappa) \qquad \liminf_{z\to\infty} \xi_n \geqslant r\,\kappa.$$

Условие D_κ при $\kappa > 0$ означает, что при любом $\bar r < r$ и всех достаточно больших n

$$1 - V(\Lambda_n) \leqslant V(-\Lambda_n)\, e^{-\bar r \kappa \Lambda_n h_*(\frac{\Lambda_n}{n})}. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (3). *Соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{ S_n \geqslant x \right\} = \tau\big(xh_*(\frac{x}{n})\big)e^{Q_n(x)}\big(1+o(1)\big), \quad n\to\infty, \tag{12}$$

где функция $Q_n(x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{dQ_n(x)}{dx} \asymp -h_*(\frac{x}{n}), \quad n\to\infty, \tag{13}$$

имеет место равномерно по $x \in [B_n, \gamma\Lambda_n]$ при некотором (любом) положительном γ тогда и только тогда, когда при некотором (любом) положительном κ выполняется условие D_κ и

$$Q_n(x) = n\, s(\frac{x}{n}, B_n) + o(1), \quad B_n \leqslant x \leqslant \bar\gamma\Lambda_n, \quad n\to\infty, \tag{14}$$

при некотором (любом) положительном $\bar\gamma$.

Теорема с аналогичной формулировкой при $\alpha = 2$ была доказана в [6]. Там же было приведено обоснование выбора асимптотики для $\mathbf{P}\left\{ S_n \geqslant x \right\}$.

Следствие 1. *Соотношение* (12), *где функция $Q_n(x)$ удовлетворяет условию* (13), *имеет место равномерно по x, $B_n \leqslant x = o(n)$, тогда и только тогда, когда выполняется условие* (4) *и*

$$Q_n(x) = ns(\frac{x}{n}, \infty) + o(1), \quad B_n \leqslant x = o(n), \quad n\to\infty. \tag{15}$$

Теорема 1 позволяет составить качественное представление о соотношении (2) и при некоторых дополнительных предположениях может быть уточнена.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (3) *и, помимо этого,*

$$\Lambda_n/B_n^{1+\delta} \text{ не возрастает при всех } n > n_0 \text{ и некотором } 0 < \delta \leqslant \alpha - 1. \tag{16}$$

Положим

$$\omega_1(\delta) = \max_{0 \leqslant u \leqslant 1} \left(1 - (1-u)^{1/r}\right) u^{-\frac{\delta}{(1+\delta)r}}, \quad \omega_2(\delta) = \omega_1^{-(1+\delta)r}(\delta). \tag{17}$$

Для того, чтобы равномерно по $x \in [B_n, \Lambda_n]$ *имело место* (12), *где*

$$\frac{dQ_n(x)}{dx} \sim -h_*(\frac{x}{n}), \quad n \to \infty, \tag{18}$$

необходимо, чтобы выполнялись условия D_κ $(\kappa = 1)$ *и* (14)$(\forall \bar\gamma < \omega_2(\delta))$ *и достаточно, чтобы выполнялись условия* D_κ $(\exists \kappa > \omega_1(\delta))$ *и* (14)$(\bar\gamma = 1)$.

Замечание. Функция $\omega_1(\delta)$ монотонно возрастает от 1 до $\frac{\alpha}{\alpha-1}$, а функция $\omega_2(\delta)$ монотонно убывает от 1 до $(\frac{\alpha-1}{\alpha})^{\alpha-1}$ при $\delta \uparrow_0^{\alpha-1}$. Таким образом, расхождение между необходимыми и достаточными условиями в теореме 2 уменьшается вместе с шириной зоны больших уклонений. В частности, если условие (16) выполняется при *любом* $\delta > 0$, то одни и те же условия необходимы для выполнения соотношения (12) при $x \in [B_n, (1+\varepsilon)\Lambda_n]$ и достаточны для выполнения (12) при $x \in [B_n, (1-\varepsilon)\Lambda_n]$ и любом $\varepsilon > 0$.

Отметим еще, что функция $\omega_1(\delta)$ в отдельных случаях может быть вычислена явно. При $\alpha = \frac{3}{2}$, например, $\omega_1(\delta) = \left(1 - (1-u)^3\right) u^{-\frac{3\delta}{1+\delta}}$, где $u = \left(2 - \delta - \sqrt{\delta(\delta+4)}\right)/2$.

Приведем один вариант теоремы 2. Пусть (см. (9))

$$\bar\xi_n = (\frac{B_n}{\Lambda_n})^{1/r} \ln \frac{V(-\Lambda_n)}{1 - V(\Lambda_n)}$$

и условие $\bar D_\kappa$ получено из D_κ заменой ξ на $\bar\xi$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия* (3), (16). *Для того, чтобы равномерно по* $x \in [B_n, \Lambda_n]$ *имело место соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{S_n \geqslant x\right\} = \tau\left((\frac{x}{B_n})^{1/r}\right) e^{Q_n(x)}\left(1 + o(1)\right), \quad n \to \infty, \tag{19}$$

где

$$\frac{dQ_n(x)}{dx} \sim -(\frac{x}{B_n{}^\alpha})^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad n \to \infty, \tag{20}$$

необходимо, чтобы выполнялись условия $\bar{D}_\kappa$ $(\kappa = 1)$, (14)$(\forall\bar{\gamma} < \omega_2(\delta))$ *и* (*см.* (5))

$$l(B_n) \sim l\big(B_n\,(\frac{x}{B_n})^{-\frac{1}{\alpha-1}}\big), \quad n \to \infty, \text{ равномерно по } x \in [B_n, \Lambda_n], \tag{21}$$

и достаточно, чтобы выполнялись условия $\bar{D}_\kappa\,(\exists\kappa > \omega_1(\delta))$, (14) $(\bar{\gamma} = 1)$ *и* (21).

Заметим, что при $Q_n(x) = r\,(\frac{x}{B_n})^{1/r}$ соотношение (19) тождественно

$$\mathbf{P}\left\{S_n \geqslant x\right\} = \big(1 - F_\alpha(\frac{x}{B_n})\big)\big(1 + o(1)\big), \qquad n \to \infty.$$

Следствие 2. *Соотношение* (19), *где функция* $Q_n(x)$ *удовлетворяет условию* (20), *имеет место равномерно по* x, $B_n \leqslant x = o(n)$, *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (4), (15) *и* $l(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} l_0$ $(\exists l_0 \in (0,\infty))$.

Безусловный интерес представляет нахождение совпадающих необходимых и достаточных условий для выполнения соотношений (12) или (19). При $\alpha = 2$ близкую задачу для случая степенных зон впервые решил Л. В. Осипов [8] (подробнее см. [6]). Прямое обобщение теорем 2 или 3 по-видимому невозможно, поскольку при доказательстве необходимости без дополнительных априорных предположений не удается получить условие (14) при $\gamma = 1$ (проблемы не было бы, если бы, скажем, (14) $(\exists\bar{\gamma} > 0) \Rightarrow$ (14) $(\bar{\gamma} = 1)$, что, кстати, имеет место при $\alpha = 2$ для определенного класса функций $Q_n(x)$ ([6], замечание 1)). Поэтому ниже при изучении соотношения (2) ограничимся, учитывая уже полученные результаты, функциями

$$\pi_n(x) = r\big(xh_*(\frac{x}{n})\big)e^{s(\frac{x}{n},B_n)}, \quad B_n \leqslant x \leqslant \Lambda_n. \tag{22}$$

Теорема 4. *Пусть функция* $\Lambda(z)$ *при* $z \uparrow \infty$ *удовлетворяет условиям*

$$\Lambda(z)/z \uparrow \infty, \quad \Lambda(z)/z^{1+\delta} \downarrow (\exists 0 < \delta < \alpha - 1); \tag{23}$$

$\Lambda_n = \Lambda(B_n)$, $\pi_n(x)$ *определено в* (22). *Если при некотором* $\kappa > 0$ *выполняется условие* D_κ, *то соотношение* (2) *равносильно условию*

$$\frac{n}{\pi_n(\Lambda_n)}\bigg(\int\limits_{\Lambda_n-B_n}^{\infty} dV(y) + \int\limits_{B_n}^{\Lambda_n-B_n} \pi_n(\Lambda_n - y)dV(y)\bigg) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Замечание 1. Пусть γ_* корень уравнения $1-(1-u)^{1/r} = u^{\frac{\delta}{(1+\delta)r}}$, $0 \leqslant u < 1$; $0 < \gamma < \gamma_*$. Тогда в условии (24) нижний предел B_n во втором интеграле можно заменить на $\gamma\Lambda_n$; кроме того, соотношение (24) равносильно условию

$$n\sqrt{\Lambda_n h_*(\tfrac{\Lambda_n}{n})} \int\limits_{\gamma\Lambda_n}^{\Lambda_n - B_n} \bigl(1-V(y)\bigr) e^{n\left(s(\frac{\Lambda_n - y}{n}, B_n) - s(\frac{\Lambda_n}{n}, B_n)\right)} \left(\frac{h_*(\frac{\Lambda_n - y}{n})}{\Lambda_n - y}\right)^{\frac{1}{2}} dy$$
$$= o(1), \quad n \to \infty. \qquad (24')$$

Заметим, что утверждение, аналогичное теореме 4, может быть доказано при самых общих предположениях относительно Λ_n, однако в этом случае в (22) вместо функции $s(\frac{x}{n}, B_n)$ следует так же, как в ([6], теорема 4) использовать $s\bigl(\frac{x}{n}, c_n(x)\bigr)$, где последовательность положительных невозрастающих функций $\{c_n(x)\}$ удовлетворяет некоторым специфическим условиям.

Далее приведем некоторые следствия теорем 2–4. Для этой цели нам понадобится более детально изучить соотношения (14) и (24).

Замечание 2. Пусть выполняются условия (5)–(7) и (23). Предположим также, что при $z \to \infty$

$$\Lambda(z) = o(z^{1+\delta_o}), \quad \delta_o = (\alpha-1)(3-\alpha)/3,$$

$$1 - V(z) = O\bigl(z^{-\alpha} e^{-\varepsilon (z/\Lambda^{-1}(z))^{\frac{1}{r}}}\bigr) \quad (\exists \varepsilon > 0), \qquad (25)$$

$$|\Delta(-z)| = o(\frac{z}{\psi^{-1}(z)})^{\alpha}, \qquad (26)$$

$$z^{-3} \int\limits_{|y|<z} y^2 |\Delta(y)|\, dy = o(\frac{1}{\psi^{-1}(z)})^{\alpha}, \qquad (27)$$

$$z^{-2} \left| \int\limits_{|y|<z} y^2\, d\Delta(y) \right| = o(\frac{1}{\psi^{-1}(z)})^{\alpha}, \qquad (28)$$

где $\Delta(\cdot) = V(\cdot) - F_\alpha(\cdot)$, $\Lambda^{-1}(z)$, $\psi^{-1}(z)$ — функции, обратные к $\Lambda(z)$ и $\bigl(z^\alpha/\Lambda(z)\bigr)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, соответственно.

Тогда

$$n\, s(\frac{x}{n}, n^{1/\alpha}) = -\tfrac{\alpha-1}{\alpha}(x^\alpha/n)^{\frac{1}{\alpha-1}} + o(1), \ n^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant x = O\bigl(\Lambda(n^{\frac{1}{\alpha}})\bigr), \ n \to \infty. \qquad (29)$$

Отметим, что условия (25)–(28) близки к оптимальным. В частности, если имеют место условия (25)–(27), то (28) *необходимо* для выполнения (29).

Заметим еще, что условия (26), (27) с учетом (25) равносильны условиям

$$\tilde{\Delta}(-z) = o\Big(\frac{z}{\psi^{-1}(z)}\Big)^{\alpha}, \tag{26'}$$

$$z^{-3}\int_0^z y^3\,dV(y) = o\Big(\frac{1}{\psi^{-1}(z)}\Big)^{\alpha}, \tag{27a}$$

$$z^{-3}\int_1^z y^2\tilde{\Delta}(-y)\,dy = o\Big(\frac{1}{\psi^{-1}(z)}\Big)^{\alpha}, \tag{27b}$$

где $\tilde{\Delta}(-y) = |V(-y) - c_{\alpha 1}y^{-\alpha} - c_{\alpha 2}y^{-2\alpha}|$, а $c_{\alpha 1} = c_{\alpha}$, $c_{\alpha 2} = -\frac{\Gamma(2\alpha)\sin 2\pi\alpha}{2\pi\alpha^2}$ (см. (6), (7$'$)), причем если $\Lambda(z) = o(z^{\frac{\alpha+1}{2}})$, $z \to \infty$, то коэффициент $c_{\alpha 2}$ можно заменить нулем.

Кроме того, если условие (23) выполняется при $\delta < \delta_0$, то равенство (27) и равносильные ему условия (27a), (27b) являются следствием (26$'$) и (25).

Из теоремы 2 и замечания 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{E}\,X_1 = 0$, $B_n = n^{1/\alpha}$ *и*

$$\Lambda(z)/z \uparrow \infty, \quad \Lambda(z)/z^{1+\delta} \downarrow 0 \text{ при } z \uparrow \infty \ (\exists 0 < \delta \leqslant \delta_0).$$

Предположим также, что при $z \to \infty$ *имеют место соотношения* (26$'$), (28), (27a), (27b) *и* (*см.* (17))

$$1 - V(z) = O\big(z^{-\alpha}\, e^{-a\,(z/\Lambda^{-1}(z))^{\frac{1}{r}}}\big) \quad (\exists a > r\omega_1(\delta)).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} = \big(1 - F_{\alpha}(\frac{x}{B_n})\big)\big(1 + o(1)\big), \quad B_n \leqslant x \leqslant \Lambda(B_n),\ n \to \infty. \tag{30}$$

Напоминаем, что $r < r\omega_1(\delta) \leqslant r\omega_1(\delta_0) < 1$ и что при $\delta < \delta_0$ предположения (27a), (27b) можно отбросить.

Следствие 3. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$; $\delta \in (\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{2}, \delta_0]$, $\gamma = \frac{\delta}{r(1+\delta)}$, $\gamma_1 =$

$\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-1-\delta}$. *Если*

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon y^\gamma} dV(y) < \infty \quad (\exists \varepsilon > 0), \qquad \int_{-\infty}^\infty y^2 d\big(F_\alpha - V(y)\big) = 0,$$

$$\int_1^\infty y^{\gamma_1 - 1} \tilde{\Delta}(-y) dy < \infty, \qquad z^{\gamma_1} \tilde{\Delta}(-z) = o(1), \quad z \to \infty,$$

то соотношение (30) ($B_n = n^{1/\alpha}$) *выполняется при* $\Lambda(B_n) = o(B_n^{1+\delta})$.

Если $\delta = \delta_0$, то $\gamma = \frac{3-\alpha}{4-\alpha}$, а $\gamma_1 = 3$.

Отметим, что условия, входящие в теорему 5 (и следствие 3), носят неулучшаемый характер. Так, например, постоянную γ нельзя уменьшить, а δ_0 — увеличить.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (23) ($\delta < \delta_0$) *и* (26$'$); $B_n = n^{1/\alpha}$. *Для того, чтобы имело место соотношение* (30) *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и при* $z \to \infty$ *выполнялись условия* (28) *и*

$$\int_{\gamma_* \Lambda(z)}^\infty \big(1 - F_\alpha(\frac{\Lambda(z) - u}{z})\big) dV(y) = \big(1 - F_\alpha(\frac{\Lambda(z)}{z})\big) o(z^{-\alpha}). \tag{31}$$

Замечание 3. Предположим, что функция $\Lambda(z)$ при $z \to \infty$ удовлетворяет условию

$$\Lambda(z)/z \uparrow \infty, \quad z\big((\frac{\Lambda(z)}{z})^{\frac{1}{\alpha-1}}\big)' = O(1). \tag{32}$$

Тогда условия (31) и

$$1 - V(z) = o\big(z^{-\alpha} \lambda^{\alpha - \frac{1}{2r}}(z)\, e^{-r\lambda^{1/r}(z)}\big), \quad z \to \infty, \tag{33}$$

где $\lambda(z) = z/\Lambda^{-1}(z)$, равносильны между собой.

Отметим, что при условии (32) $\lambda(z) \sim \Lambda(z)/z$ и (см. (27), (28)) $\psi^{-1}(z) \sim z/\big(\Lambda(z)/z\big)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ при $z \to \infty$. Если же при $z \to \infty$ выполняется условие

$$\Lambda(z)/z \uparrow \infty, \quad z\big((\frac{\Lambda(z)}{z})^{\frac{1}{\alpha-1}}\big)' = O\Big(\frac{1}{\frac{\Lambda(z)}{z} \ln \frac{\Lambda(z)}{z}}\Big), \tag{34}$$

то $\lambda^{\frac{1}{r}}(z) = \big(\Lambda(z)/z\big)^{1/r} + O(1)$, $z \to \infty$.

Из вышесказанного вытекает следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* (32) *и*

$$V(-z) = c_\alpha z^{-\alpha}\Big(1 + o\big(\frac{\Lambda(z)}{z}\big)^{-\frac{1}{r}}\Big), \quad z \to \infty. \tag{35}$$

Соотношение (30), $B_n = n^{1/\alpha}$, *имеет место тогда и только тогда, когда* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и при* $z \to \infty$

$$z^{-2}\Big|\int\limits_{|y|<z} y^2\, d(V(y) - F_\alpha(y))\Big| = o\Big(z^{-\alpha}\big(\frac{z}{\Lambda(z)}\big)^{\frac{1}{r}}\Big), \tag{36}$$

$$1 - V(z) = o\Big(z^{-\alpha}\big(\frac{\Lambda(z)}{z}\big)^{\alpha - \frac{1}{2r}} e^{-r\lambda^{\frac{1}{r}}(z)}\Big). \tag{37}$$

При $\Lambda(z) = c\, z \ln^\gamma z$, $0 < \gamma < 2r$, $c > 0$, *в частности,* (37) *равносильно условию*

$$1 - V(z) = o\big(z^{-\alpha}(\ln z)^{-\gamma(\alpha - \frac{1}{2r})} e^{-rQ(z)}\big), \quad z \to \infty,$$

где $Q(z) = c^{\frac{1}{r}}(1 - \frac{\gamma}{r}\frac{\ln c + \gamma \ln\ln z}{\ln z}) \ln^{\gamma/r} z$.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия* (34), (35); $\mathbf{E}X_1 = 0$. *Тогда соотношение* (30), $B_n = n^{1/\alpha}$, *равносильно условиям* (36) *и*

$$1 - V(z) = o\Big(z^{-\alpha}\big(\frac{\Lambda(z)}{z}\big)^{\alpha - \frac{1}{2r}} e^{-r(\Lambda(z)/z)^{\frac{1}{r}}}\Big), \quad z \to \infty.$$

2. Доказательства

Мы будем придерживаться схемы доказательств из [6], где аналогичная задача решалась в случае $\alpha = 2$.

Лемма 1. *Положим* $V_n(x, c) = \mathbf{P}\{S_n \geqslant x, \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i \leqslant c\}$. *Тогда* (*см.* (8), (9))

$$V_n(x, c) = \big(1 + o(1)\big)\tau\big(xh_*(\frac{x}{n})\big) e^{s(\frac{x}{n}, c)}, \quad n \to \infty, \tag{38}$$

равномерно по x *и* c *таким, что*

$$\varepsilon B_n \leqslant x < n/\rho_n, \tag{39}$$

$$c > \varepsilon/h_*, \qquad \int\limits_{1/h_*}^{c} e^{(1+\varepsilon)yh_*}\, dV(y) \leqslant \frac{x}{\varepsilon n} h_*, \tag{40}$$

где $0 < \varepsilon$ — некоторая постоянная, положительная последовательность ρ_n сколь угодно медленно стремится к бесконечности, $h_* = h_*(\frac{x}{n})$.

Доказательство леммы 1. Пусть $L(h) = \int\limits_{-\infty}^{c} e^{hy}\,dV(y), h > 0$. Имеем

$$L(h) = \int\limits_{1/h}^{c} e^{hy}\,dV(y) + \int\limits_{-\infty}^{0} (e^{hy} - 1 - hy)\,dV(y) + \int\limits_{0}^{1/h} (e^{hy} - 1 - hy)\,dV(y) + \int\limits_{-\infty}^{1/h} (1 + hy)\,dV(y) = L_1 + \cdots + L_4.$$

Используя условия (5), (6) и свойства медленно меняющихся функций, получим следующие оценки:

$$L_2 \sim c_0 V(-1/h),\ L_3 = o\big(V(-1/h)\big),\ L_4 = 1 + o\big(V(-1/h)\big)\ (h \to +0),$$

где $c_0 = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1}$. Кроме того, с помощью условий (5), (40), рассуждая так же, как в ([6], лемма 1), покажем, что $L_1 = o\big(V(-1/h)\big)$, $n \to \infty$, равномерно по $h \in I_n$ (и x удовлетворяющим (39)), где $I_n = (\delta\, h_*, (1+\delta)h_*)$, постоянная $\delta \in (0, \varepsilon)$.

Таким образом, при условиях (39), (40)

$$L(h) - 1 \sim c_0\, V(-1/h), \quad h \in I_n,\ n \to \infty. \tag{41}$$

Аналогично показывается, что равномерно по $h \in I_n$ при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} L'(h) &\sim \alpha c_0\, h^{-1} V(-1/h), \\ L^{(k)}(h) &\sim (-1)^k \alpha \Gamma(k-\alpha) h^{-k} V(-1/h),\ k \geqslant 2. \end{aligned} \tag{42}$$

Положим $m(h) = \big(\ln L(h)\big)'$, $\sigma^2(h) = m'(h)$. Из (41), (42) следует, что

$$m(h) \sim L'(h),\ \sigma^2(h) \sim L''(h), \quad h \in I_n,\ n \to \infty, \tag{43}$$

откуда (см. (8)), в частности, заключаем, что уравнение $m(h) = \frac{x}{n}$ при x из интервала (39) имеет единственный корень h. Начиная с этого места и до конца доказательства леммы 1 через h обозначаем решение уравнения

$$m(h) = \frac{x}{n}, \quad \varepsilon B_n \leqslant x < n/\rho_n. \tag{44}$$

Введем независимые случайные величины $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n$ с общей функцией распределения $\bar{V}(x) = \frac{1}{L(h)} \int_{-\infty}^{\min(x,c)} e^{hy}\, dV(y)$. Имеем ([9], гл. 8, (3.22)),

$$V_n(x) = L^n(h) e^{-hx} \int\limits_0^\infty e^{-yh\sigma(h)\sqrt{n}}\, dF_n(y), \tag{45}$$

где $F_n(y) = \mathbf{P}\{\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_n - nm(h) < yh\sigma h)\sqrt{n}\}$. Аналогично [5] (см. также [9], гл.5) получим

$$\begin{gathered} F_n(y) = \Phi(y) + \frac{M_3}{3!\sigma^3\sqrt{n}} \Phi'''(y) + \Delta_n(y), \\ |\Delta_n(y)| \leqslant C\,(\frac{M_4}{\sigma^4 n} + \frac{\sqrt{h}}{h\sigma\sqrt{n}} + \int\limits_{1/(4\frac{M_3}{\sigma^2})}^{\sqrt{h}} |f_h(u)|^n \,\frac{du}{u}), \end{gathered} \tag{46}$$

где $\Phi(y)$ — стандартная нормальная функция распределения, $\sigma = \sigma(h) = (\mathbf{D}\bar{X}_1)^{1/2}$, $M_s = \mathbf{E}\big(\bar{X}_1 - m(h)\big)^s$ $(s = 3$ или $4)$, $f_h(t) = \mathbf{E}e^{it\bar{X}_1}$, C — абсолютная постоянная.

Используя (41)–(43) покажем, что $M_s \sim L^{(s)}(h)$, $n \to \infty$, для $s = 3$ или 4 и, следовательно, при $n \to \infty$

$$\frac{M_3}{\sigma^2} \asymp \frac{1}{h}, \qquad \frac{M_3}{\sigma^3\sqrt{n}} \asymp \frac{1}{\tau}, \qquad \frac{M_4}{\sigma^4 n} \asymp \frac{1}{\tau^2}, \tag{47}$$

где $\tau = h\sigma\sqrt{n} \asymp \big(nV(-1/h)\big)^{1/2}$.

Далее оценим интеграл $\int_{\varepsilon h}^{\sqrt{h}} |f_h(u)|^n \frac{du}{u}$, обозначая через ε сколь угодно малую положительную постоянную, не всегда одну и ту же. Вначале покажем, что

$$|f_h(u) - 1| = O\big(V(-1/h)\big), \; \varepsilon h \leqslant u \leqslant \sqrt{h}, \quad n \to \infty. \tag{48}$$

Очевидно,

$$f_h(u) - 1 = \tfrac{1}{L(h)}\Big(\Big(\int\limits_{1/u}^{c} + \int\limits_{-\infty}^{-1/u}\Big) e^{hy}(e^{ihy} - 1)\, dV(y) + \int\limits_{-1/u}^{1/u} e^{hy}(e^{ihy} - 1)\, dV(y)\Big),$$

и в силу (5) и (44) при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \Big|\Big(\int\limits_{1/u}^{c} + \int\limits_{-\infty}^{-1/u}\Big) e^{hy}(e^{ihy} - 1)\, dV(y)\Big| &\leqslant 2 \int\limits_{-\infty}^{-1/u} e^{hy}\, dV(y) + 2 \int\limits_{1/u}^{c} e^{hy}\, dV(y) \\ &= O\big(V(-1/u)\big) \end{aligned}$$

равномерно по $u \in [\frac{1}{B_n}, \sqrt{h}]$,

$$
\Big|\int\limits_{|y|<1/u} e^{hy}(e^{ihy}-1)\,dV(y)\Big|
$$

$$
= \Big|\int\limits_{|y|<1/u} (e^{iuy}-1-iuy)\,dV(y) - \int\limits_{|y|\geqslant 1/u} iuy\,dV(y)
$$

$$
+ \int\limits_{|y|<1/u} (e^{hy}-1)(e^{iuy}-1)\,dV(y)\Big|
$$

$$
\leqslant 0.5u^2 \int\limits_{|y|<1/u} y^2 dV(y) + |u| \int\limits_{|y|\geqslant 1/u} |y|\,dV(y) + uhe^{h/u} \int\limits_{|y|<1/u} y^2\,dV(y)
$$

$$
= O\big(V(-1/h)\big)
$$

равномерно по $u \in [\varepsilon h, \sqrt{h}]$.

С учетом соотношения (41) из вышесказанного следует (48). Далее,

$$
Re(f_h(u)-1) = \frac{1}{L(h)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos uy - 1)e^{hy}\,dV(y)
$$

$$
\leqslant \frac{1}{L(h)} \int\limits_{|yu|<1} \frac{\cos uy - 1}{(uy)^2}(uy)^2 e^{hy}\,dV(y)
$$

$$
\leqslant \frac{\cos 1 - 1}{L(h)} e^{-h/u} u^2 \int\limits_{|y|<1/u} y^2\,dV(y).
$$

Имея в виду, что $u^2 \int_{|y|<1/u} y^2\,dV(y) \sim \frac{\alpha}{2-\alpha} V(-1/u)$, $u \to +0$, отсюда при всех достаточно больших n получим

$$
Re(f_h(u)-1) \leqslant -\varepsilon V(-1/u), \quad \varepsilon h \leqslant u \leqslant \sqrt{h}. \tag{49}
$$

С учетом (48) и (49) при всех больших n имеем

$$
|f_h(u)| = |e^{f_h(u)-1+\theta|f_h(u)-1|^2}| \leqslant e^{Re(f_h(u)-1)+|f_h(u)-1|^2} \leqslant e^{-\varepsilon V(-1/u))},
$$

$\varepsilon h \leqslant u \leqslant \sqrt{h}$, и, следовательно (см. (5) и определение τ),

$$
\int\limits_{\varepsilon h}^{\sqrt{h}} |f_h(u)|^n \frac{du}{u} \leqslant \int\limits_{\varepsilon h}^{\sqrt{h}} e^{-\varepsilon n V(-1/u)} \frac{du}{u} = O\Big(\int\limits_{0.5nV(-1/\varepsilon h)}^{\infty} e^{-\varepsilon t} \frac{dt}{t}\Big)
$$

$$
= O(1/\tau^2), \quad n \to \infty. \tag{50}
$$

Очевидно (см. (46)), что

$$\int_0^\infty e^{-\tau y}\,dF_n(y) = \int_0^\infty e^{-\tau y}\,d\Phi(y) + \int_0^\infty e^{-\tau y}\,\Phi^{(4)}(y)\,dy\,\frac{M_3}{6\sigma^3\sqrt{n}} + \int_0^\infty \bigl(\Delta_n(y) - \Delta_n(0)\bigr)\,de^{-\tau y}. \tag{51}$$

Пусть $x/B_n \to \infty$, $n \to \infty$. Тогда (см. (43), (44), (6)) $\tau \to \infty$ при $n \to \infty$ и по (47), (50) первый интеграл в правой части равенства (51) имеет асимптотику $\frac{1+O(\tau^{-1})}{\tau\sqrt{2\pi}}$, второй — $O(1/\tau^2)$, а третий — $O(1/\tau^2 + \sqrt{h}/\tau)$. Другими словами, при $\rho_n B_n \leqslant x \leqslant n/\rho_n$, где $\rho_n \to \infty$ сколь угодно медленно,

$$\int_0^\infty e^{-\tau y}\,dF_n(y) = \frac{1+o(1)}{\tau\sqrt{2\pi}}, \quad n \to \infty. \tag{52}$$

В соответствии с (8), (5), (42)–(44) и ([6], (9), (10)) при $n \to \infty$

$$h \sim h_*(\frac{x}{n}), \quad Q(x) = \ln L(h) - hx \sim -rxh_*(\frac{x}{n}), \quad B_n \leqslant x \leqslant n/\rho_n,$$

и

$$B_n h_*(\frac{x}{n}) \sim (x/B_n)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad B_n \leqslant x \leqslant \rho_n B_n. \tag{53}$$

Кроме того,

$$1 - F_\alpha(t) \sim \bigl(2\pi(\alpha-1)t^{1/r}\bigr)^{-1/2} e^{-rt^{1/r}}, \quad t \to +\infty,$$

и при $x \leqslant \rho_n B_n$ и $n \to \infty$

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \mathbf{P}\left\{S_n \geqslant x\right\} + O\bigl(n(1 - V(B_n))\bigr) \\ &= 1 - F_\alpha(x/B_n) + o(1) \sim 1 - F_\alpha(x/B_n). \end{aligned}$$

Отсюда и из (45), (52), (53) следует равенство (38).

Таким образом, доказательство леммы 1 завершено.

Начнем с доказательства теоремы 2, максимально используя при его проведении соответствующие выкладки из [6]. Без потери общности будем считать, что $\{B_n\}$ не убывает (см. (6)).

Доказательство необходимости. Так же, как в [6, (72)] из условия (18) получим

$$Q_n(x) \sim -r\,h_*(\frac{x}{n}), \quad B_n \leqslant x \leqslant \Lambda_n, \quad n \to \infty. \tag{54}$$

Необходимость условия D_κ $(\kappa = 1)$ доказывается с помощью (54), (10) и (18) аналогично [6]. Из условия D_κ и соотношения (11) при $\kappa = 1$ следует, что при любом $\bar r < r$ и всех $n > n_{\bar r}$

$$1 - V(\Lambda_n) \leqslant V(-\Lambda_n)\, e^{-\bar r \Lambda_n h_n}, \quad h_n = h_*(\tfrac{\Lambda_n}{n}). \tag{55}$$

Покажем, что отсюда вытекает оценка

$$h_* \int\limits_{1/h_*}^{B_n} e^{(1+\varepsilon) y h_*} (1 - V(y)) dy \leqslant \frac{1}{\varepsilon} V(-\frac{1}{h_*}), \quad B_n \leqslant x \leqslant \gamma \Lambda_n, \tag{56}$$

справедливая при любом $\gamma < \omega_2(\delta)$, некотором положительном $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$ и всех достаточно больших n.

Выберем k, $\bar k$ таким образом, чтобы

$$\Lambda_{\bar k} \leqslant 1/h_* < \Lambda_{\bar k + 1}, \quad \Lambda_{k-1} < B_n \leqslant \Lambda_k. \tag{57}$$

Из (5) и (3) следует, что условие (56) выполняется, если равномерно по l, $\bar k \leqslant l < k$, и x, $B_n \leqslant x \leqslant \gamma \Lambda_n$,

$$T_l = \frac{1 - V(\Lambda_l)}{V(-\Lambda_{l+1})}\, e^{(1+\varepsilon) h_* \Lambda_{l+1}} = O(1), \quad n \to \infty. \tag{58}$$

Принимая во внимание условия (3), (55), (57) и свойства функции $h_*(\frac{x}{n})$, заключаем, что соотношение (58) вытекает из неравенства

$$(1+\varepsilon)\, h_*(\frac{x}{n}) \leqslant \bar r\, h_l, \quad \bar k \leqslant l < k, \quad B_n \leqslant x \leqslant \gamma \Lambda_n,$$

или

$$(1+\varepsilon)\, h_*(\frac{\gamma \Lambda_n}{n}) \leqslant \bar r\, h_k = \bar r\, h_*(\Lambda_k / k). \tag{59}$$

Функция $h_*(z)$ возрастает и правильно меняется. Поэтому (59) выполняется, если при некотором $\tilde r < \bar r/(1+\varepsilon)$ и всех достаточно больших n

$$\tilde r^{\alpha - 1} \frac{\Lambda_k}{k} \geqslant \gamma \frac{\Lambda_n}{n}. \tag{60}$$

Из (57) следует, что $k < n$. С учетом произвольной малости $\varepsilon > 0$ и близости $\bar r$ (и $\tilde r$) к r отсюда заключаем, что условие (60) выполняется, если

$$\gamma < r^{\alpha - 1}. \tag{61}$$

Заметим, что при получении неравенства (61) мы не использовали условие (16). В случае, если условие (16) имеет место при некотором $\delta < \alpha - 1$, соотношение (60) выполняется при *любом* положительном γ . Доказательство этого факта с учетом условий (6), (57) проводится аналогично ([6], (73), (77), (78)).

Итак, условие (56), $\gamma < \omega_2(\delta)$, выполняется. Тогда в соответствии с леммой 1 при $c = B_n$ равномерно по x, $B_n \leqslant x \leqslant \gamma\Lambda_n$, имеет место равенство (38). Используя (10), так же как для доказательства справедливости условия (14) ($\forall\bar\gamma < \omega_2(\delta)$) в ([6], (79)–(81)), достаточно показать, что выполняется соотношение ([6], (83)), в котором второе слагаемое заменено на

$$I_n(z) = \tfrac{n}{B_n} \int\limits_{B_n}^{z-B_n} \bigl(1 - V(y)\bigr) e^{Q_n(z-y)-Q_n(z)} h_*(\tfrac{z}{n})\, B_n\, dy. \qquad (62)$$

По (18) и свойствам $h_*(z)$ при всех достаточно больших n

$$Q_n(z-y)-Q_n(z) \leqslant (1+\xi) r\, y\, h_*(\frac{z}{n})\rho(y/z), \qquad B_n \leqslant z-y \leqslant z-B_n, \quad (63)$$

где $\rho(t) = \frac{1-(1-t)^{1/r}}{t}$, ξ — сколь угодно малая положительная постоянная. Пусть $\bar k$, k удовлетворяют условиям $\Lambda_{\bar k} \leqslant B_n < \Lambda_{\bar k+1}$, $\Lambda_{k-1} \leqslant z - B_n < \Lambda_k$. С помощью оценки (63) так же, как при проверке условия (56), покажем, что (см. (62))

$$I_n(z) = o(1), \qquad \rho_n B_n \leqslant x \leqslant \gamma\Lambda_n,\ n \to \infty,$$

если

$$r\, h_*(\frac{z}{n})\rho(\frac{\Lambda_{l+1}}{z}) \leqslant \tilde r h_{l+1},\ \rho_n B_n \leqslant x \leqslant \gamma\Lambda_n,\ \bar k < l < k\ (\exists \tilde r < r). \quad (64)$$

Несложно доказать, что $\bigl(h_*(\frac{z}{n})\rho(\frac{\Lambda_{l+1}}{z})\bigr)'_z > 0$. Поэтому соотношение (64) *является следствием неравенства*

$$h_*(\frac{\Lambda_{l+1}}{l+1}) \geqslant (1+\eta)\, h_*(\frac{\gamma\Lambda_n}{n})\rho(\frac{\Lambda_{l+1}}{\gamma\Lambda_n}) \qquad (\exists \eta > 0).$$

Вспоминая, что функция h_* правильно меняется, отсюда при всех достаточно больших n получим

$$\frac{\Lambda_{l+1}}{\gamma\Lambda_n} \geqslant (1+\eta)\rho^{\alpha-1}(\frac{\Lambda_{l+1}}{\gamma\Lambda_n})\,\frac{l+1}{n} \qquad (\exists \eta > 0). \qquad (65)$$

Поскольку $\rho(t) \leqslant 1/r$ и $l < n$, при условии (61) неравенство (65) выполняется вне зависимости от условия (16). Потребуем теперь, чтобы условие (16) выполнялось при некотором $\delta < \alpha - 1$.

Тогда $\frac{\Lambda_{l+1}}{\Lambda_n} \geqslant (\frac{B_{l+1}}{B_n})^{1+\delta}$ и (см. (6), (5)) $\frac{l+1}{n} \leqslant (\frac{\Lambda_{l+1}}{\Lambda_n})^{\frac{\alpha}{1+\delta}+o(1)} = \gamma^{\frac{\alpha}{1+\delta}} (\frac{\Lambda_{l+1}}{\gamma\Lambda_n})^{\frac{\alpha}{1+\delta}+o(1)}$, $n \to \infty$.

Отсюда и из (65), обозначив $\frac{\Lambda_{l+1}}{\gamma\Lambda_n}$ через u , получим оценку

$$\gamma \leqslant \left(\frac{u^{\frac{1+\delta-\alpha}{1+\delta}+o(1)}}{(1+\eta)\,\rho^{\alpha-1}(u)}\right)^{\frac{1+\delta}{\alpha}}, \quad n \to \infty,$$

которая с учетом (17) и произвольной близости $\eta > 0$ к нулю, является следствием неравенства $\gamma < \omega_2(\delta)$.

Необходимость в теореме 2 доказана полностью.

Доказательство достаточности в теореме 2 проводится аналогично доказательству достаточности в [6, теорема 3]. При этом полезно использовать вышеприведенное рассуждение (см. (54)–(65)) при $\gamma = 1$.

Докажем замечание. Пусть $f(u,\delta) = \left(1-(1-u)^{1/r}\right) u^{-\frac{\delta}{(1+\delta)r}}$, $0 < u \leqslant 1$, и u_* — минимальный корень уравнения $f'_u(u,\delta) = 0$. Тогда

$$d\omega_1(\delta) = f'_\delta(u_*,\delta)d\delta + f'_u(u_*,\delta)du_* = f'_\delta(u_*,\delta)\,d\delta > 0,$$
$$d\omega_2(\delta) = -r\,\omega_2(\delta)\left(\ln\omega_1(\delta) + (1+\delta)(\ln\omega_1(\delta))'_\delta\right) d\delta < 0,$$
$$\omega_1(0) = 1, \quad \omega_1(\alpha-1) = \frac{1}{r}, \quad \omega_2(0) = 1, \quad \omega_2(\alpha-1) = r^{\alpha-1}.$$

Отсюда следует нужный результат.

В теореме 3 доказательства требует лишь необходимость — достаточность вытекает из теоремы 2. Положим

$$\nu_n = l\big(B_n\,(\frac{\Lambda_n}{B_n})^{-\frac{1}{\alpha-1}}\big)/l(B_n), \quad \omega_n = \min(\frac{1}{4}, \nu_n), \quad \kappa_n = \omega_n\,\Lambda_n. \quad (65)$$

Необходимость условия $\bar{D}_\kappa$, $(\kappa = 1)$ доказывается так же, как аналогичное утверждение в теореме 2. Покажем, что $\bar{D}_\kappa$, $(\kappa = 1)$ влечет условие (11) при $\Lambda_n = \kappa_n$, $\bar{r} = r$ и $\kappa = 2$.

Легко проверить, что вышесказанное является следствием неравенства

$$\kappa_n\,h_*(\frac{\kappa_n}{n}) \leqslant (\frac{\Lambda_k}{B_k})^{\frac{1}{r}}, \quad (67)$$

где $\Lambda_k \leqslant \kappa_n < \Lambda_{k+1}$. Условие (16) позволяет получить оценку $\frac{\Lambda_k}{B_k} \geqslant \omega_n^r \frac{\Lambda_n}{B_n}$, подстановка которой в (67) приводит к более ограничительному неравенству $h_*(\frac{\kappa_n}{n}) \leqslant \frac{1}{\Lambda_n}(\frac{\Lambda_n}{B_n})^{\frac{1}{r}}$, выполняющемуся благодаря условиям (8), (6) и (65).

Итак, нами доказано, что в предположениях теоремы 3 имеет место условие D_κ, ($\kappa = 2$) с Λ_n замененным на κ_n (см. (65)). В этом случае (см. (8), (41), (42); [6, (9), (10), (34)])

$$n\, s(\frac{x}{n}, B_n) \sim -r\, h_*(\frac{x}{n}), \quad B_n \leqslant x \leqslant \kappa_n, \quad n \to \infty.$$

Воспользовавшись достаточностью в теореме 2 при $Q_n(x) = n\, s(\frac{x}{n}, B_n)$ и $\Lambda_n = \kappa_n$, отсюда и из (19), (20) (см. также выкладки, приведшие к (54)) заключаем

$$\mathbf{P}\left\{S_n \geqslant x\right\} = e^{-r\, h_*(\frac{x}{n})(1+o(1))} = e^{-r\,(\frac{x}{B_n})^{1/r}(1+o(1))}, \tag{68}$$

где $\rho_n B_n \leqslant x \leqslant \kappa_n$, $n \to \infty$. Из (68) при $x = \kappa_n$ получим

$$h_n = h_*(\frac{\kappa_n}{n}) \sim \frac{1}{\kappa_n}(\frac{\kappa_n}{B_n})^{\frac{1}{r}}, \quad n \to \infty. \tag{69}$$

Из (69), (8), (6) и (65) следует, что

$$h_n^{\alpha-1}\, l(1/h_n) \sim c_\alpha \frac{\kappa_n}{n} \sim \frac{\omega_n \Lambda_n\, l(B_n)}{B_n^\alpha}, \quad n \to \infty.$$

Положив $\psi_n = B_n\,(\frac{\Lambda_n}{B_n})^{-\frac{1}{\alpha-1}}$, отсюда получим

$$\omega_n \sim \nu_n(\psi_n\, h_n)^{\alpha-1}\, l(\frac{\psi_n}{\psi_n\, h_n})/l(\psi_n) = \nu_n(\psi_n\, h_n)^{\alpha-1+o(1)}, \ n \to \infty. \tag{70}$$

Предположим, что $\nu_{\bar n} < \frac{1}{4}$ ($\exists \bar n \uparrow \infty$). Тогда $\omega_{\bar n} = \frac{1}{4}\nu_{\bar n}$ и в соответствии с (70) $h_{\bar n} \sim (\frac{1}{4})^{\frac{1}{\alpha-1}}/\psi_{\bar n}$, $\bar n \to \infty$. С другой стороны, по (69), (66) $h_{\bar n} \sim (\frac{1}{4}\,\nu_{\bar n})^{\frac{1}{\alpha-1}}/\psi_{\bar n}$, $\bar n \to \infty$. Таким образом, $\nu_{\bar n} \to 1$, $\bar n \to \infty$, что противоречит сделанному предположению. Итак, $\kappa_n = \frac{1}{4}\Lambda_n$. Отсюда и из (68) следует условие (21), в случае выполнения которого условия (19) и (12), $\bar D_\kappa$ и D_κ, (20) и (18) равносильны. В то же время по теореме 2 условия D_κ, ($\kappa = 1$) и (18) необходимы для выполнения (19). Теорема 3 доказана.

Проверим справедливость следствий 1 и 2. Покажем, что из условия (11) при $\bar r\,\kappa > 0$ вытекает условие (4), или (см. [9], гл.III, лемма 5)

$$1 - V(y) \leqslant e^{-hy} \quad (\exists h > 0,\ \forall y > y_h).$$

В самом деле, если последнее соотношение не выполняется, то $\exists y_k \uparrow \infty$, $\varepsilon_k \downarrow 0$ такие, что $1 - V(y_k) > e^{-\varepsilon_k\, y_k}$, $k > 1$. Выберем $n_k = [y_k\, \varepsilon_k^{\frac{1-\alpha}{2}}]$, $\Lambda_{n_k} = y_k$. Из (11) и (8) тогда следует, что $1 - V(y_k) <$

$e^{-y_k \varepsilon_k^{1-\delta}}$, $k > k_\delta$, где $\delta > 0$. Налицо противоречие. Таким образом, условие D_κ при $\Lambda_n = o(n)$ влечет (4). Обратное утверждение очевидно.

Доказательство равносильности соотношений (15) и (14) ($\Lambda_n = o(n)$) в предположении (4) проводится так же, как в ([6], (7)–(9), (101)–(103)).

В заключение покажем, что в условиях следствия 2 соотношение (21) при $\Lambda_n = o(n)$ влечет существование конечного положительного предела при $x \to \infty$ у функции $l(x)$

Пусть $\Lambda_n = \varepsilon(B_n)\, n$, где $\varepsilon(t)$ — некоторая функция, такая, что выполняется условие (3). Положим $h(t) = l^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)$, $\eta(t) = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha-1}}(t)$. Легко увидеть (см. (5), (6)), что из условия (21) вытекает соотношение

$$h(t) \sim h\big(h(t)/\eta(t)\big), \quad t \to \infty. \tag{71}$$

Предположим, что $h(\bar t) \uparrow \infty$ ($\exists \bar t \uparrow \infty$). Выбирая функцию $\eta(\bar t)$ таким образом, чтобы $\eta(\bar t) \asymp 1/h(\bar t)$, из (71) получим соотношение $h(\bar t) \sim h(h^2(\bar t)) = h^{o(1)}(\bar t)$, $\bar t \to \infty$, противоречащее сделанному предположению.

Аналогично, предполагая, что $h(\bar t) \downarrow 0$ ($\exists \bar t \uparrow \infty$) и выбирая $\eta(\bar t) \asymp h^2(\bar t)$, также приходим к противоречию. Итак, $h(t) \asymp 1$, $t \to \infty$, и, следовательно,

$$h(t) \sim h\big(1/\eta(t)\big), \quad t \to \infty. \tag{72}$$

Пусть $\{t_k\}$, $\{\bar t_k\}$ стремящиеся к бесконечности последовательности, причем $h(t_k) \to h_1$, $h(\bar t_k) \to h_2$ при $k \to \infty$, и $h_1 \neq h_2$.

Считая без потери общности, что $t_k < \bar t_k < t_{k+1}$, $\forall k$, и выбирая $\eta(\bar t) = \eta(t_k) = 1/\ln t_k$, из (72) при $t = t_k$ и $\bar t_k$ получим равенство $h_1 = h_2$, что противоречит предположению. Таким образом, функция при $t \to \infty$ имеет конечный положительный предел.

Доказательства теорем 4 и замечания 1 близки к доказательствам теоремы 4 и следствия 4 из [6] и теоремы 3 настоящей работы и поэтому не приводятся. Заметим лишь, что условие D_κ, ($\exists \kappa > 0$) в случае (23) приводит к выполнению условия (40) и, следовательно, к равенству (38) в том же интервале.

Доказательство замечания 2. Ниже будем считать, что $B_n \leqslant x \leqslant \gamma\Lambda(B_n)$, $\gamma > 1$, где $B_n = n^{1/\alpha}$. При условии (27) (см. (8))

$$h_*(z) \sim z^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad z \to +0. \tag{73}$$

В соответствии с ([6], (9)), (25), (26), (41)–(44) и (73) при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &ns(\frac{x}{B_n}, B_n) = n\big(L(h) - 1 - \tfrac{1}{2}(L(h)-1)^2\big) - xh + 0(1)nV^3(-1/h), \\ &c_0 V(-1/h) \sim \hat{h} = \tfrac{1}{\alpha}\, h^\alpha, \end{aligned} \tag{74}$$

где h — решение уравнения (44). Положим $\bar{x} = \frac{x}{B_n}$, $\bar{h} = hB_n$. Имеем,

$$xh = \bar{x}\bar{h} = r\,\bar{x}^{\frac{1}{r}} + \tfrac{1}{\alpha}\bar{h}^\alpha - \tfrac{1}{\alpha}\bar{x}^{\frac{1}{r}}(t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1), \tag{75}$$

где $t = \bar{h}/\bar{x}^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $r = \frac{\alpha-1}{\alpha}$. При этом $t \to 1$, когда $n \to \infty$, и, следовательно, $t^\alpha - \alpha t + \alpha - 1 \sim \frac{1}{2r}(1 - t^{\alpha-1})^2$, $n \to \infty$.

Отсюда, из (74), (75) и равенства

$$L(h) - 1 - \hat{h} - \tfrac{1}{2}\hat{h}^2 = L(h) - e^{\hat{h}} + O(\hat{h}^3) \tag{76}$$

следует, что соотношение (29) равносильно условию

$$n(L(h) - e^{\hat{h}}) + \tfrac{1+o(1)}{2(\alpha-1)}\,\bar{x}^{\frac{1}{r}-2}(\bar{x} - \bar{h}^{\alpha-1})^2 + O(n\hat{h}^3) = o(1), \tag{77}$$

$B_n \leqslant x \leqslant \gamma\Lambda(B_n)$, $n \to \infty$. При этом (см. (53), (73)), если $\Lambda(z) = o\big(z^{1+\frac{2}{3}(\alpha-1)}\big)$, $z \to \infty$, то

$$O(n\,\hat{h}^3) = o(1), \quad n \to \infty. \tag{78}$$

Известно (см. [7], теорема 2.6.1), что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{sy}\,dF_\alpha(y) = e^{\frac{1}{\alpha}s^\alpha}, \quad s > 0.$$

Отсюда при $\Delta(y) = V(y) - F_\alpha(y)$

$$\begin{aligned} L(h) - e^{\hat{h}} &= \int_{-\infty}^{B_n} e^{hy}\,dV(y) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{hy}\,dF_\alpha(y) \\ &= \int_{-\infty}^{-1/h} e^{hy}\,d\Delta(y) + \int_{-1/h}^{1/h} e^{hy}\,d\Delta(y) + \int_{1/h}^{B_n} e^{hy}\,dV(y) - \int_{1/h}^{\infty} e^{hy}\,dF_\alpha(y) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 - I_4; \end{aligned} \tag{79}$$

$$|I_1| = |\int\limits_{-\infty}^{-1/h} (\Delta(-\frac{1}{h}) - \Delta(y))de^{hy}| \leqslant \frac{1}{e} \sup_{y \leqslant -\frac{1}{h}} |\int\limits_{y}^{-1/h} d\Delta(y)| \leqslant \frac{2}{e} \sup_{y \leqslant -\frac{1}{h}} |\Delta(y)|. \tag{80}$$

Путем стандартных рассуждений получим

$$|I_2| \leqslant 2\big(\Delta(-\frac{1}{h}) + h| \int\limits_{-\infty}^{-1/h} yd\Delta(y)| + h^2| \int\limits_{-1/h}^{1/h} y^2 d\Delta(y)| + h^3 \int\limits_{-1/h}^{1/h} y^2|\Delta(y)|dy\big)$$

$$+ 3\big(h \int\limits_{1/h}^{\infty} (1 - V(y))dy + 1 - V(1/h) + h \int\limits_{1/h}^{\infty} ydF_\alpha(y)\big), \tag{81}$$

$$I_3 \leqslant e\big(1 - V(1/h)\big) + h \int\limits_{1/h}^{B_n} e^{hy}(1 - V(y))dy. \tag{82}$$

Используя условия (26)–(28), (78) и (7′), можно показать, что

$$n(L(h) - e^{\hat{h}}) = o(1), \quad B_n \leqslant x \leqslant \gamma\Lambda(B_n),\ n \to \infty. \tag{83}$$

Отметим, что условие (28) используется лишь для оценки третьего слагаемого в правой части (81).

Теперь рассмотрим второе слагаемое в равенстве (77). Так же, как в (74), используя (41)–(43), получим

$$\bar{x} - \bar{h}^{\alpha-1} = \frac{n\ L'(h)}{B_n\ L(h)} - \bar{h}^{\alpha-1}$$
$$= \frac{n}{\bar{h}L(h)}\big(hL'(h) - h^\alpha - (L(h) - 1)h^\alpha\big) = o(1)\frac{n}{B_n}h^{2\alpha-1},\ n \to \infty.$$

Отсюда следует, что $\bar{x}^{\frac{1}{r}-2}(\bar{x} - \bar{h}^{\alpha-1})^2 = o(nh^{3\alpha}) = o(1)$, $n \to \infty$, что вместе с (78), (83) доказывает (77) и, следовательно, замечание 2.

В оптимальности условия (28) несложно убедиться, проанализировав доказательство замечания 2.

Теорема 6 является следствием теорем 3, 4 и замечаний 1, 2. Например, из теоремы 3 (необходимость) при $Q_n(x) = r\left(\frac{x}{B_n}\right)^{1/r}$ вытекают условия $\bar{D}_\kappa$ и (14), $\Lambda_n = \Lambda(B_n)$ а, следовательно, (25) и (см. замечание 2) (28).

Проверим замечание 3. Импликация (31)⇒(33) очевидна (см. (9), (10)). Для доказательства обратного утверждения, учитывая равносильность условий (31), (24) и (24′), а также (73), (29), достаточно показать, что из (33) вытекает равенство

$$I=\lambda(z)\int_q^1 e^{r\lambda^{\frac{1}{r}}(z)d(t,z)}\big(1+(1-t)\lambda(z)\big)^{\frac{1}{2r}-1}dt=O(1),\ z\to\infty\ (\forall q>0), \tag{84}$$

$d(t,z)=1+(1-t)^{1/r}-\big(\lambda(tz)/\lambda(z)\big)^{1/r}$. Имеем, $\big(\lambda(tz)/\lambda(z)\big)^{1/r}\geqslant 1-(1-t)\,a(z)$, где $a(z)=\frac{1}{rq}\max\limits_{t\in(qz,z)}t\big(\ln\lambda(t)\big)'$, откуда $d(t,z)\leqslant-(1-t)^{1/r}+(1-t)\,a(z)$. Используя эту оценку в (84), получим при $\tau=a(z)\lambda^{\frac{1}{\alpha-1}}(z)$

$$I\leqslant\int_0^\infty e^{-r\,v^{1/r}+r\,\tau\,v}(1+v)^{\frac{1}{2r}-1}\,dv.$$

Из условия (34) следует, что $\tau=O(1)$, $z\to\infty$. Таким образом, $I=O(1)$, $z\to\infty$, и условие (84) проверено. Замечание 3 доказано.

Пусть $\bar\Lambda(z)=\Lambda(z)/z$, $\psi(z)=z/\bar\Lambda(z)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $t=\ln\frac{\psi(z)}{z}$, $f(z)=\psi^{-1}(z)/z$ (см. (26), (28)). Тогда

$$f(z\,e^t)=\frac{z}{\psi(z)}=f(z)+tf'(ze^{\theta t})ze^{\theta t},\quad 0<\theta<1, \tag{85}$$

но при условии (32)

$$f'(u)=\Big(\frac{z}{\psi(z)}\Big)'/\psi'(z)\Big|_{z=\psi^{-1}(z)}=O\Big(\frac{1}{u}\Big),\quad u\to\infty,$$

поскольку $\psi'(z)\sim\psi(z)/z$, $(z/\psi(z))'=O(1/z)$ при $z\to\infty$.

Из (85), таким образом, следует

$$\frac{z}{\psi(z)}=\frac{\psi^{-1}(z)}{z}+O\Big(\Big|\ln\frac{\psi(z)}{z}\Big|\Big),\quad z\to\infty,$$

откуда $\frac{\psi^{-1}(z)}{z}\sim z^2/\psi(z)$, $z\to\infty$.

Аналогичным образом проверяются остальные сопутствующие замечанию 3 утверждения.

Литература

1. C. C. Heyde, *On large deviation probabilities in the case of attraction to a non-normal stable law.* — Sankhyā Ser. A **30** no. 3 (1968), 253–258.

2. С. Г. Ткачук, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона.* Автореф. канд. дис., Ташкент, 1977.
3. И. Ф. Пинелис, *Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших уклонений суммы и максимума независимых случайных величин.* — Предельные теоремы теории вероятностей, Труды института матем. СО АН СССР **5** (1981), 144–173.
4. Л. В. Розовский, *Одна оценка для вероятностей односторонних больших уклонений.* — Матем. заметки **42**, № 1 (1987), 145–156.
5. T. Höglund, *A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviations from the mean.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **49** no. 1 (1979), 105–117.
6. Л. В. Розовский, *Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона.* — Теория вероятн. и ее примен. **34**, № 4 (1989), 686–705.
7. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения.* М., Наука, 1983.
8. Л. В. Осипов, *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **17**, № 2 (1972), 320–341.
9. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* М., Наука, 1972.
10. Н. Н. Амосова, *О вероятностях больших уклонений в случае устойчивых предельных распределений.* — Матем. заметки **35**, № 1 (1984), 125–131.
11. А. В. Нагаев, *О несимметричной проблеме больших уклонений в случае устойчивого предельного закона.* — Теория вероятн. и ее примен. **28**, № 4 (1983), 637–645.

Rozovski L. V. Large deviations of sums of independent random variables from the domain of attraction of a stable law.

The paper is a continuation of a previous autor's paper ("Teor. veroyatn. i primen.", 34, 4 (1989)) and deals with the case when the existence of an exponential moment of the distribution under consideration is not supposed.

Всероссийский НИИ геологии
и минеральных ресурсов мирового океана

Поступило 6 октября 1995 г.