И. Горбатый, Равновесие тел и потеря устойчивости,
Квант, 2014, номер 4, 11–14

https://www.mathnet.ru/kvant1788

Равновесие тел и потеря устойчивости

И.ГОРБАТЫЙ

Существуют явления, в которых при малом изменении некоторого параметра происходит резкое изменение состояния рассматриваемой системы. В этом случае говорят о потере устойчивости, бифуркациях, переключениях, срывах и катастрофах. Круг таких явлений разнообразен, они проявляются не только в физике, но и в других науках, например в биологии и экономике. Математическая теория устойчивости связана с именами российских математиков А.М.Ляпунова, А.А.Андронова, В.И.Арнольда и их учеников.

В этой статье рассматриваются некоторые задачи равновесия и устойчивости в механических системах, которые могут быть решены школьными методами.

Состоянием равновесия механической системы называют такое ее состояние, при котором все точки системы покоятся по отношению к выбранной системе отсчета. Если в качестве механической системы рассматривается твердое тело, то для его равновесия необходимы два условия:

$$\vec{F}_{\text{внеш}} = 0\,,\;\; M_{\text{внеш}} = 0\,,$$

где $\vec{F}_{\text{внеш}}$ – векторная сумма внешних сил, действующих на тело, а $M_{\text{внеш}}$ – их суммарный момент относительно произвольной оси. Для получения достаточных условий равновесия к этим условиям следует добавить еще равенство нулю скоростей всех точек тела в некоторый момент времени.

Равновесие тела устойчиво, если при малом смещении тела из положения равновесия возникают силы, возвращающие его в положение равновесия. При неустойчивом равновесии малое отклонение тела от положения равновесия вызывает силы, стремящиеся увеличить это отклонение. На рисунке 1 приведены примеры устойчивого равновесия, а на рисунке 2 – неустойчивого.

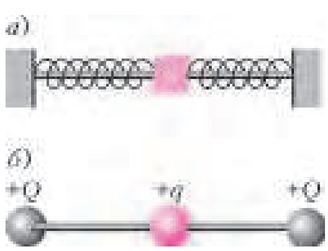

Рис.1. Устойчивое равновесие: а) муфта на стержне между двумя пружинами; б) подвижная бусинка между двумя закрепленными зарядами

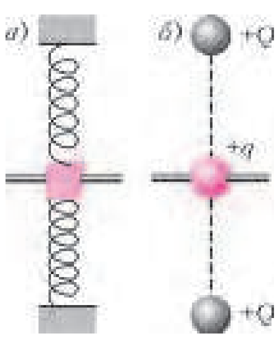

Рис.2. Неустойчивое равновесие: а) муфта на стержне между двумя сжатыми пружинами; б) подвижная бусинка между двумя закрепленными зарядами

Приступим теперь к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. Два заряда

Небольшой шарик с массой m и зарядом q покоится на горизонтальной непроводящей поверхности (рис.3). К нему очень медленно подносят, перемещая вертикально вниз, другой шарик с зарядом –q. На каком расстоянии от горизонтальной поверхности шарики столкнутся?

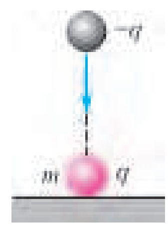

Рис. 3

На нижний шарик действуют силы тяжести, реакции опоры и кулоновского взаимодействия. Запишем условие равновесия шарика на горизонтальной поверхности:

$$\frac{kq^2}{h^2} + N - mg = 0\,,$$

где h – расстояние между шариками, k – постоянная в законе Кулона. Это равновесие устойчивое: при малом смещении нижнего шарика из этого положения по вертикали или по горизонтали возникает «возвращающая» сила. С уменьшением h сила реакции N уменьшается и при некотором h оказывается равной нулю. С этого момента положение нижнего шарика на горизонтальной поверхности становится неустойчивым, он отрывается от поверхности и устремляется к верхнему шарику со все возрастающим ускорением. Поскольку верхний шарик движется очень медленно, то столкновение шариков происходит на высоте

$$h = \sqrt{\frac{kq^2}{mg}}\,.$$

Задача 2. Муфта и четыре пружины

К муфте, которая может скользить по гладкому стержню, прикреплены четыре пружины, как показано на рисунке 4. Две из них, расположенные вдоль стержня, имеют жесткость в n = 2 меньше, чем «поперечные» пружины, перпендикулярные стержню. Первоначально пружины не деформированы, а затем поперечные пружины начинают медленно сжимать. При какой относительной деформации этих пружин равновесное положение муфты потеряет устойчивость?

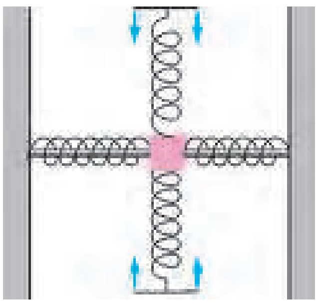

Рис. 4

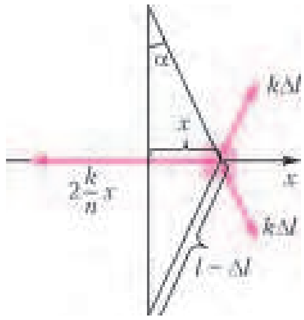

Рис. 5

Направим ось x вдоль стержня. Пусть муфта сместилась из положения равновесия на малую величину x. Действующие на нее силы изображены на рисунке 5. Проекция результирующей силы на ось x равна

$$F_x = 2k\Delta l \sin\alpha - 2\frac{k}{n}x,$$

где k – жесткость, а Δl – деформация поперечных пружин. Учитывая, что

$$\sin\alpha = \frac{x}{l-\Delta l},$$

получим

$$F_x = \frac{2kxl}{n(l-\Delta l)}\left((n+1)\frac{\Delta l}{l} - 1\right).$$

Из этой формулы следует, что если $(n+1)\Delta l/l < 1$, то проекция силы F_x отрицательна при $x > 0$ и положительна при $x < 0$, т.е. в этом случае при отклонении системы от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть систему к равновесию ($x = 0$). Положение равновесия становится неустойчивым при $(n+1)\Delta l/l > 1$. Отсюда находим «пороговую» относительную деформацию поперечных пружин:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3}.$$

Задача 3. Три заряда

Положительный q_1 и отрицательный q_2 точечные заряды закреплены на оси x по разные стороны от гладкой непроводящей пластины, плоскость которой перпендикулярна оси x. Маленький положительно заряженный шарик также находится на оси x, упираясь в пластину, как показано на рисунке 6. Первоначально пластина расположена вблизи отрицательного заряда, шарик при этом находится в равновесии. Пластину начинают поступательно перемещать вдоль оси x, медленно увеличивая расстояние l между пластиной и отрицательным зарядом. Когда l достигает $1/3$ расстояния между зарядами, шарик «улетает» с оси x. Определите отношение q_1/q_2. Влиянием вещества пластины на электрическое поле, а также силой тяжести пренебречь.

Рис. 6

Предположим, что шарик сместился вдоль оси y, перпендикулярной оси x, на малое расстояние h (рис.7).

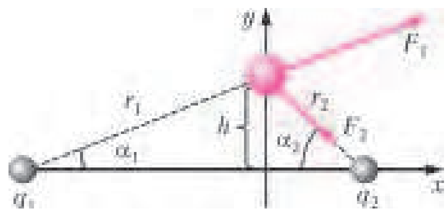

Рис. 7

Проекция на ось y результирующей силы, действующей на шарик со стороны точечных зарядов, равна

$$F_y = F_1 \sin\alpha_1 - F_2 \sin\alpha_2,$$

где $\sin\alpha_1 = h/r_1$, $\sin\alpha_2 = h/r_2$, а r_1 и r_2 – расстояния от шарика до зарядов q_1 и q_2 соответственно. Положение шарика на оси x будет устойчивым, если $F_y < 0$. Потеря устойчивости происходит при условии

$$F_1 \sin\alpha_1 = F_2 \sin\alpha_2.$$

Из закона Кулона следует, что

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{q_1}{q_2}\frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{q_1}{q_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3.$$

При малых h расстояния r_1 и r_2 примерно равны соответствующим расстояниям, измеренным вдоль оси x. Поэтому

$$\frac{q_1}{q_2} = 2^3 = 8.$$

Задача 4. Четыре заряда

На концах тонкой непроводящей спицы длиной $2l$ закреплены положительные точечные заряды Q (рис.8). Положительно заряженная бусинка может двигаться по спице без трения и в начальный момент покоится в положении равновесия. К спице с большого расстояния медленно приближают положительный заряд q, перемещая его вдоль перпендикуляра к спице, проходящего через ее середину. Когда расстояние между зарядом q и бусинкой стало равным l, бусинка пришла в движение. Определите отношение зарядов Q/q.

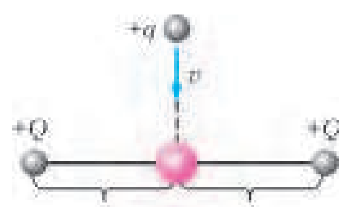

Рис. 8

Направим ось x вдоль спицы, ось y – через центр спицы и движущийся заряд, а начало отсчета осей выберем в центре спицы. Пусть $x > 0$ – малое смещение бусинки из центра спицы. Тогда проекция на ось x результирующей силы, действующей на бусинку, равна

$$F_x = \frac{kQq_0}{(l+x)^2} - \frac{kQq_0}{(l-x)^2} + \frac{kqq_0x}{y^3} \approx$$

$$\approx -\frac{4kQq_0x}{l^3} - \frac{kqq_0x}{y^3} = -kq_0x\left(\frac{4Q}{l^3} - \frac{q}{y^3}\right),$$

где q_0 – заряд бусинки, y – координата заряда q, k – постоянная в законе Кулона. Равновесие бусинки становится неустойчивым при $F_x = 0$. При этом по условию задачи $y = l$. Следовательно,

$$\frac{Q}{q} = \frac{1}{4}.$$

Задача 5. Два заряда и пружинка

Небольшой заряженный шарик покоится на гладком горизонтальном непроводящем столе. К шарику присоединена пружинка жесткостью k, второй конец которой закреплен на столе. Вдоль оси пружинки к шарику с большого расстояния очень медленно приближают такой же, но противоположно заряженный шарик. Определите деформацию пружинки в момент столкновения шариков, если величина заряда каждого шарика равна q.

Направим ось x вдоль оси пружинки от первого шарика (он закреплен на пружине) ко второму, который медленно приближается к первому (рис.9). Начало отсчета примем в точке, где первоначально находился первый шарик при недеформированной пружинке. Проекция на ось x силы, действующей на первый шарик, определяется формулой

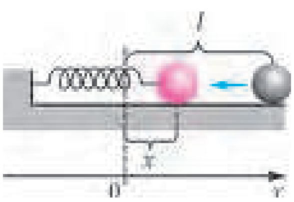

Рис. 9

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (l-x)^2} - kx,$$

где x – координата первого шарика, l – координата второго, ε_0 – электрическая постоянная. Графики зависимости $F_x(x)$ при $0 < x < l$ для различных значений параметра

$$\alpha = \frac{1}{l}\left(\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 k}\right)^{1/3}$$

приведены на рисунке 10. Минимальное значение силы достигается при

$$x = x_m = l(1-\alpha).$$

Это выражение нетрудно получить стандартным методом, вычисляя производную и решая уравнение $F'_x(x_m) = 0$. Подставляя найденное значение x_m в $F_x(x_m)$, получим минимальное значение функции:

$$F_m = \left(\frac{3}{2}\alpha - 1\right)kl.$$

При $\alpha < 2/3$ значение F_m отрицательно и, как видно из рисунка 10, уравнение $F_x = 0$ имеет два корня, один из которых соответствует устойчивому равновесию шарика на пружинке, а второй – неустойчивому. При $\alpha = 2/3$ два корня уравнения $F_x = 0$ «сливаются» в один, а при $\alpha > 2/3$ проекция силы F_x положительна при любых значениях x в диапазоне $0 < x < l$.

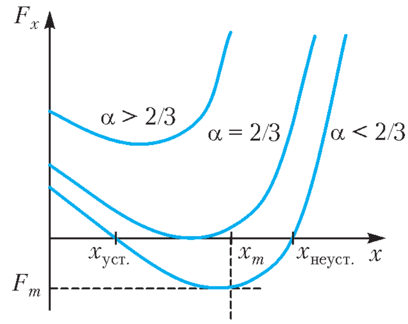

Рис. 10

Итак, когда второй шарик находится на большом расстоянии от первого, величина l велика и поэтому $\alpha < 2/3$. При этом первый шарик растягивает пружинку на $x = x_{\text{уст}}$ и его равновесие устойчивое. По мере приближения второго шарика к первому величина l уменьшается, а величины F_m, $x_{\text{уст}}$ и α растут – пружинка растягивается все сильнее. При достижении условия $\alpha = 2/3$ шарик на пружинке теряет устойчивость, проекция силы F_x становится положительной и первый шарик устремляется навстречу второму, пока не происходит их столкновение. Поскольку второй шарик по условию задачи приближается очень медленно, то деформация пружины в момент столкновения равна значению l, при котором $\alpha = 2/3$:

$$l = \frac{3}{2}\left(\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 k}\right)^{1/3}.$$

Задача 6. Два заряженных шарика на нитях

Два маленьких шарика, заряд одного из которых q_0, а другого $-q_0$, подвешены на двух изолирующих нитях длиной L = 1 м каждая. Точки подвеса нитей очень медленно сближают так, что они остаются все время в одной горизонтальной плоскости. Когда расстояние между точками подвеса нитей стало равным a = 5 см, шарики столкнулись. Найдите величину заряда q_0. Масса каждого шарика m = 4 г.

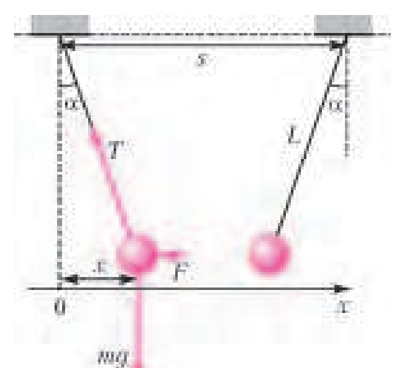

Рис. 11

Направим ось x, как показано на рисунке 11. Тогда проекция на эту ось результирующей силы, действующей на один из шариков, равна

$$F_x = F - T\sin\alpha = \frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 (s-2x)^2} - T\sin\alpha,$$

где s – расстояние между точками подвеса нитей, T – сила натяжения нити, α – угол, который составляет каждая нить с вертикалью. Из рисунка 11 видно, что $\sin\alpha = x/L$. По условию $L \gg s$, поэтому угол α является малым, $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha = 1$. Выражая из уравнения

$$T\cos\alpha = mg$$

силу натяжения T и подставляя ее в предыдущее уравнение, получим

$$F_x = \frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 (s-2x)^2} - \frac{mg}{L}x,$$

или

$$F_x = \frac{(q_0/2)^2}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{s}{2}-x\right)^2} - \frac{mg}{L}x.$$

Заметим, что последнее выражение отличается от аналогичного выражения из задачи 5 лишь обозначениями: $q = q_0/2$, $l = s/2$, $k = mg/L$. Поэтому можно воспользоваться результатом решения задачи 5 и записать условие потери устойчивости в рассматриваемом случае в виде

$$\frac{s}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{q_0^2 L}{8\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3},$$

где $s = a$. Выражая отсюда q_0, получим ответ:

$$q_0 = \sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^3 \frac{\pi\varepsilon_0 mg}{L}} = 6{,}4\cdot 10^{-9}\ \text{Кл}.$$

Задача 7. Стержень, опущенный в воду

Однородный тонкий стержень, подвешенный на нитке за один из концов, начинают погружать в воду, медленно опуская точку подвеса (рис.12). Определите максимальную глубину погружения h нижнего конца стержня, если его длина l = 18 см, а плотность материала стержня составляет n = 1/2 от плотности воды.

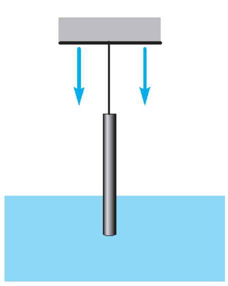

Рис. 12

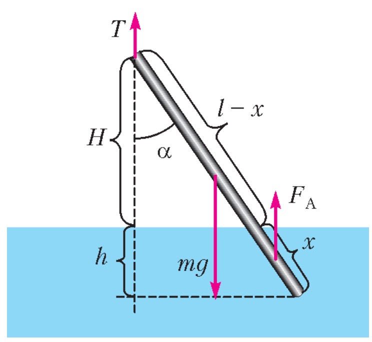

Рис. 13

Рассмотрим стержень, погруженный в воду и отклоненный от вертикали на угол α (рис.13). Суммарный момент силы тяжести и архимедовой силы относительно горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня, равен

$$M = F_A\left(l - \frac{x}{2}\right)\sin\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha,$$

где $F_A = \rho g S x$ – сила Архимеда, ρ – плотность воды, x – длина погруженной в воду части стержня, S – площадь поперечного сечения стержня, $m = \rho n S l$ – его масса. При $M < 0$ момент сил уменьшает угол α, а при $M > 0$ – увеличивает отклонение стержня от вертикали. Условие $M = 0$ определяет углы, соответствующие положениям равновесия. Подставляя в формулу для момента выражение для силы Архимеда и массы стержня, получим

$$M = -\left(x^2 - 2lx + nl^2\right)\frac{\rho g S}{2}\sin\alpha.$$

Из формулы $\cos\alpha = H/(l-x)$ выразим x, подставим в предыдущую формулу и после преобразований получим

$$M = \frac{\rho g S}{2}H_m^2\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\left(\cos\alpha - \frac{H}{H_m}\right)\left(\cos\alpha + \frac{H}{H_m}\right),$$

где $H_m = l\sqrt{1-n}$. При $H > H_m$ уравнение $M = 0$ имеет только один корень: $\alpha = 0$, который соответствует устойчивому положению равновесия. Действительно, в точке $\alpha = 0$ момент сил $M(\alpha)$ меняет знак с «минуса» на «плюс», как показано на рисунке 14, поэтому при

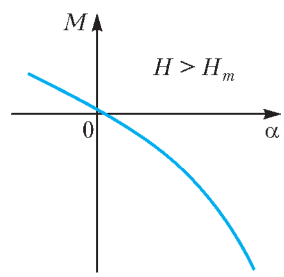

Рис. 14

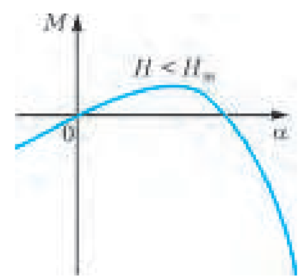

Рис. 15

малом отклонении от равновесия возникает момент сил, возвращающий стержень к положению равновесия. Если же $H < H_m$, то характер зависимости $M(\alpha)$ изменяется. Как видно из рисунка 15, точка $\alpha = 0$ становится неустойчивой, а устойчивое положение равновесия реализуется при $\alpha = \arccos(H/H_m)$. В этом случае глубина погружения нижнего конца стержня определяется формулой

$$h = l\cos\alpha - H = H\left(\frac{l}{H_m} - 1\right).$$

Видно, что с уменьшением H величина h тоже уменьшается, следовательно, максимальное значение h достигается при $H = H_m$:

$$h = h_{max} = l - H_m = l\left(1 - \sqrt{1-n}\right) \approx 5{,}3\ \text{см}.$$

Итак, при медленном опускании точки подвеса стержень сначала будет оставаться вертикальным, а при $H \le H_m$ начнет отклоняться от вертикали на угол, определяемый формулой $\alpha = \arccos(H/H_m)$.

А теперь – эксперимент. Возьмите карандаш, прикрепите к его концу ниточку и медленно опускайте подвешенный на ниточке карандаш в кастрюлю с водой. Если наши теоретические предсказания подтвердятся – радуйтесь. Ну а если нет – вспомните слова великого физика: «Чем дальше эксперимент от теории, тем ближе он к Нобелевской премии».