СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
2. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., 1958.
3. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations.— Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser. 3, 1959, 13, N 2, 115—162.
4. Donaldson T. K., Trudinger N. S. Orlich — Sobolev spaces and imbedding theorems.— J. of funct. analisis, 1971, 8, N 1, 52—75.
5. Кружков С. Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. — Матем. сб., 1968, 77 (119), № 3, 229—334.
6 Лу Вень-туан. К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными степенями.— Вестн. ЛГУ, 1961, № 7, 23—24.

Поступила в редакцию
08.10.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 1

УДК 517.115

Т. Н. Сысоева

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. В области $R=\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ рассмотрим задачу вида

$$\mu(\omega_t+\Lambda(x,\ t)\omega_x)=F(\omega,\ x,\ t,\ \mu), \tag{1}$$

$$\omega(x,\ 0,\ \mu)=\omega^0(x), \tag{2}$$

где $\omega(x,\ t,\ \mu)$, $F(\omega,\ x,\ t,\ \mu)$ — n-мерные вектор-функции, $\Lambda(x,\ t)$ — $(n\times n)$-матрица, $\mu>0$ — малый параметр.

Пусть выполнены следующие требования:

I. Вырожденное уравнение $0=F(\overline{\omega},\ x,\ t,\ 0)$ имеет для всех $t\in\in[0,\ T]$, $x\in[0,\ a]$ семейство решений вида $\overline{\omega}(x,\ t)=\varphi(x,\ t,\ \alpha_1,\ ...,\ \alpha_k)==\varphi(x,\ t,\ \alpha)$, где $\varphi(x,\ t,\ \alpha)$ — определенная функция $(x,\ t)$ и произвольных параметров $\alpha_1,\ ...,\ \alpha_k$, причем в области $R\times D(\alpha)$, где $D(\alpha)$ — некоторая область изменения параметров, выполнены условия:

1) функция $\varphi(x,\ t,\ \alpha)$ достаточно гладкая;

2) ранг матрицы $\varphi_\alpha(x,\ t,\ \alpha)=\dfrac{\partial\varphi(x,\ t,\ \alpha)}{\partial\alpha}$ равен k, т. е. числу параметров.

II. Матрица $F_\omega(\varphi(x,\ t,\ \alpha),\ x,\ t,\ 0)$ имеет собственное значение $\lambda=0$ кратности k, а остальные ее $(n-k)$ собственных значений $\lambda_i(x,\ t,\ \alpha)$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda_i(x,\ t,\ \alpha)<0\ \ (i=k+1,\ ...,\ n),\ (x,\ t)\in R,\ \alpha\in D(\alpha).$$

III. Матрица $\Lambda(x,\ t)$ симметрична и имеет собственные значения $\tilde{\lambda}_1(x,\ t),\ ...,\ \tilde{\lambda}_n(x,\ t)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\tilde{\lambda}_1(x,\ t)>\tilde{\lambda}_2(x,\ t)>...>\tilde{\lambda}_n(x,\ t),\ (x,\ t)\in R.$$

Обозначим $\|y\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|y_i|$ норму вектора $y=(y_1,\ \ldots,\ y_n)$.

2. Рассмотрим уравнение

$$d\tilde{\omega}/d\tau=F(\varphi(x,\ 0,\ \alpha)+\tilde{\omega},\ x,\ 0,\ 0). \tag{3}$$

Здесь α входит как параметр. В [1, гл. 2] было доказано, что в достаточно малой окрестности точки покоя системы (3) $\tilde{\omega}=0$ существует $(n-k)$-мерное многообразие $\sigma(x, \alpha)$, такое, что если начальное значение решения $\tilde{\omega}(x, 0)\in\sigma(x, \alpha)$, то найдутся такие постоянные $\gamma>0$ и $\sigma>0$, что при $\tau\geqslant 0$, $0\leqslant x\leqslant a$ решение $\tilde{\omega}(x, \tau)$ удовлетворяет неравенству $\|\tilde{\omega}(x, \tau)\|\leqslant\gamma\exp(-\sigma\tau)$. Методом последовательных приближений можно показать, что в этом случае существуют такие постоянные $\gamma_1>0$ и $\sigma_1>0$, что при $\tau\geqslant 0$, $0\leqslant x\leqslant a$ производные $\tilde{\omega}_x(x, \tau)$, ..., $\omega_n^{(n)}(x, \tau)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|\tilde{\omega}_x^{(i)}(x, \tau)\|\leqslant\gamma_1\exp(-\sigma_1\tau) \qquad (i=1, \dots, n). \tag{4}$$

Продолжая в сторону отрицательных τ траектории, начинающиеся на $\sigma(x, \alpha)$, получим расширенное многообразие $\Lambda(x, \alpha)$. Обозначим z и y верхний и нижний блоки вектора $\tilde{\omega}$ соответственно размерностей $(n-k)$ и k (терминологию см. в [1]).

IV. Пусть в некоторой области $\Gamma(z, x, \alpha)$ многообразие $\Lambda(x, \alpha)$ представимо в виде

$$y=P(x, z, \alpha),$$

где $P(x, z, \alpha)$ — достаточно гладкая функция в $\Gamma(z, x, \alpha)$.

В силу требования II существует матрица $B(x, \alpha)$, столь же гладкая, как и $A(x,\alpha)=F_\omega(\varphi(x,0,\alpha),x,0,0)$ (см. [2]), приводящая $A(x,\alpha)$ к блочно-диагональному виду

$$B^{-1}(x, \alpha)\,A(x, \alpha)\,B(x, \alpha)=\begin{pmatrix} C(x, \alpha) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $C(x, \alpha)$ — $(n-k)\times(n-k)$-матрица, имеющая собственные значения $\lambda_i(x, t, \alpha)$ $(k+1, \dots, n)$, о которых говорится в требовании II. Обозначим $B_{11}(x, \alpha)$ левый верхний блок матрицы $B(x, \alpha)$ размерности $(n-k)\times\times(n-k)$.

V. Пусть $\det B_{11}(x, \alpha)\neq 0$ при $0\leqslant x\leqslant a$, $\alpha\in D(\alpha)$.

3. Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) будем строить в виде

$$\omega(x, t, \mu)=\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i(\bar{\omega}_i(x, t)+\Pi_i\omega(x, \tau)), \tag{5}$$

где $\tau=t/\mu$. Подставляя этот ряд в (1) и (2) и собирая члены при одинаковых степенях μ, получим уравнения для $\bar{\omega}_1(x, t)$ и $\Pi_i\omega(x, \tau)$.

Для $\bar{\omega}_0(x, t)$ имеем уравнение

$$F(\bar{\omega}_0(x, t), x, t, 0)=0.$$

Решение этого уравнения в силу требования I можно записать в виде

$$\bar{\omega}_0(x, t)=\varphi(x, t, \alpha(x, t)),$$

где $\alpha(x, t)$ — пока произвольная k-мерная вектор-функция.

Для $\Pi_0\omega(x, \tau)$ имеем уравнение

$$d\Pi_0\omega/d\tau=F(\varphi(x, 0, \alpha(x, 0))+\Pi_0\omega, x, 0, 0).$$

Начальное условие для $\Pi_0\omega(x, \tau)$ получается после подстановки (5) в (2) и имеет вид

$$\Pi_0\,\omega(x, 0)=\omega^0(x)-\varphi(x, 0, \alpha(x, 0))=\begin{pmatrix} z^0(x)-\varphi_1(x, 0, \alpha(x, 0)) \\ y^0(x)-\varphi_2(x, 0, \alpha(x, 0))\end{pmatrix},$$

где $z^0(x)$ — верхний $(n-k)$-мерный блок $\omega^0(x)$, а $y^0(x)$ — нижний k-мерный блок $\omega^0(x)$, φ_1 и φ_2 — аналогичные блоки φ.

Пусть $\Pi_0\omega(x, 0)$ удовлетворяет уравнению

$$y^0(x)-\varphi_2(x, 0, \alpha(x, 0))=P(x, z^0(x)-\varphi_1(x, 0, \alpha(x, 0)), \alpha(x, 0)). \quad (6)$$

Тогда вектор $\Pi_0\omega(x,0)$ принадлежит многообразию $\Lambda(x,\alpha)$. (6) — это система k уравнений относительно k компонент вектора $\alpha(x, 0)$.

VI. Пусть система (6) имеет единственное решение $\alpha(x, 0)=\alpha^0(x)$ при $0\leqslant x\leqslant a$.

Беря $\alpha(x, 0)=\alpha^0(x)$, получим, что

$$\|\Pi_0\omega(x, \tau)\|\leqslant c\exp(-\varkappa\tau), \ \tau\geqslant 0, \ 0\leqslant x\leqslant a. \quad (7)$$

Уравнение для $\overline{\omega}_1(x, t)$ имеет вид

$$F_\omega(\varphi(x, t, \alpha(x, t)), x, t, 0)\overline{\omega}_1(x, t)=$$
$$=\varphi_\alpha(x, t, \alpha(x, t))\alpha_t+\Lambda(x, t)\varphi_\alpha(x, t, \alpha(x, t))\alpha_x+\dot{\varphi}_t+\Lambda(x, t)\varphi_x-$$
$$-F_\mu(\varphi(x, t, \alpha(x, t)), x, t, 0). \quad (8)$$

Для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть была ортогональна к собственным векторам $g_j(x, t, \alpha)$ $(j=1, ..., k)$ сопряженной матрицы $F_\omega{}^*(\varphi(x, t, \alpha), x, t, 0)$, соответствующим собственному значению $\lambda=0$. Обозначим через $g(x, t, \alpha)$ матрицу, строками которой являются векторы $g_j(x, t, \alpha)$. Тогда условие ортогональности можно записать в виде

$$\alpha_t+(g(x, t, \alpha)\varphi_\alpha(x, t, \alpha))^{-1}g(x, t, \alpha)\Lambda(x, t)\varphi_\alpha(x, t, \alpha)\alpha_x=$$
$$=F_0(x, t, \alpha), \quad (9)$$

где $F_0(x, t, \alpha)$ — известная функция (здесь $\det(g\varphi_\alpha)\neq 0$, см. [1, гл. 1]).

VII. Пусть уравнение (9) с начальным условием $\alpha(x, 0)=\alpha^0(x)$ при $0\leqslant x\leqslant a$ имеет единственное решение $\alpha=\alpha(x, t)$ в некоторой двумерной области D_1 переменных x и t.

Решение уравнения (8) можно записать в виде

$$\overline{\omega}_1(x, t)=\overline{\varphi}_\alpha(x, t)\beta(x, t)+\tilde{\omega}_1(x, t),$$

где $\overline{\varphi}_\alpha(x, t)=\varphi_\alpha(x, t, \alpha(x, t))$, $\beta(x, t)$ — пока неизвестная k-мерная вектор-функция, $\tilde{\omega}_1(x, t)$ — какое-нибудь частное решение уравнения (8).

Для $\Pi_1\omega(x, \tau)$ получаем уравнение

$$d\Pi_1\omega/d\tau=F_\omega(x, \tau)\Pi_1\omega+[F_\omega(x, \tau)-\overline{F}_\omega(x, 0)][\overline{\omega}_1(x, 0)+\overline{\omega}_{0t}(x, 0)]+$$
$$+[F_t(x, \tau)-\overline{F}_t(x, 0)]\tau+[F_\mu(x, \tau)-\overline{F}_\mu(x, 0)]-\Lambda(x, 0)\Pi_0\omega_x,$$

где используются обозначения

$$F_\omega(x, \tau)=F_\omega(\overline{\omega}_0(x, 0)+\Pi_0\omega(x, \tau), x, 0, 0),$$
$$\overline{F}_\omega(x, t)=F_\omega(\overline{\omega}_0(x, t), x, t, 0)$$

и аналогичный смысл имеют $F_t(x,\tau)$, $\overline{F}_t(x,0)$, $F_\mu(x,t)$, $\overline{F}_\mu(x,0)$. Начальное условие для $\Pi_1\omega(x, \tau)$ имеет вид

$$\Pi_1\omega(x, 0)=-\overline{\omega}_1(x, 0)=-\varphi_\alpha(x, 0)\beta(x, 0)-\tilde{\omega}_1(x, 0).$$

Для $\beta(x, 0)$ аналогично [1] получаем выражение

$$\beta(x, 0) = -R^{-1}(x, \infty, \alpha)\,\widetilde{\Psi}(x, \infty) \times$$
$$\times \left\{\delta_2^0(x) + \int_0^\infty \widetilde{\Psi}^{-1}(x, s)\,[\Psi_2(x, s) - H(x, s)\Psi_1(x, s)]\,ds\right\}, \qquad (10)$$

где $H(x, s) = P_z(x, \Pi_0 z, \alpha^0(x))$, $\Psi(x, \tau)$ — решение задачи
$d\delta_2/d\tau = a_{22}\delta_2$, $\delta_2(x, 0) = E$, $R(x, t, \alpha) = H(x, \tau)[\varphi_\alpha(x, 0, \alpha)]_1 - [\varphi_\alpha(\bar{x}, 0, \alpha)]_2$,

$$\delta_2^0(x) = \{H(x, 0)\tilde{z}_1(x, 0) - \tilde{y}_1(x, 0)\},$$

$\tilde{z}_1(x, 0)$, $\tilde{y}_1(x, 0)$ — $(n-k)$- и k-мерные блоки $\widetilde{\omega}_1(x, 0)$, $\Pi_0 z$ — верхний $(n-k)$-мерный блок $\Pi_0\omega$, $\Psi_1(x, \tau)$ и $\Psi_2(x, \tau)$ — $(n-k)$- и k-мерные блоки вектора

$$\Psi(x, \tau) = F_\omega(x, \tau)\tau\omega_{0t}(x, 0) - F_\omega(x, 0)\tau\omega_{0t}(x, 0) +$$
$$+ [F_t(x, \tau) - F_t(x, 0)]\tau + F_\mu(x, \tau) - F_\mu(x, 0) - \Lambda(x, 0)\Pi_0\omega_x,$$

$[\varphi_\alpha]_1$ и $[\varphi_\alpha]_2$ — такие же блоки вектора φ_α.

Обозначим (10) через $\beta^0(x)$ и будем считать, что это — начальное значение для $\beta(x, t)$. Тогда $\Pi_1\omega(x, \tau)$ в силу оценок (4) будет удовлетворять неравенству

$$\|\Pi_1\omega(x, \tau)\| \leqslant c\exp(-\varkappa\tau), \quad \tau \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a. \qquad (11)$$

Таким образом, $\Pi_1\omega(x, \tau)$ полностью определено, а в выражение для $\overline{\omega}_1(x, t)$ входит неизвестная пока функция $\beta(x, t)$. Она определяется из условия разрешимости уравнения для $\overline{\omega}_2(x, t)$. Уравнение для $\beta(x, t)$ будет иметь вид

$$\beta_t + (g(x, t, \alpha)\overline{\varphi}_\alpha(x, t))^{-1} g(x, t, \alpha)\Lambda(x, t)\varphi_\alpha(x, t)\beta_x = F_1(\beta, x, t),$$

где $F_1(\beta, x, t)$ — известная функция.

Тем самым полностью определены члены асимптотики порядка μ. Определение следующих членов асимптотики проводится аналогично. На i-м шаге в выражение для $\overline{\omega}_i(x, t)$ войдет произвольная функция $\gamma(x, t)$. Из условия $\Pi_i\omega(x, \tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, $0 \leqslant x \leqslant a$ определится $\gamma(x, 0)$ в силу того, что $\det R(x, \infty, \alpha) \neq 0$. Далее из условия разрешимости уравнения для $\overline{\omega}_{i+1}(x, t)$ получится уравнение для $\gamma(x, t)$ вида

$$\gamma_t + (g(x, t, \alpha)\overline{\varphi}_\alpha(x, t))^{-1} g(x, t, \alpha)\Lambda(x, t)\varphi_\alpha(x, t)\gamma_x = F_i(\gamma, x, t),$$

причем начиная с $i = 1$ функции $F_i(\gamma, x, t)$ будут линейны по γ.

Обозначим L_1 решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \widetilde{\lambda}_1(x, t),$$

проходящее через точку $(0, 0)$, а через L_N — решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \widetilde{\lambda}_n(x, t),$$

проходящее через точку $(a, 0)$. Обозначим G область, ограниченную кривыми L_1, L_N и отрезком $[0, a]$ оси $0x$, а D_2 — пересечение областей D_1, G и R.

VIII. Пусть матрица $\Lambda(x, t)$ в области D_2, векторы $F(\omega, x, t, \mu)$ в области $D_2 \times (0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0) \times (\|\omega\| \leqslant \sigma)$ и $\omega^0(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant a$ имеют непрерывные производные по всем аргументам до $(n+2)$-го порядка включительно.

Теорема 1. *При выполнении условий I—VIII найдутся постоянные $\mu_0>0$ и $C_0>0$, такие, что при $0<\mu\leqslant\mu_0$ выполняется неравенство*

$$\|X_{nt}+\Lambda(x, t)X_{nx}-F(X_n, x, t, \mu)\|\leqslant C_0\mu^{n+1}, \qquad (x, t)\in D_2, \tag{12}$$

где

$$X_n=\sum_{i=0}^{n}\mu^i(\bar{\omega}_i(x, t)+\Pi_i\omega(x, \tau)).$$

Существование и единственность решения задачи (1), (2) при выполнении требований III и VIII в области D_2 доказаны, например, в [3], [4]. Неравенство (12) доказывается с помощью оценок типа (11), (17).

Теорема 2. *Пусть $\Lambda(x, t)=\lambda(x, t)E_n$. Тогда при выполнении условий I—VIII найдутся такие постоянные $\mu_0>0$ и $C_0>0$, что при $0<\mu\leqslant\mu_0$ в области D_2 выполняется неравенство*

$$\|\omega(x, t, \mu)-X_n\|\leqslant C_0\mu^{n+1}.$$

Теорему 2 можно доказать с помощью метода последовательных приближений аналогично [1, гл. 4] или [5, гл. 3].

Замечание. В случае, когда $\Lambda(x, t)=\lambda(x, t)E_n$, область D_1 совпадает с областью G, так как

$$(g(x, t, \alpha)\bar{\varphi}_\alpha(x, t))^{-1}\, g(x, t, \alpha)\Lambda(x, t)\bar{\varphi}_\alpha(x, t)=\lambda(x, t)E_n.$$

T. N. Sysoeva

ON A SINGULAR PERTURBATED SYSTEM WITH PARTIAL DERIVATIVES OF THE FIRST ORDER

We study the Cauchy problem for the systems as in the title. We find an asymptotic decomposition for the solution and estimate the remainder.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М., 1978.
2. Hsieh P. F., Sibuya Y. A. A global analysis of matrices of functions of several variables.— J. Math. Anal. and Appl., 1966, 14, N 2, 332—340.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964.
4. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М., 1979.
5. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.

Поступила в редакцию
09.11.81

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 1

УДК 517.12

М. Р. Ковтун

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ИНТУИЦИОНИСТСКОГО АНАЛИЗА, ЭКВИВАЛЕНТНОЙ КЛАССИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

1. В связи с построением конструктивной модели для теории бар-рекурсивных функционалов Скарпеллини в [1] и Лукхардтом в [2] был сформулирован принцип релятивизованной бар-индукции, добавление которого к базисной системе Клини [3] делало последнюю равносиль-