

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. V. Lapin, O. A. Nehamkina, M. Kh. Strelets, A multiparameter algebraic model of steady turbulent flow in a round pipe with sand roughness, *TVT*, 1995, Volume 33, Issue 5, 731–737

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt2996>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 21, 2025, 02:43:46



УДК 532.5.071.4

## МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ С ПЕСОЧНОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

© 1995 г. Ю. В. Лапин, О. А. Нехамкина, М. Х. Стрелец

Государственный технический университет, г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 28.07.94 г.

Предложена двуслойная многопараметрическая алгебраическая модель турбулентного установившегося течения в круглой трубе с песочной шероховатостью. Модель основана на обобщении трехпараметрической модели течения в трубе с гладкими стенками [1]. Модель позволяет описать изменение коэффициента сопротивления во всем исследованном диапазоне чисел Рейнольдса ( $Re \leq 10^6$ ) для значений параметра шероховатости  $R/h > 126$ . При меньших значениях этого параметра ( $R/h < 126$ ) удалось описать лишь переходные (с неполным проявлением шероховатости) режимы течения.

**Введение.** Установившееся течение в круглой трубе с песочной шероховатостью на стенках, так же как и аналогичное течение в трубе с гладкими стенками, принадлежит к числу наиболее изученных типов турбулентных течений. Классические опыты Никурадзе позволили определить основные закономерности течений в шероховатых трубах [2, 3]. Для описания и моделирования данной задачи предложены полуэмпирические модели турбулентности течения, первые из которых были получены более трех десятилетий назад.

Одна из первых алгебраических моделей, основанная на представлении о том, что элементы шероховатости являются источниками завихренности, противодействующими демпфирующему влиянию вязкости вблизи стенки, была предложена в работе Ван-Дрифта [4]. Согласно [4], путь турбулентного перемешивания  $l$  представлялся в виде

$$l = ky \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\eta}{A}\right) + \exp\left(-\frac{\eta}{A} \frac{B}{h_*}\right) \right], \quad (1)$$

где  $y$  – координата, отсчитываемая от стенки;  $\eta = yv_*'/\nu$  – переменная закона стенки;  $v_*' = \sqrt{\tau_w/\rho}$  – динамическая скорость;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\tau_w$  – напряжение трения на стенке;  $\rho$  – плотность;  $h_* = hv_*'/\nu$ ;  $h$  – высота бугорков шероховатости;  $k = 0,4$ ,  $A = 26$ ,  $B = 60$  – эмпирические константы.

Из соотношения (1) следует, что при  $h_* = 60$  обе экспоненты компенсируют друг друга и путь перемешивания  $l$  оказывается равным  $l = ky$ . С увеличением высоты бугорков шероховатости ( $h_* > 60$ ) путь перемешивания увеличивается: при  $h_* \rightarrow \infty$ ,  $l \rightarrow 2ky$ . Отмеченное обстоятельство позволяет учесть влияние шероховатости с по-

мощью простого приема, заключающегося в смещении начала координат при определении пути перемешивания на величину  $\Delta y$ , зависящую от  $h_*$ :  $\Delta y = \Delta y(h_*)$ . При таком подходе профили скоростей во внутренней области течения на шероховатой поверхности оказываются подобными профилю скорости на гладкой поверхности, но смещенными по координате  $\eta$ . Подобный прием в различных модификациях был использован в работах [5 - 9]. Анализ пределов применимости указанных моделей содержится в [9], а подробный обзор применения общих соображений размерности и подобия к развитым турбулентным течениям вдоль шероховатой стенки можно найти в работе [10].

**Четырехпараметрическая модель течения в трубе с шероховатыми стенками для значений параметров  $R/h \geq 126$ ,  $Re \leq 10^6$ .** В основу предлагаемой в данной работе модели установившегося турбулентного течения в круглой трубе с шероховатыми стенками положена двуслойная трехпараметрическая модель того же течения в трубе с гладкими стенками [1], базирующаяся на обобщении классической модели Прандтля–Ван-Дрифта–Клаузера, широко применяемой для расчетов характеристик турбулентных пограничных слоев [11, 12].

Согласно модели [1], пригодной для описания как турбулентных, так и переходных режимов ( $2,09 \times 10^3 \leq Re \leq 10^7$ ), течение в трубе делится на две области: внутреннюю с характерной для нее мелкомасштабной турбулентностью, включающую вязкий подслой, переходную и логарифмическую области, и внешнюю – область крупномасштабных когерентных структур (область закона следа).

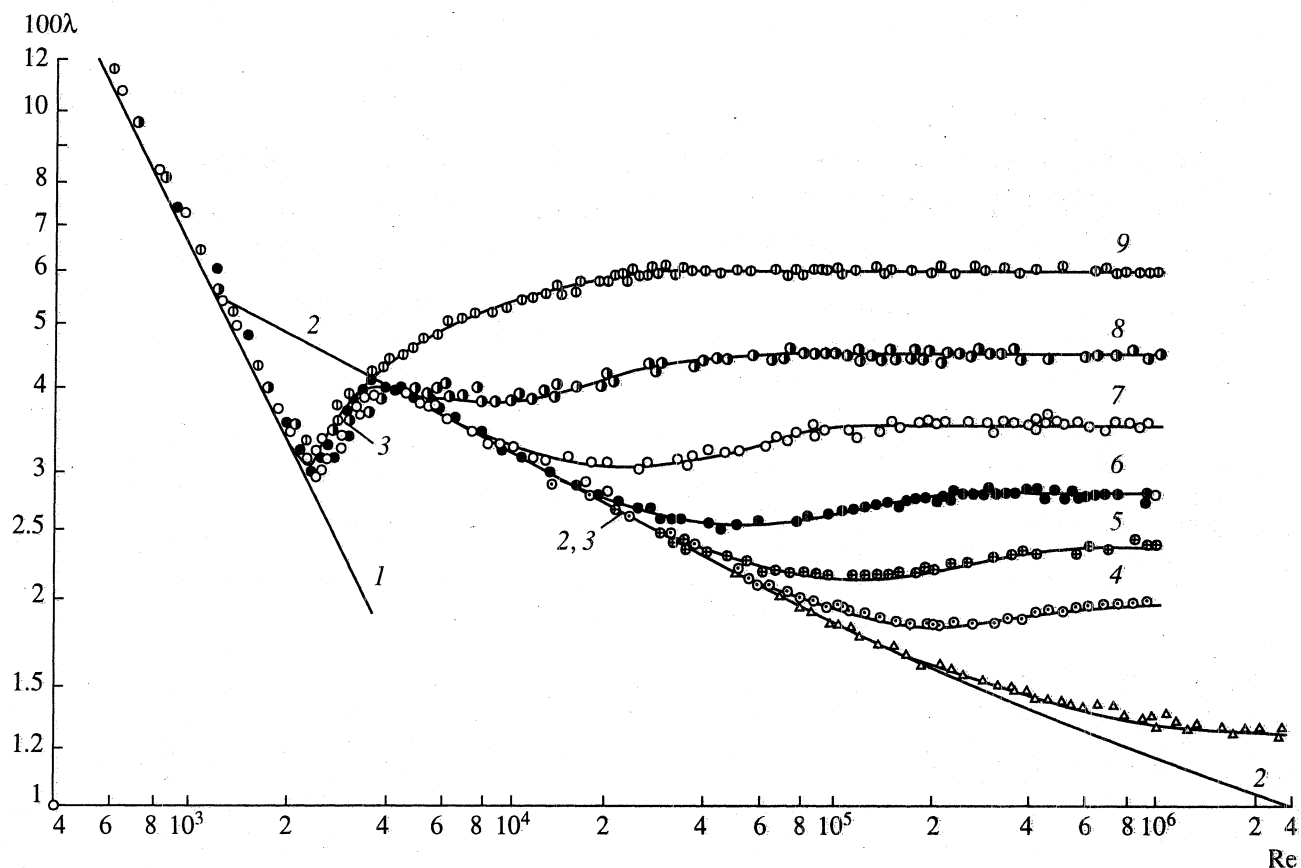


Рис. 1. Закон сопротивления для гладкой и шероховатый труб; 1 – ламинарное течение; 2 – турбулентное течение в гладкой трубе; 3 – переходное и турбулентное течение в гладкой трубе, модель [1]; кривые 4 – 9 – течения в шероховатой трубе: 4 –  $R/h = 507$ , 5 – 252, 6 – 126, 7 – 60, 8 – 30.6, 9 – 15.

Во внутренней области (при  $0 \leq y \leq y_m$ ) примем для эффективной вязкости  $\nu_{эф}$  модифицированную формулу Прандтля–Ван-Дрифта [4], включающую выражение для пути турбулентного перемешивания (1), в котором параметр  $B$  не считается постоянным ( $B = 60$ ), а полагается функцией параметра  $h_*$  ( $B = B(h_*)$ )

$$\nu_{эф} = \nu + l^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2)$$

$$l = ky \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( \frac{y}{R} \right) \frac{2S}{A} \right] + \exp \left[ - \left( \frac{y}{R} \right) \frac{2S B(h_*)}{A h_*} \right] \right\}, \quad (3)$$

$$S = \frac{1}{2} \frac{R \nu_*}{\nu}, \quad k = 0.4, \quad A = 26, \quad (4)$$

где  $R$  – радиус трубы.

Во внешней области (при  $y_m \leq y \leq R$ ) принимается выражение для эффективной вязкости  $\nu_{эф}$ ,

включающее модифицированную формулу Клаузера для турбулентной вязкости  $\nu_T$  [1]

$$\nu_{эф} = \nu + \nu_T, \quad \nu_T = K(\bar{\delta}^*) Re^* \nu, \quad (5)$$

$$Re^* = \frac{U_a \bar{\delta}^*}{\nu},$$

$$K(\bar{\delta}^*) = K_0 \exp(-13.5 \bar{\delta}^{*2}) \times \{ 1 - \exp[-21(0.5 - \bar{\delta}^*)] \}, \quad (6)$$

$$\bar{\delta}^* = \delta^* / R,$$

$$\delta^* = 2R \int_0^1 \left( 1 - \frac{u}{U_a} \right) \left( 1 - \frac{y}{R} \right) d \left( \frac{y}{R} \right), \quad (7)$$

$$K_0 = 0.020.$$

Здесь  $\delta^*$  – аналог толщины вытеснения для осесимметричного течения;  $u$  – проекция скорости на ось  $x$ ;  $U_a$  – скорость на оси трубы;  $y_m$  – координата границы между внутренней и внешней областью;  $K_0$  – эмпирическая постоянная.

Использованное ранее число Рейнольдса  $Re$  определяется через среднерасходную скорость  $\bar{u}$ , диаметр трубы  $d = 2R$  и кинематическую вязкость  $\nu$

$$Re = \frac{\bar{u}d}{\nu}, \quad \bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2},$$

$$Q = 2\pi \int_0^R u(R-y)dy, \quad (8)$$

где  $Q$  – расход через трубу.

Заметим, что введение понятия эффективной вязкости во внешней области  $\nu_{эф}$  вместо традиционной (турбулентной вязкости) связано с использованием этого соотношения для переходных режимов, в которых  $\nu_T \rightarrow 0$  при  $Re \rightarrow Re_{пер}$  ( $Re_{пер} = 2.09 \times 10^3$  – число Рейнольдса начала перехода).

Применительно к гладкой трубе ( $h_* = 0$ ) приведенная модель (2) - (7) позволила с высокой точностью описать интегральные и локальные характеристики не только при турбулентном, но и при переходных режимах течения ( $Re > 2.09 \times 10^3$ ) [1], что видно из сравнения расчетной и экспериментальной зависимостей коэффициента сопротивления  $\lambda(Re)$ , приведенных на рис. 1. На этом рисунке кривая 1 соответствует пуазейлевскому закону сопротивления

$$\lambda = 64/Re, \quad \lambda = \tau_w / \frac{1}{8} \rho \bar{u}^2, \quad (9)$$

кривая 2 – универсальному закону сопротивления

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \lg(Re \sqrt{\lambda}) - 0.8, \quad (10)$$

а кривая 3 получена на основе модели (2) - (7).

Из соотношений (2) - (7) следует, что обобщенная модель [1] содержит четыре безразмерных параметра:  $S$ ,  $\bar{\delta}^*$ ,  $Re^*$  и  $h_*$ .

Параметр  $S$  определяет относительную протяженность области взаимодействия процессов вязкого и турбулентного переноса (толщину вязкого подслоя и переходной области).

Параметр  $\bar{\delta}^*$  вследствие условия равновесия [2]

$$\tau_w = -\frac{dp}{dx} \frac{R}{2},$$

имеющего место для установившегося течения в круглой трубе, эквивалентен параметру равновесности Клаузера

$$\beta = \left| \frac{dp}{dx} \right| \frac{\bar{\delta}^*}{\tau_w} = 2 \frac{\bar{\delta}^*}{R} = 2\bar{\delta}^*, \quad (11)$$

который определяет характер взаимодействия внутренней (пристеночной) и внешней областей

течения и, следовательно, режим течения: ламинарный, переходный, турбулентный. Для ламинарного режима течения с пуазейлевским профилем скорости:  $\beta = 1$ ,  $\bar{\delta}^* = 0.5$ . Для турбулентного режима течения в предположении о полной заполненности профиля скоростей:  $\bar{\delta}^* \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  при  $Re \rightarrow \infty$ . Таким образом, диапазон изменения параметров  $1 \geq \beta \geq 0$ ,  $0.5 \geq \bar{\delta}^* \geq 0$  охватывает все возможные режимы установившегося течения в круглой трубе от ламинарного до турбулентного.

Параметры  $S$  и  $\bar{\delta}^*$  относятся к структурным параметрам, т.е. параметрам, определяющим структуру течения и характер взаимодействия отдельных его областей.

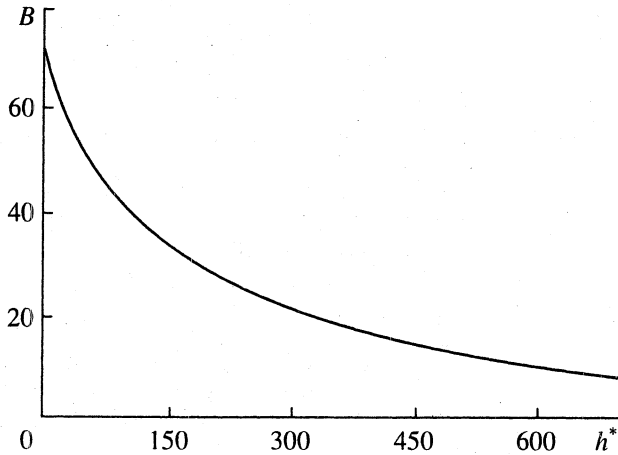
Третий из безразмерных параметров, входящий в модель (2) - (7),  $Re^*$ , является глобальным параметром, определяющим состояние и характер процессов переноса во всей области течения: ламинарный, переходный и турбулентный.

При описании течения в трубе со стенками, покрытыми геометрически подобной шероховатостью, в уравнения для гладкой трубы добавляется всего лишь один линейный масштаб  $h$  – высота бугорков шероховатости, а в число определяющих глобальных безразмерных параметров входит параметр  $R/h$ . Особенность рассматриваемой задачи, как это непосредственно следует из опытов Никурадзе [2], заключается в целесообразности введения в анализ второго безразмерного параметра  $h_* = h\nu^*/\nu$ , хотя независимым является лишь параметр  $R/h$ .

Параметр  $h_*$ , как известно [2], характеризует режимы течения на шероховатых поверхностях. При  $h_* \leq 5$  имеет место режим течения без проявления шероховатости, при  $5 \leq h_* \leq 60$  – переходный режим, при  $h_* \geq 60$  – режим с полным проявлением шероховатости.

Нетрудно видеть, что параметр  $h_*$ , как и параметр  $S$ , включающий в себя вязкостный линейный масштаб  $\nu/\nu^*$ , должен определять описание процессов переноса в пристеночной области. В частности, значение параметра  $h_*$  вошло в формулу (1) для пути перемешивания  $l$  [4].

Что касается места и роли параметра  $R/h$  в описании процессов переноса, то можно ожидать, что существует такой диапазон изменения параметров  $h_*$  и, соответственно,  $R/h$ , в котором последний не оказывает влияния на процессы переноса во внешней области течения, и можно ограничиться лишь учетом влияния параметра  $h_*$  на перенос во внутренней области. С учетом указанного возможного различия в характере моделей турбулентности при больших и малых значениях параметра  $R/h$  анализ рассматриваемого течения проводился в два этапа.

Рис. 2. Вид зависимости  $B(h_*)$ .

На первом этапе, т.е. при больших значениях параметра  $R/h$ , использовалась сформулированная выше модель (2) - (7), не учитывающая влияние шероховатости на турбулентную вязкость во внешней области. При этом эмпирическая функция  $B(h_*)$ , входящая в (3), определялась из условия совпадения расчетного (полученного в результате численного интегрирования системы уравнений узкого канала) и экспериментального (полученного Никурадзе [2, 3], рис. 1, кривые 4 - 9) значений коэффициента сопротивления  $\lambda$  при различных значениях числа  $Re$  и параметра шероховатости  $R/h$ . Полученная таким образом кривая  $B(h_*)$  построена на рис. 2, а аппроксимация этой кривой может быть представлена в следующем виде:

$$B(h_*) = 50.8 \exp(-0.0029h_*) \times [1 + 0.5 \exp(-0.0215h_*)]. \quad (12)$$

С помощью этой зависимости удалось описать изменение коэффициента сопротивления  $\lambda$  во всем исследованном диапазоне чисел Рейнольдса (до  $Re = 10^6$ ) для трех значений параметра шероховатости:  $R/h = 507, 252$  и  $126$ . О характере соответствия расчетных и опытных данных при указанных значениях параметров  $Re$  и  $R/h$  можно судить по рис. 3.

Подводя некоторые итоги, отметим, что предложенная четырехпараметрическая модель, включающая соотношения для эффективной вязкости во внутренней области (2) - (4), (12) и во внешней области (5) - (7), позволяет описать установившееся течение в трубе с шероховатыми стенками при изменении определяющих параметров в диапазоне  $Re \leq 10^6, R/h \geq 126$ .

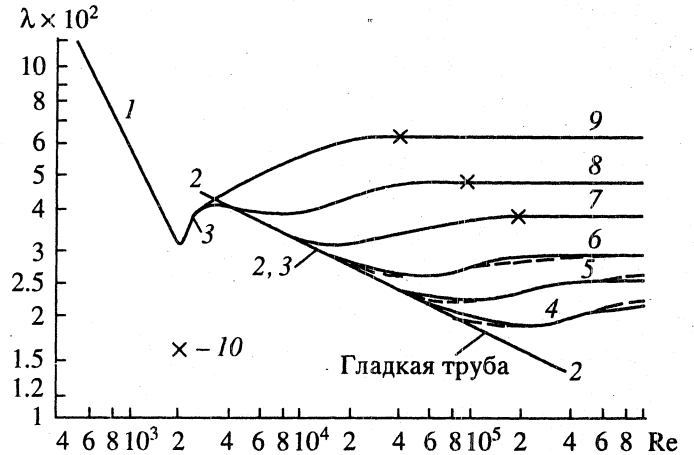


Рис. 3. Закон сопротивления для гладкой и шероховатых труб. Обозначения те же, что и на рис. 1. 4 - 9 - эксперимент, штриховые кривые 4 - 6 - расчет по четырехпараметрической модели; 10 - граница применимости шестипараметрической модели.

**Шестипараметрическая модель для переходных (с неполным проявлением шероховатости) режимов течения при  $R/h < 126$ .** При значениях параметра  $R/h < 126$  возникла необходимость учета влияния этого параметра на турбулентную вязкость во внешней области. При этом оказалось, что помимо параметра  $R/h$  на внешнюю область оказывает влияние и "главный" определяющий параметр - число Рейнольдса  $Re$ . Для учета этого влияния в модифицированную формулу Клаузера для  $v_T$  (5) был введен безразмерный параметр  $\alpha_K = \alpha_K(Re, R/h)$ , т.е.

$$v_T / v = \alpha_K(Re, R/h) K(\bar{\delta}^*) Re^*, \quad (13)$$

где функция  $K(\bar{\delta}^*)$  выражается тем же соотношением (6), что и при течении в трубе с гладкими стенками.

Нетрудно видеть, что функция  $\alpha_K(Re, R/h)$  представляет собой отношение турбулентной вязкости во внешней области течения в шероховатых трубах  $v_T(Re, R/h)$  и того же коэффициента при течении в гладкой трубе  $v_T(Re, \infty)$ , т.е.

$$\alpha_K\left(Re, \frac{R}{h}\right) = \frac{v_T(Re, R/h)}{v_T(Re, \infty)}. \quad (14)$$

Вид зависимости  $\alpha_K(Re, R/h)$  был определен тем же способом, что и зависимость параметра  $B(h_*)$  в четырехпараметрической модели, т.е. из условия совпадения расчетных коэффициентов сопротивления с его опытными значениями. Полученная в результате зависимость  $\alpha_K$  от величин  $Re$  и  $R/h$  представлена на рис. 4. Ее использование позволило провести расчет коэффициента сопротивления при малых значениях параметра шероховатости  $R/h$ , равных 60, 30 и 15 вплоть до на-

ступления режимов с полным проявлением шероховатости (на рис. 3 предельные значения чисел  $Re$ , до которых может быть использована представленная модель обозначены крестиком).

В целом о границах применимости предложенных моделей можно судить по рис. 5, на котором цифрами 1 и 2 обозначены соответственно области применимости четырехпараметрической и шестипараметрической моделей, а цифрой 3 – область режимов течения с полным проявлением шероховатости (в данной работе не рассматривалась).

Не обсуждая детально возможные причины, лежащие в основе отмеченных выше ограничений применимости предложенных моделей, заметим, что режим с полным проявлением шероховатости при малых значениях параметра шероховатости  $R/h$ , очевидно, отличается механизмом переноса от переходного режима и должен быть рассмотрен самостоятельно.

Из полученных результатов особого внимания заслуживает факт совместного влияния числа  $Re$  и параметра шероховатости  $R/h$  при малых значениях этого параметра на процессы переноса во внешней области (шестипараметрическая модель). Вопрос о том, является ли это следствием особенностей рассматриваемой модели или проявлением реальных свойств течения, не может быть, по-видимому, решен без экспериментального исследования структуры течения при малых  $R/h$  (в частности, изучения характера изменения относительной протяженности внутренней и внешней областей в зависимости от этих параметров, т.е. вида зависимости  $y_m/\delta = f(Re, R/h)$ ).

Далее обратимся к рассмотрению некоторых результатов, характеризующих свойства рассматриваемого течения.

**Результаты расчетов.** Обратимся к некоторым результатам расчетов локальных характеристик рассматриваемого течения, полученным с использованием этих моделей.

На рис. 6 представлены профили скоростей в переменных закона стенки, полученные при различных числах  $Re$  и значении параметра  $R/h = 126$  на основе четырехпараметрической модели. Точками на рисунке отмечены координаты вершин бугорков шероховатости  $\eta_h = h_* = h v_* / \nu$ , связанные с параметрами  $Re$  и  $R/h$  и с величиной коэффициента сопротивления  $\lambda$  соотношением

$$\eta_h = h_* = \frac{Re}{4(R/h)} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \quad (15)$$

а короткими вертикальными черточками обозначена граница внутренней и внешней областей.

Кривые 1, 2 на рис. 6 получены для переходного от ламинарного к турбулентному режима течения ( $Re = 2.6 \times 10^3$  и  $4 \times 10^3$ ); для этих кривых  $h_* < 5$ .

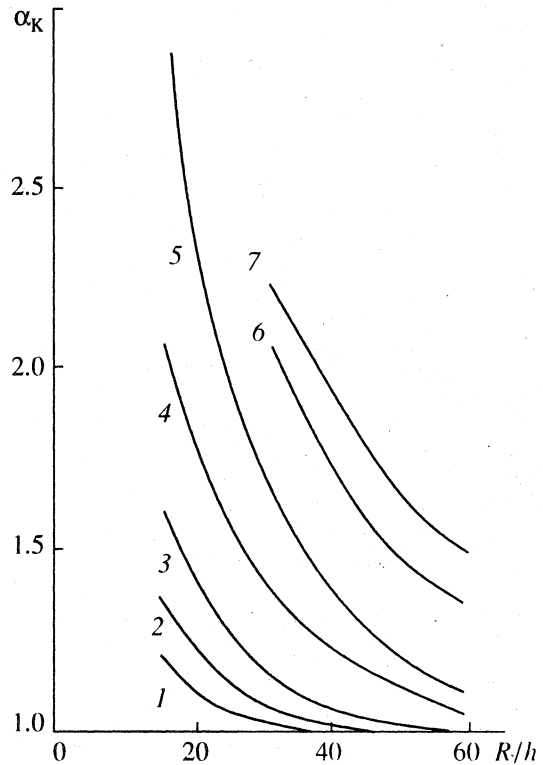


Рис. 4. Вид зависимости  $\alpha_k(Re, R/h)$ : 1 –  $Re = 4 \times 10^3$ , 2 –  $6 \times 10^3$ , 3 –  $10^4$ , 4 –  $2 \times 10^4$ , 5 –  $4 \times 10^4$ , 6 –  $10^5$ , 7 –  $2 \times 10^5$ .

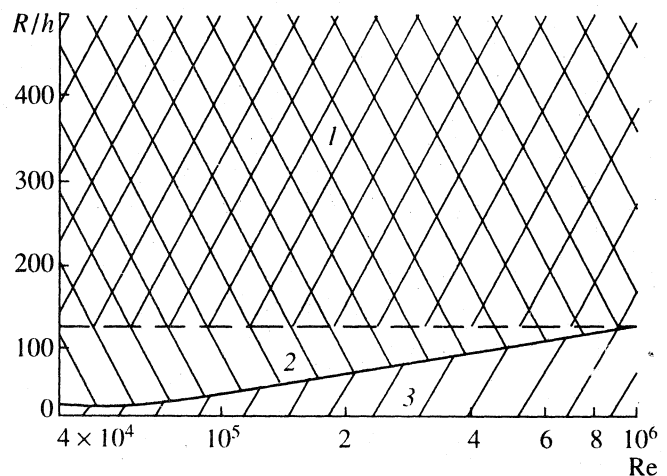
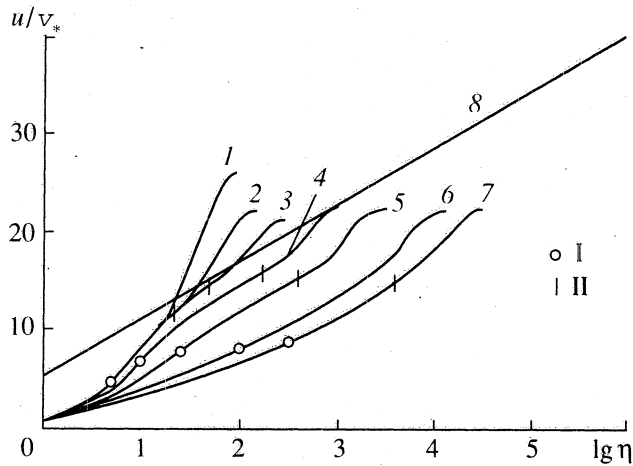


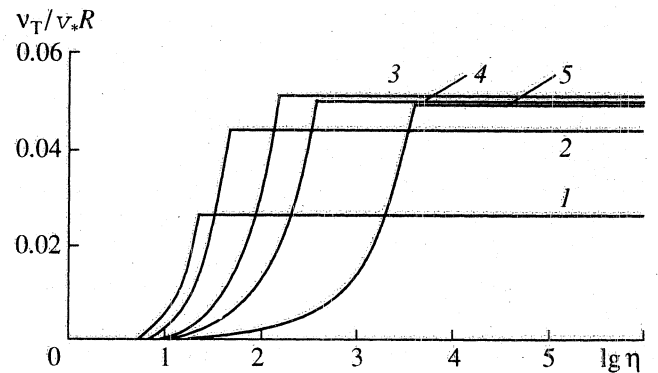
Рис. 5. Области применимости моделей: 1 – четырехпараметрическая модель, 2 – шестипараметрическая модель, 3 – область режимов течения с полным проявлением шероховатости для  $R/h < 1.25$ .

Для кривой 3, соответствующей турбулентному режиму течения ( $Re = 10^4$ ), значение  $h_* = 3.5$ . Таким образом, кривые 1 – 3 соответствуют режиму течения без проявления шероховатости ( $h_* < 5$ ).

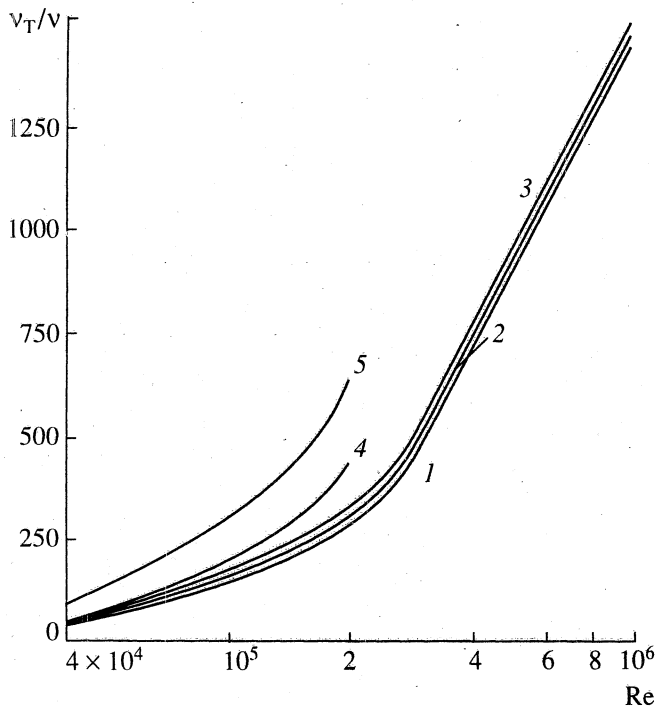
С ростом числа Рейнольдса при фиксированном значении параметра  $R/h$ , как это следует из соотношения (15), параметр  $h_*$  растет почти ли-



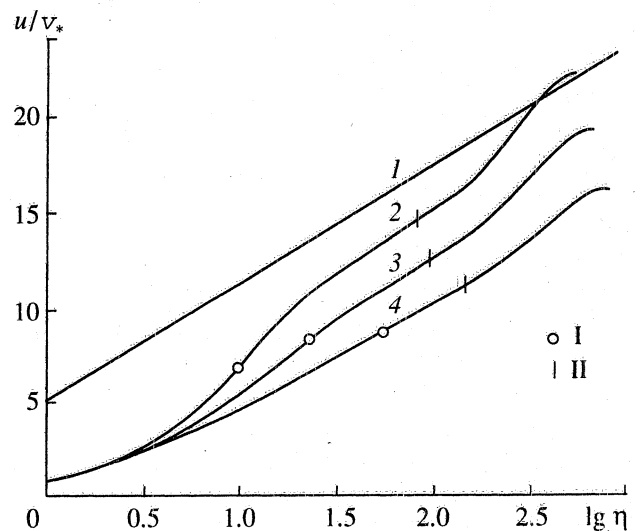
**Рис. 6.** Профили скорости при  $R/h = 126$ : 1 –  $Re = 2.6 \times 10^3$ , 2 –  $4 \times 10^3$ , 3 –  $10^4$ , 4 –  $4 \times 10^4$ , 5 –  $10^5$ , 6 –  $4 \times 10^5$ , 7 –  $10^6$ , 8 – логарифмический профиль  $u/v_* = 5.5 + 5.75 \lg \eta$ ; I – координаты вершин бугорков шероховатости  $\eta_h = h_*$ ; II – граница внутренней и внешней областей.



**Рис. 7.** Распределение турбулентной вязкости по сечению трубы при  $R/h = 126$ : 1 –  $Re = 4 \times 10^3$ , 2 –  $10^4$ , 3 –  $4 \times 10^4$ , 4 –  $10^5$ , 5 –  $10^6$ .



**Рис. 8.** Зависимость турбулентной вязкости во внешней области от числа Рейнольдса: 1 –  $R/h = 507$ , 2 – 252, 3 – 126, 4 – 60, 5 – 30.6.



**Рис. 9.** Профили скорости при  $Re = 2 \times 10^4$ : 1 – логарифмический профиль  $u/v_* = 5.5 + 5.571 \lg \eta$ , 2 –  $R/h = 60$ , 3 – 30.6, 4 – 15; I и II то же, что на рис. 6.

нейно, поскольку коэффициент сопротивления  $\lambda$  в этом случае изменяется незначительно (порядка 10%). Это видно из табл. 1, в которой, помимо значения параметра  $h_*$  приведены координаты границы внутренней и внешней областей  $\eta_m$  и от-

ношение высоты бугорков шероховатости  $h$  к масштабу (протяженности) внутренней области  $y_m$ .

Как видно из табл. 1, бугорки шероховатости “занимают” лишь незначительную (меньше 10%) часть внутренней области.

Таблица 1

$R/h = 126$					
Re	$10^4$	$4 \times 10^4$	$10^5$	$4 \times 10^5$	$10^6$
$h_*$	3.5	12.6	32	133	335
$\eta_m$	50	158	400	1580	4000
$h/y_m$	0.070	0.080	0.080	0.084	0.084

О влиянии числа Рейнольдса на распределение турбулентной вязкости по сечению трубы при  $R/h = 126$  можно судить по рис. 7.

На рис. 8 представлена зависимость турбулентной вязкости во внешней области от числа Re и параметра шероховатости  $R/h$ . Как следует из рисунка, при значениях  $R/h \geq 126$  шероховатость не влияет на максимальное значение  $\nu_T$ , которое остается таким же, как в трубе с гладкими стенками. Этот результат является вполне естественным, поскольку рассматриваемые режимы течения удалось описать четырехпараметрической моделью, в которой турбулентная вязкость во внешней области на зависит от шероховатости стенки.

Обратимся к рассмотрению результатов для малых значений параметра  $R/h$ . На рис. 9 приведены профили скоростей в переменных закона стенки при числе  $Re = 2 \times 10^4$  и значениях параметра шероховатости  $R/h$ , равных 15, 30.6 и 60, полученные на основе шестипараметрической модели. Здесь, так же как и на рис. 6, точками

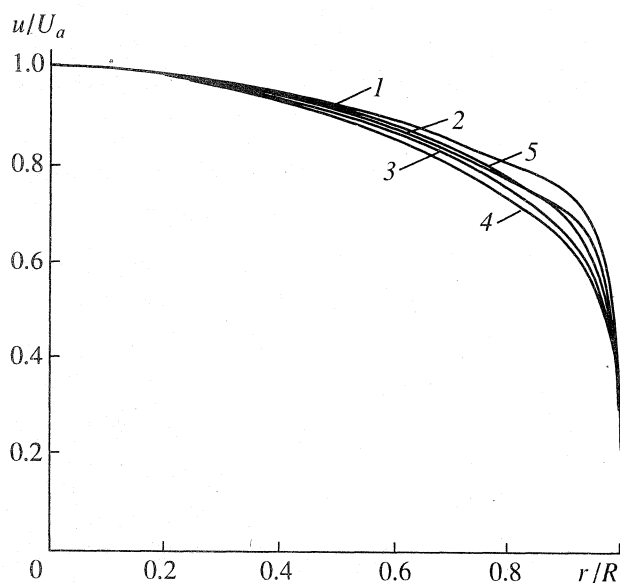


Рис. 10. Профили скорости при  $Re = 2 \times 10^5$ : 1 –  $R/h = 507$ , 2 – 252, 3 – 126, 4 – 60, 5 – 30.6.

обозначены координаты вершин бугорков шероховатости, а короткими вертикальными черточками – граница внутренней области. Оценка параметра  $h/y_m$  для малых значений  $R/h$ , равных 15 и 30.6, показывает, что этот параметр равен примерно 0.25, т.е. бугорки шероховатости “занимают” около четверти внутренней области. При подобных обстоятельствах, как это видно из рис. 8, шероховатость оказывает существенное влияние на турбулентную вязкость во внешней области (ср. кривые 4, 5 для  $R/h = 60$  и  $R/h = 30.6$ ).

На рис. 10 представлены профили скоростей  $u/U_a = f(r/R)$  при  $Re = 2 \times 10^5$  и различных значениях параметра шероховатости. Как видно из рисунка, с уменьшением параметра  $R/h$  профили скоростей становятся менее заполненными, что согласуется с известными опытными данными [2].

Полученные в данной работе особенности локальных характеристик течения (профилей скорости и турбулентной вязкости, относительной высоты бугорков шероховатости  $h_*$  и  $h/y_m$ ) при различных значениях параметров Re и  $R/h$  нуждаются в экспериментальном подтверждении. Особого внимания при этом заслуживает изучение режимов шероховатости при малых значениях параметра  $R/h \leq 60$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта: 93-013-16404).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лапин Ю.В., Нехамкина О.А., Стрелец М.Х. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 31.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
4. Van Driest E.R. // JAS. 1956. V. 23. № 11.
5. Ротта И.К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1967.
6. Миллиончиков М.Д. // Атомная энергия. 1970. Т. 28. № 3. С. 207.
7. Sebesci T., Chang K.C. // AIAA J. 1978. V. 6. № 7.
8. Ходорковский Я.С. Судовые системы // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та, 1979. С. 55.
9. Колесников А.В. // В кн.: Механика неоднородных и турбулентных потоков. М.: Наука, 1989.
10. Кадер Б.А., Яглом А.М. // В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. Т. 18. С. 3. М.: ВИНТИ, 1984.
11. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989.
12. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М.: Наука, 1982.