УДК 519.248:33

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

С. Б. Шлосман

ВВЕДЕНИЕ

Корреляционным неравенством называется неравенство, включающее в себя средние значения случайных величин. Такие неравенства использовались в статистической механике с самого ее возникновения, однако в настоящее время частота появления новых неравенств и их применений резко возросла. Это объясняется, может быть, тем фактом, что во многих задачах корреляционные неравенства являются единственным инструментом исследования.

В настоящий обзор включены только вопросы классической статистической механики решетчатых систем и не рассматриваются вопросы квантовой механики и теории поля. Однако литература по этим темам включена в библиографию.

Содержание обзора следующее: В первом параграфе вводятся основные определения и обозначения. Второй параграф посвящен неравенству Пайерлса. В третьем параграфе содержится доказательство неравенств Гриффитса и родственных им неравенств. Все эти неравенства (их более десяти) получаются как следствие сформулированной в этом параграфе теоремы А. Четвертый параграф посвящен приложениям этих неравенств. В пятом параграфе содержится неравенство ФКЖ и его приложения. В шестом параграфе собраны некоторые другие неравенства.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Начнем с введения необходимых обозначений. Пусть
X — измеримое пространство с σ-алгеброй B_X;
μ — σ-конечная мера на (X, B_X);
$\mathbf{Z}^\nu$ — ν-мерная целочисленная решетка;
если A — некоторое подмножество $\mathbf{Z}^\nu$, то
$\bar{A}$ — его дополнение;
$|A|$ — его мощность,

X^A — множество конфигураций на A, т. е. функций $x_A: A \to X$; μ_A — прямое произведение мер $\underset{A}{\otimes}\mu_t$, $t \in A$.

Потенциалом (или взаимодействием) называется семейство измеримых функций $U = \{U_A; U_A: X^A \to \mathbf{R}^1, |A| < \infty\}$.

Потенциал $U = \{U_A\}$ называется парным, если $U_A \equiv 0$ как только $|A| > 2$. Он называется парным взаимодействием ближайших соседей, если, дополнительно, $U_{\{s,t\}} \equiv 0$ как только $|s - t| > 1$, $s, t \in \mathbf{Z}^\nu$. Потенциал называется ферромагнитным (или притягивающим), если для всех A, $U_A \leqslant 0$.

Пусть $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$, $|\Lambda| < \infty$, $x_\Lambda \in X^\Lambda$, $\bar{x} \in X^{\mathbf{Z}^\nu}$. Для $A \subset \mathbf{Z}^\nu$, $|A| < \infty$ положим

$$x_A(t) = \begin{cases} x_\Lambda(t), & t \in \Lambda, \\ \bar{x}(t), & t \in \bar{\Lambda}. \end{cases}$$

Предположим, что ряд

$$U(x_\Lambda \mid \bar{x}) \equiv \sum_{A,\, A \cap \Lambda \neq \varnothing} U_A(x_A)$$

сходится абсолютно. Его сумма называется энергией конфигурации x_Λ при граничном условии $\bar{x}$. Мы будем изучать распределение вероятностей $P_{\Lambda, \bar{x}}$ на пространстве X^Λ, задаваемое по мере μ_Λ плотностью

$$\exp\{-U(x_\Lambda \mid \bar{x})\} / Z_\Lambda(\bar{x}),$$

где

$$Z_\Lambda(\bar{x}) = \int_{X^\Lambda} \exp\{-U(x_\Lambda \mid \bar{x})\}\, d\mu_\Lambda(x_\Lambda) \tag{1}$$

(мы предполагаем, что интеграл в (1) существует), а также вероятностные меры P на пространстве $X^{\mathbf{Z}^\nu}$, такие что для любого $\Lambda \in \mathbf{Z}^\nu$, $|\Lambda| < \infty$ найдется мера $P_{\bar{\Lambda}}$ на $X^{\bar{\Lambda}}$, для которой имеет место равенство:

$$P(dx_{\mathbf{Z}^\nu}) \equiv P(dx_\Lambda, dx_{\bar{\Lambda}}) = \exp\{-U(x_\Lambda \mid x_{\mathbf{Z}^\nu})\} P_{\bar{\Lambda}}(dx_{\bar{\Lambda}}). \tag{2}$$

Мера $P_{\Lambda, \bar{x}}$ называется гиббсовским состоянием в сосуде Λ с граничным условием $\bar{x}$, соответствующим взаимодействию U, а мера P — гиббсовским состоянием в бесконечном объеме с взаимодействием U (ср. Р. Л. Добрушин, [2]).

Всякое состояние, имеющее вид (2), есть выпуклая комбинация пределов мер $P_{\Lambda, \bar{x}}$ при $\Lambda \to \mathbf{Z}^\nu$ с различными $\bar{x}$ ([2]).

Если f — измеримая функция на X^Λ, то через $\langle f \rangle_{U, \Lambda, \bar{x}}$ мы будем обозначать ее интеграл по мере $P_{\Lambda,x_{\overline{\Lambda}}}$, а через $\langle f \rangle_{U,\overline{x}}$ — интеграл по предельной мере $\lim\limits_{\Lambda\to Z^\nu} P_{\Lambda,\overline{x}}$ (если она существует).

§ 2. НЕРАВЕНСТВО ПАЙЕРЛСА

Исторически первым применением корреляционных неравенств к проблеме фазовых переходов является, по-видимому, доказательство Пайерлса [126] наличия фазового перехода в простейшей двумерной модели Изинга, которое было уточнено Р. Л. Добрушиным [1] и Гриффитсом [64]. В этой модели

$$X=R^1,\ d\mu(x)=(\delta(x-1)+\delta(x+1))\,dx,$$

а взаимодействие является парным ферромагнитным взаимодействием ближайших соседей и имеет вид

$$U_{\{s,t\}}(x_s,\ x_t)=-\beta x_s x_t,\ \beta>0. \tag{3}$$

(Константа β называется обратной температурой).

Основная идея доказательства состоит в следующем.

Конфигурацию в модели Изинга можно описать заданием набора контуров $\{\gamma\}$; контур γ разделяет две соседние точки $s,\ t \in Z^\nu$, если $x_s \neq x_t$. Пайерлс нашел оценку вероятности того, что в конфигурации присутствует контур γ. Обозначим через $I_\gamma(x_\Lambda)$ функцию, равную 1, если контур содержится в конфигурации x_Λ и 0 — в противном случае. Неравенство Пайерлса имеет вид:

$$\langle I_\gamma \rangle_{U,\Lambda,\overline{x}} \leqslant \exp\{(-\beta/2)\,\Gamma(\gamma)\}, \tag{4}$$

где $\Gamma(\gamma)$ — длина контура γ. С помощью неравенства (4) нетрудно доказать, что для достаточно больших β предельные точки двух последовательностей $P_{\Lambda_n},\ \overline{x}_+,\ P_{\Lambda_n},\ \overline{x}_-$ не совпадают. (Здесь $\Lambda_n \to Z^\nu$ при $n\to\infty$, $\overline{x}_+\equiv+1$, $\overline{x}_-\equiv-1$). Таким образом, существует по крайней мере, два гиббсовских состояния в бесконечном объеме, отвечающих взаимодействию (3). Эта ситуация называется явлением разделения фаз.

Контурная техника и связанное с ней неравенство (4) нашли себе очень широкое применение. Р. Л. Добрушин применил их к системам с отталкиванием ($U\geqslant 0$) и к некоторым системам со знакопеременным взаимодействием, где притяжение в некотором смысле больше отталкивания [22]. В. А. Малышев с их помощью доказал для больших β существование разделения фаз в классической анизотропной модели Гейзенберга:

$$X=\{x\in R^3,\ \|x\|=1\};$$

взаимодействие — парное, ближайших соседей,

$$U_{\{s,t\}}(x_s,\ x_t)=-\beta\,(x_s^{(1)}x_t^{(1)}+x_s^{(2)}x_t^{(2)}+\alpha x_s^{(3)}x_t^{(3)});$$

параметр $\alpha > 1$ называется коэффициентом анизотропии [105]. Жинибр [54] доказал наличие фазовых переходов в некоторых квантовых моделях (в этом случае пространство X представляет собою пространство функций на отрезке $[0, 1]$, принимающих значения ± 1 и имеющих конечное число точек разрыва).

Глубоким обобщением контурных методов является цикл работ С. А. Пирогова и Я. Г. Синая [4—6].

§ 3. НЕРАВЕНСТВА ТИПА ГРИФФИТСА

Новые возможности, до сих пор не исчерпанные, появились у исследователей с открытием неравенств Гриффитса [65—70] и родственных им неравенств.

Все известные на сегодня неравенства типа Гриффитса можно установить единым способом как следствие следующей простой теоремы (ср. Хегерфельд [80], Сильвестр [144]).

Пусть $X = \mathbf{R}^1$, и μ — некоторая положительная мера на $\mathbf{R}^1$ такая, что все встречающиеся ниже интегралы сходятся.

Теорема А. Пусть $V \subset \mathbf{Z}^\nu$, $|V| < \infty$, $V = V_+ \cup V_0 \cup V_-$, $V_+ \cap V_- = V_+ \cap V_0 = V_- \cap V_0 = \varnothing$ и $\Phi: V_+ \to V_-$ — взаимно однозначное отображение. Предположим, что функция $U(x_V | \bar{x})$ является полиномом по переменным x_t, $t \in V$. Положим

$$\alpha_t = (x_t + x_{\Phi t})/\sqrt{2}, \quad t \in V_+,$$
$$\beta_t = (x_t - x_{\Phi t})/\sqrt{2}, \quad t \in V_+,$$
$$\gamma_t = x_t, \quad t \in V_0,$$

и выразим многочлен $U(x_V | \bar{x})$ через переменные $\{\alpha_t, \beta_t, \gamma_t\}$. Предположим, что

$$-U(\alpha_t, \beta_t, \gamma_t | \bar{x}) = P(\Gamma_1) + Q(\Gamma_2), \tag{5}$$

где Γ_1 и Γ_2 — разбиение множества всех переменных $\{\alpha_t, \beta_t, \gamma_t\}$ на два подмножества, причем полином P является полиномом с положительными коэффициентами от переменных $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t \in \Gamma_1$. Предположим дополнительно, что для любого одночлена M от переменных из множества Γ_1 с положительным коэффициентом

$$\int_{\mathbf{R}^{|V|}} M \exp\{Q(\Gamma_2)\}\, g(x_V)\, d\mu_V(x_V) \geqslant 0, \tag{6}$$

где g — некоторая функция (например, $g \equiv 1$). Тогда для любой функции $f(x_V)$ из замыкания пространства полиномов от переменных α_t, β_t, $\gamma_t \in \Gamma_1$ с положительными коэффициентами (которое мы обозначим через $\mathscr{C}(\Gamma_1)$) справедливо неравенство

$$\langle fg \rangle_{U, V, \bar{x}} \geqslant 0.$$

Доказательство теоремы по существу содержится в ее формулировке. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда функция $f(x_V)$, выраженная в переменных $\{\alpha_t, \beta_t, \gamma_t\}$, представляет собой одночлен от переменных из множества Γ_1. Нас интересует неотрицательность интеграла

$$\int f(x_V)\, g(x_V) \exp\{P(\Gamma_1) + Q(\Gamma_2)\}\, d\mu_V(x_V). \tag{7}$$

Разлагая экспоненту $\exp\{P(\Gamma_1)\}$ в ряд, мы сводим интеграл (7) к сумме интегралов вида (6), каждый из которых неотрицателен по условию. Доказательство окончено.

Таким образом, для доказательства какого-нибудь неравенства надо:

(I) выделить из функции взаимодействия группу переменных, входящих в нее с положительными коэффициентами (как в (5)) и

(II) установить их положительную коррелированность по отношению к мере $g(x_V)\exp\{Q(\Gamma_2)\}d\mu_V(x_V)$.

Проиллюстрируем указанный принцип большим количеством примеров. В каждом из них мера μ будет симметричной. Функция g будет тождественно равна 1, за исключением пункта п.

а) **Первое неравенство Гриффитса — Келли — Шермана (ГКШ).** (Гриффитс [65—70], Келли и Шерман [89], Жинибр [55, 56], Сильвестр 144]). Пусть

$$U_A(x_A) = -\sum_{i_A} I_{A, i_A} x_A^{i_A}, \tag{8}$$

где $i_A = \{i_{t_1}, \ldots, i_{t_{|A|}}\}$ — мультииндекс, $i_t \in Z^+$, $x_A^{i_A} = \prod_{t \in A} x_t^{i_t}$. Предположим, что $I_{A, i_A} \geqslant 0$, $\bar{x} \geqslant 0$ (ферромагнитность). (На самом деле достаточно предполагать, что $I_{A, i_A} \geqslant 0$ при $|A| \geqslant 2$ и при $|A| = 1$, $A = \{t\}$, i_t — нечетно, так как множитель $\exp\left\{\sum_t I_{\{t\}, 2l} x_t^{2l}\right\}$ можно включить в меру $d\mu(x_t)$, в силу его симметричности и положительности). Тогда для любых C, i_C

$$\langle x_C^{i_C} \rangle \geqslant 0. \tag{9}$$

Доказательство. Положим $V = V_0 = \Lambda$, $\Gamma_2 = \varnothing$:

(I) — Положительность коэффициентов многочлена $P(\Gamma_1) = -U(x_\Lambda \mid \bar{x})$ имеется по условию.

(II) — В силу симметричности меры μ, интеграл

$$\int x_B^{i_B} d\mu_\Lambda(x_\Lambda), \quad B \subset \Lambda$$

равен нулю, если хотя бы одно из чисел i_t, $t \in B$, нечетно; в противном случае подынтегральное выражение неотрицательно.

b) Второе неравенство Гриффитса — Келли — Шермана (ГКШ). (Гриффитс [65—70], Келли и Шерман [89], Жинибр [53], [55—56], Перкус [127], Сильвестр [144]). Изучим теперь, как величины $\langle x_C^{i_C} \rangle$ зависят от констант взаимодействия. С этой целью множество $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$ будем считать лежащим в «горизонтальной» гиперплоскости решетки $\mathbf{Z}^{\nu+1}$, и пусть e — единичный «вертикальный» вектор. Положим $V_+ = \Lambda$, $V_- = \Lambda + e$, $V = V_+ \cup V_-$. В роли отображения Φ будет выступать отображение

$$\Phi_1 : t \to t + e; \quad t \in V_+.$$

Совместное распределение величин $\{x_t, t \in \Lambda\}$ — гиббсовское, определяемое взаимодействием (8). Семейство величин $\{x_t, t \in \Phi_1 \Lambda\}$ независимо с семейством $\{x_t, t \in \Lambda\}$; его совместное распределение определяется взаимодействием U_{Φ_1} того же вида, но с константами $I_{\Phi_1 A, i_A}$ вместо I_{A, i_A}.

Тогда если для всех A, i_A

$$I_{A, i_A} \geqslant | I_{\Phi_1 A, i_A} |, \tag{10}$$

то для всех $C \subset \Lambda$

$$\langle x_C^{i_C} \rangle_{U, \Lambda} \geqslant \langle x_{\Phi_1 C}^{i_C} \rangle_{U_{\Phi_1}, \Phi_1 \Lambda}. \tag{11}$$

В частности, величина $\langle x_C^{i_C} \rangle$ является возрастающей функцией параметров I_{A, i_A} на множестве $\{I_{A, i_A} \geqslant 0\}$ (граничные условия мы включили здесь во взаимодействие).

Легко видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial I_{D, i_D}} \langle x_C^{i_C} \rangle_{U, \Lambda} = \langle x_C^{i_C} x_D^{i_D} \rangle_{U, \Lambda} - \langle x_C^{i_C} \rangle_{U, \Lambda} \langle x_D^{i_D} \rangle_{U, \Lambda},$$

поэтому последнее утверждение можно переписать в более привычной форме так:

$$\langle x_C^{i_C} x_D^{i_D} \rangle_{U, \Lambda} - \langle x_C^{i_C} \rangle_{U, \Lambda} \langle x_D^{i_D} \rangle_{U, \Lambda} \geqslant 0.$$

Доказательство. (I). Покажем, что совместная энергия системы $\{x_t, t \in V\}$ может быть переписана в переменных α_t, β_t, $t \in \Lambda = V_+$ в виде полинома с положительными коэффициентами (т. е. $\Gamma_2 = \varnothing$, $-U(x_\Lambda) - U_{\Phi_1}(x_{\Phi_\Lambda}) \in \mathscr{C}(\Gamma_1)$). В самом деле, имеют место тождества:

$$uv + u'v' = \frac{1}{2} [(u + u')(v + v') + (u - u')(v - v')] = \tag{12a}$$

$$= \frac{1}{2} [(u + u')(v + v') + (u' - u)(v' - v)], \tag{12b}$$

$$uv - u'v' = \frac{1}{2} [(u + u')(v - v') + (u - u')(v - v')]. \tag{12c}$$

Применяя первое из них, имеем

$$I_{A,i_A}x_A^{i_A}+I_{\Phi_t A,i_A}x_{\Phi_t A}^{i_A}=\frac{1}{2}\left[\left(I_{A,i_A}+I_{\Phi_t A,i_A}\right)\left(x_A^{i_A}+x_{\Phi_t A}^{i_A}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(I_{A,i_A}-I_{\Phi_t A,i_A}\right)\left(x_A^{i_A}-x_{\Phi_t A}^{i_A}\right)\right].$$

Теперь будем применять ко вторым сомножителям в каждом из слагаемых тождества (12а) и (12с), по одному отщепляя множители вида $(x_t\pm x_{\Phi_t t})$, $t\in A$. Повторяя эту процедуру $|i_A|-1$ раз, мы получим, в силу (10), требуемое представление.

(II). Положительная коррелированность сводится к положительности интеграла

$$\int\limits_{R^2}\alpha_t^i\beta_t^j d\mu(x_t)\,d\mu(x_{\Phi_t t}). \tag{13}$$

Но функция $\beta_t(x_t, x_{\Phi_t t})=(x_t-x_{\Phi_t t})/\sqrt{2}$ меняет знак при замене $x_t\to x_{\Phi_t t}$, $x_{\Phi_t t}\to x_t$, которая не меняет α_t; функция α_t меняет знак при замене $x_t\to -x_{\Phi_t t}$, $x_{\Phi_t t}\to -x_t$, которая не меняет β_t. Поэтому интеграл (13), в силу симметричности меры μ, равен нулю, если хотя бы одно из чисел i, j — нечетно; в противном случае подынтегральное выражение положительно.

Осталось только заметить, что $x_C^{i_C}-x_{\Phi_t C}^{i_C}\in\mathscr{C}(\Gamma_1)$. Но это легко следует из повторного применения тождеств (12а) и (12с).

Заметим, что попутно мы доказали

с) Неравенство Жинибра (Жинибр [55], Сильвестр [144])

$$\langle\alpha_C^{i_C}\beta_D^{i_D}\rangle_{\{U,U_{\Phi_t}\},V}\geqslant 0. \tag{14}$$

Первоначально оно было доказано для случая, когда $I_{A,i_A}=$ $=I_{\Phi_t A,i_A}$, распространение на указанную выше общую ситуацию тривиально.

Неравенство (9) означает физически, что в моделях ферромагнетиков случайные величины имеют тенденцию принимать одинаковые (положительные) значения, а неравенство (11) — что эта тенденция усиливается с ростом (ферромагнитного) взаимодействия.

Простейшие примеры показывают, что предположение о ферромагнитности взаимодействия отбросить полностью нельзя. Однако мы приведем сейчас два результата о взаимодействиях более общего вида.

d) Неравенство Перкуса (Перкус [127], Сильвестр [144]). Рассмотрим ту же модель, что и в **b**), и предположим дополнительно, что

$$U_A(x_A)=\begin{cases}-I_{s,t}x_sx_t, & A=\{s,t\},\\ -h_sx_s, & A=\{s\}\\ 0, & |A|>2\end{cases} \tag{15}$$

и аналогично для U_{Φ_1}, причем $I_{s,t}=I_{\Phi_1 s,\Phi_1 t}$. (Совокупность величин $\{h_s\}$ называется магнитным полем). Тогда

$$-[U(x_\Lambda)+U_{\Phi_1}(x_{\Phi_1\Lambda})]=\sum_{s,t\in\Lambda} I_{st}(\alpha_s\alpha_t+\beta_s\beta_t)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s\in\Lambda}[(h_s+h_{\Phi_1 s})(\alpha_s)+(h_s-h_{\Phi_1 s})(\beta_s)]. \qquad (16)$$

Мы видим, что, в силу парного характера взаимодействия, в (16) отсутствуют перекрестные члены вида $\alpha_s\beta_t$. Положим

$$\Gamma_1=\{\beta_t,\ t\in\Lambda\},$$

тогда многочлен

$$P(\Gamma_1)=\sum_{s,t\in\Lambda} I_{st}\beta_s\beta_t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sum_{s\in\Lambda}(h_s-h_{\Phi_1 s})\beta_s$$

обладает требуемым свойством положительности коэффициентов, как только

$$I_{st}\geqslant 0, \quad h_s\geqslant h_{\Phi_1 s}, \qquad (17)$$

без предположений о знаках $\{h_s\}$, $\{h_{\Phi_1 s}\}$. Для применимости теоремы А осталось проверить положительную коррелированность (II), т. е. положительность интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^{2|\Lambda|}} \beta_A^{i_A}\exp\{Q\{\alpha_t,\ t\in\Lambda\}\}\,d\mu_V(x_V). \qquad (18)$$

Но замена $x_t\to x_{\Phi_1 t}$, $x_{\Phi_1 t}\to x_t$ не меняет α_t и меняет знак β_t, поэтому интеграл (18) равен, в силу симметричности меры μ, нулю, как только хотя бы одна из компонент индекса i_A нечетна; в противном случае подынтегральное выражение положительно.

Таким образом, для взаимодействия (15) с условием (17) из теоремы А вытекает неравенство

$$\langle \beta_C\rangle_{\{U,U_{\Phi_1}\},V}\geqslant 0. \qquad (19)$$

В частности, полагая $C=\{t\}$, имеем

$$\langle x_t\rangle_{U,\Lambda}\geqslant\langle x_{\Phi_1 t}\rangle_{U_{\Phi_1},\Lambda}, \qquad (20)$$

что означает, что в случае парного положительного взаимодействия, величина $\langle x_t\rangle_{U,\Lambda}$ является возрастающей функцией полей $\{h_s\}$ во всей области их изменений, т. е.

$$\langle x_s x_t\rangle_{U,\Lambda}-\langle x_s\rangle_{U,\Lambda}\langle x_t\rangle_{U,\Lambda}\geqslant 0.$$

Замечание. Без предположения о парном характере взаимодействия неравенства Перкуса неверны.

е) Неравенство для антиферромагнетиков. Рассмотрим снова взаимодействие вида (15) в объеме V с невзаимодействующими подобъемами $V_+=\Lambda$ и V_-. Рассмотрим четную подрешетку $L_e \subset \mathbf{Z}^\nu$, состоящую из точек с четной суммой координат, и обозначим через L_0 ее дополнение $\mathbf{Z}^\nu \setminus L_e$. Предположим, что

$$I_{st} \begin{cases} \geqslant 0, & s, t \in L_e \text{ или } s, t \in L_0 \\ \leqslant 0, & |\{s, t\} \cap L_e| = 1. \end{cases} \tag{21}$$

Пусть наложены периодические граничные условия вдоль некоторого единичного вектора $k \in \mathbf{Z}^\nu$, и $I_{s+k, t+k} = I_{s,t}$. (Длина сосуда Λ в направлении k предполагается четной).

В подобъеме V_- рассмотрим такую же систему с другими значениями магнитного поля. Положим для $s \in V_+$

$$\Phi_2 s = s + e + k \tag{22}$$

(напомним, что e — единичный вертикальный вектор).

Тогда если

$$h_s \geqslant h_{\Phi_2 s}, \quad s \in L_e,$$
$$h_s \leqslant h_{\Phi_2 s}, \quad s \in L_0,$$

то

$$(-1)^{|A \cap L_0|} \left\langle \prod_{s \in A \subset \Lambda} (x_s - x_{\Phi_2 s}) \right\rangle_{\{U, U_{\Phi_2}\}, V} \geqslant 0.$$

В частности, если рассмотреть парное периодическое взаимодействие (21) в сосуде Λ (с периодическими в направлении вектора k граничными условиями) и с магнитным полем

$$h_s = \begin{cases} h + g, & s \in L_e \\ h - g, & s \in L_0, \end{cases}$$

$g \geqslant 0$, h — любое, то для одноточечной корреляционной функции имеем

$$\langle x_s \rangle_{U, \Lambda} \geqslant \langle x_{s+k} \rangle_{U, \Lambda}; \quad s \in L_e.$$

Для доказательства нужно ввести другие переменные:

$$\sigma_s = \begin{cases} x_s, & s \in L_e, \\ -x_s, & s \in L_0. \end{cases}$$

После этого нужно рассуждать так же, как в **d**). Разница состоит в использовании иного преобразования Φ_2, определенного формулой (22). Кроме того, переменные α и β меняются ролями.

f) Неравенства Эллиса — Монро (Эллис, Монро [32], Сильвестр [144]). Рассмотрим вопрос о том, как зависят от констант взаимодействия случайные величины α, β, введенные в теореме А. Как показывает несложный анализ, метод теоремы А применим в данном случае лишь к моделям с парным ферромагнитным взаимодействием и дает ответ только о зависимости от магнитных полей.

Тем самым мы приходим к рассмотрению в качестве исходной модель (16):

$$-U(\alpha_\Lambda, \beta_\Lambda)=\sum_{s,t} I_{st}(\alpha_s\alpha_t+\beta_s\beta_t)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_s [(h_s^{(1)}+h_s^{(2)})\,\alpha_s+(h_s^{(1)}-h_s^{(2)})\,\beta_s] \tag{22}$$

(мы немного изменили обозначения) $s, t \in \Lambda = V_+$. В подсосуде $V_- \subset V$ рассмотрим такую же модель от переменных $\alpha_{\Phi_1 s}$, $\beta_{\Phi_1 s}$ $(\Phi_1 s = s + e)$, не зависимых от переменных $\{\alpha_s, \beta_s\}$, но с другими полями $h^{(3)}_{\Phi_1 s}$, $h^{(4)}_{\Phi_1 s}$.

Применяя теорему A, положим

$$\begin{aligned} k_s &= (\alpha_s+\alpha_{\Phi_1 s})/\sqrt{2}, \\ l_s &= (\alpha_s-\alpha_{\Phi_1 s})/\sqrt{2}, \\ m_s &= (\beta_s+\beta_{\Phi_1 s})/\sqrt{2}, \\ -n_s &= (\beta_s-\beta_{\Phi_1 s})/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{23}$$

Появление минуса в последней формуле прояснится ниже. Тогда

$$-U(\alpha_\Lambda, \beta_\Lambda)-U_{\Phi_1}(\alpha_{\Phi_1\Lambda}, \beta_{\Phi_1\Lambda})=$$
$$=\sum_{s,t} I_{st}(k_sk_t+l_sl_t+m_sm_t+n_sn_t)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_s [(h_s^{(1)}+h_s^{(2)}+h^{(3)}_{\Phi_1 s}+h^{(4)}_{\Phi_1 s})\,k_s+$$
$$+(h_s^{(1)}+h_s^{(2)}-h^{(3)}_{\Phi_1 s}-h^{(4)}_{\Phi_1 s})\,l_s+(h_s^{(1)}-h_s^{(2)}+h^{(3)}_{\Phi_1 s}-h^{(4)}_{\Phi_1 s})\,m_s+$$
$$+(h^{(3)}_{\Phi_1 s}-h^{(4)}_{\Phi_1 s}-h_s^{(1)}+h_s^{(2)})\,n_s]. \tag{24}$$

Положим $\Gamma_2=\varnothing$, тогда $[-U(\alpha_\Lambda, \beta_\Lambda)-U_{\Phi_1}(\alpha_{\Phi_1\Lambda}, \beta_{\Phi_1\Lambda})] \in \mathscr{C}(\Gamma_1\{k_s, l_s, m_s, n_s\})$, если $I_{st} \geqslant 0$,

$$h_s^{(1)}+h_s^{(2)} \geqslant |h^{(3)}_{\Phi_1 s}+h^{(4)}_{\Phi_1 s}|, \quad h^{(3)}_{\Phi_1 s}-h^{(4)}_{\Phi_1 s} \geqslant |h_s^{(1)}-h_s^{(2)}|. \tag{25}$$

Проблема (II) положительной коррелированности сводится к неравенству

$$\int_{\mathbf{R}^4} k^\varkappa l^\lambda m^\mu n^\nu d\mu(x)\,d\mu(y)\,d\mu(z)\,d\mu(v) \geqslant 0, \tag{26}$$

где $\varkappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{Z}^+$, а

$$k=(x+y+z+v)/2,$$
$$l=(x+y-z-v)/2,$$

$$m=(x-y+z-v)/2,$$
$$n=(-x+y+z-v)/2 \text{ (см. (23) и теорему А).}$$

В силу симметричности меры μ, интеграл (26) равен нулю, как только числа $\varkappa$, λ, μ, ν имеют различную четность. Если все они четны, то неотрицательность его очевидна. Однако если все они нечетны, то о знаке интеграла (26) для произвольной симметричной меры μ сказать ничего нельзя.

Пусть
$$d\mu(x)=(\delta(x-1)+\delta(x+1))\,dx,$$
тогда почти всюду
$$klmn=(xy-zv)^2/4,$$
что доказывает неотрицательность интеграла (26) для указанной меры. Суммируя вышесказанное, получаем следующее утверждение: в предположениях (25), (26) имеем
$$\langle k_C^{i_C} l_D^{i_D} m_E^{i_E} n_F^{i_F} \rangle_{\{U,\, U_{\Phi_1}\},\, V} \geqslant 0, \tag{27}$$
$C,\ D,\ E,\ F\subset\Lambda$.

Замечание. Неравенство (27) не имеет места для произвольной симметричной меры. Оно справедливо, однако для мер μ следующих видов: $\sum\limits_{j=0}^{l}\delta(-l+2j+x)\,dx$, $l\in\mathbf{Z}^+$; $\chi_{[-a,\,a]}(x)\,dx$, где $\chi_{[-a,\,a]}$ — характеристическая функция отрезка $[-a,\,a]$, $a>0$; $\exp(-P(x))\,dx$, где P — четный полином с положительным старшим коэффициентом, произвольными квадратичным коэффициентом и свободным членом и неотрицательными остальными.

Заметим теперь, что функции $\alpha_A(\alpha_B-\alpha_{\Phi_1B})$, $\beta_A(\beta_B-\beta_{\Phi_1B})$, $\alpha_A(\beta_{\Phi B}-\beta_B)\in\mathscr{C}(\Gamma_1\{k_s,\ l_s,\ m_s,\ n_s;\ s\in\Lambda\})$ (это следует из формул (12)). Мы получаем теперь в качестве следствия неравенства (27).

g) Неравенства Лебовица (Лебовиц [94], Сильвестр [144]). Пусть в модели (22) $h_s^{(1)}\geqslant|h_s^{(2)}|$ и для меры μ справедливо неравенство (26). Тогда
$$\langle \alpha_C\alpha_D\rangle-\langle\alpha_C\rangle\langle\alpha_D\rangle\geqslant 0,$$
$$\langle \beta_C\beta_D\rangle-\langle\beta_C\rangle\langle\beta_D\rangle\geqslant 0, \tag{28}$$
$$\langle \alpha_C\beta_D\rangle-\langle\alpha_C\rangle\langle\beta_D\rangle\leqslant 0.$$

Как заметил Лебовиц [94],
$$\langle \beta_s\beta_t\alpha_r\rangle-\langle\beta_s\beta_t\rangle\langle\alpha_r\rangle=\frac{\partial^2}{\partial h_s^{(1)}\partial h_t^{(1)}}\langle x_r\rangle.$$

Мы получаем таким образом,

h) Неравенство Гриффитса—Херста—Шермана (ГХШ) [72]. (Сильвестр [144]): Для модели (15) с $I_{s,\,t}\geqslant 0$, $h_s\geqslant 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial h_s \partial h_t} \langle x_r \rangle \leqslant 0, \tag{29}$$

если для меры μ справедливо неравенство $(26)'$ [1].

k) Неравенства между трехмерными и двумерными моделями. (Ван Бейерен [148], Сильвестр [144]). Пусть $\Lambda^{(3)} \subset \mathbf{Z}^3$ — кубический сосуд с ребром $2N+1$ и с центром в точке $0 \in \mathbf{Z}^3$, а $\Lambda^{(2)} \subset \mathbf{Z}^2$ — квадратный сосуд с ребром $2N+1$ с центром в точке $O \in \mathbf{Z}^2$. В качестве V расссмотрим объединение $\Lambda^{(3)} \cup \Lambda^{(2)}$ и пусть $V_+ = \{t \in \Lambda^{(3)},\ t=(t_1, t_2, t_3),\ t_3 \geqslant 0\}(\mathbf{Z}^3 \cap \mathbf{Z}^2 = \varnothing)$.

Положим для $t \in V_+$, $t=(t_1, t_2, t_3)$

$$\Phi_3(t) = \begin{cases} (t_1, t_2, -t_3) \in \Lambda^{(3)}, & t_3 > 0, \\ (t_1, t_2) \in \Lambda^{(2)}, & t_3 = 0. \end{cases}$$

Мы будем рассматривать взаимодействие

$$U_A(x_A) = \begin{cases} -I x_s x_t, & A=\{s, t\},\ A \subset \Lambda^{(3)} \text{ или } A \subset \Lambda^{(2)}, \\ & |s-t|=1,\ I>0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

граничные условия

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} +1, & t_3 \geqslant 0, \\ -1, & t_3 < 0,\ t \in \mathbf{Z}^3 \end{cases}$$

$$\bar{y}(t) \equiv +1, \qquad t \in \mathbf{Z}^2$$

и произвольную симметричную меру μ.

Пусть $\mathbf{Z}^3_+ = \{t \in \mathbf{Z}^3,\ t_3 \geqslant 0\}$. Положим для $t \in \mathbf{Z}^3_+ \setminus V_+$

$$\alpha_t = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & t_3=0, \\ 0 & t_3>0, \end{cases}$$

$$\beta_t = \begin{cases} 0 & t_3=0, \\ 1/\sqrt{2} & t_3>0. \end{cases}$$

Тогда

$$-[U(x_{\Lambda^{(3)}} | \bar{x}) + U(x_{\Lambda^{(2)}} | \bar{y})] =$$

$$= I \sum_{\substack{s \in V_+,\ t \in \mathbf{Z}^3_+ \\ |s-t|=1}} (\alpha_s \alpha_t + \beta_s \beta_t) + I/2 \sum_{\substack{s,\ t \in V_+ \\ |s-t|=1}} \alpha_s (\alpha_t + \beta_t),$$

(второе суммирование производится по парам $\{s_1 t\}$ вида $\{(s_1, s_2, 1), (t_1, t_2, 0)\}$, а первое — по остальным), поэтому, как и в c),

---

[1] Неравенство (29) влечет неравенство $\frac{\partial}{\partial h_s}(\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t^2 \rangle) \leqslant 0$, имеющее простой теоретико-вероятностный смысл: дисперсия случайной величины x_t убывает с ростом магнитного поля. Довольно ясно, что такое утверждение неверно для меры $d\mu = ({}_\varepsilon\delta(x-1) + {}_\varepsilon\delta(x+1) + (1-2_\varepsilon\delta(x))dx$, ε — мало, что проясняет важность условия (26).

$$\langle \alpha_C \beta_D \rangle \geqslant 0,\ C,\ D \subset V_+;$$

в частности,

$$\langle x_{(t_1, t_2, 0)} \rangle \geqslant \langle x_{(t_1, t_2)} \rangle .$$

Предположим теперь, что намагниченность m, равная $\lim\limits_{N\to\infty} \langle x_{(t_1,t_2)} \rangle$, больше 0 для некоторого I (такие I существуют — см. § 1). Тогда $\lim\limits_{N\to\infty} \langle x_{(t_1,t_2,0)} \rangle \geqslant m$; из соображений симметрии

$$\lim_{N\to\infty} \langle x_{(t_1,t_2,-1)} \rangle \leqslant -m.$$

Из неравенства Перкуса следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \langle x_{(t_1,t_2,t_3)} \rangle \geqslant \lim_{N\to\infty} \langle x_{(t_1,t_2,0)} \rangle \quad \text{при } t_3 > 0$$

$$\lim_{N\to\infty} \langle x_{(t_1,t_2,t_3)} \rangle \leqslant \lim_{N\to\infty} \langle x_{(t_1,t_2,-1)} \rangle \quad \text{при } t < -1.$$

Тем самым доказано, что если для некоторого I в двумерной модели имеются различные фазы, то при этом же I в аналогичной трехмерной модели имеются нетрансляционно-инвариантные фазы. Факт существования таких фаз был впервые установлен Р. Л. Добрушиным [3].

l) Зависимость корреляционных функций от расстояния. (Шрадер [134], Мессаже, Миракль-Соль [109], Хегерфельд [80]). Пусть $V = \Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$ и $P \subset \mathbf{R}^\nu$ — некоторая гиперплоскость, являющаяся плоскостью симметрии сосуда V. Положим $V_+ = V \cap H$, где H — одно из открытых полупространств, определяемых плоскостью P, $V_0 = V \cap P$. Преобразование $\Phi_4 : V_+ \to V_-$ переводит каждую точку в симметричную.

Рассмотрим модель (15) и предположим, что $I_{s,t} \geqslant 0$ (ферромагнетизм),

$$I_{s,t} = f(|s-t|), \tag{30}$$

где f — убывающая функция

$$h_s \equiv h \geqslant 0$$

(замена $x \to -x$ позволяет также рассмотреть случай $h \leqslant 0$). Тогда для $s,\ t \in V_+$

$$\begin{aligned} I_{st} x_s x_t &+ I_{\Phi_4 s\, \Phi_4 t} x_{\Phi_4 s} x_{\Phi_4 t} + I_{\Phi_4 s t} x_{\Phi_4 s} x_t + I_{s \Phi_4 t}\, x_s x_{\Phi_4 t} = \\ &= I_{\Phi_4 st} (x_s + x_{\Phi_4 s})(x_t + x_{\Phi_4 t}) + (I_{st} - I_{\Phi_4 st}) \cdot \\ &\cdot (x_s x_t + x_{\Phi_4 s} x_{\Phi_4 t}) = (I_{st} + I_{\Phi_4 st}) \alpha_s \alpha_t + (I_{st} - I_{\Phi_4 st}) \beta_s \beta_t, \end{aligned} \tag{31}$$

т. к.

$$I_{st} = I_{\Phi_4 s \Phi_4 t},\quad I_{s\Phi_4 t} = I_{\Phi_4 s \Phi_4^2 t} = I_{\Phi_4 st},$$

в силу (30). Так как диагональ в равнобедренной трапеции всегда длиннее боковой стороны, то все коэффициенты в (31) неотрицательны. Поэтому можно положить $\Gamma_2=\varnothing$. Положительная коррелированность (II) проверяется так же, как и в **b**. Поэтому мы получаем неравенства

$$\langle \alpha_C \beta_D \gamma_E \rangle \geqslant 0.$$

В частности, $\langle x_s x_t \rangle \geqslant \langle x_s x_{\Phi_4 t} \rangle$. Комбинируя различные симметрии, для предельного гиббсовского состояния получаем следующие утверждения: функция $\langle x_0 x_{(t_1,\ldots,t_\nu)} \rangle$ является убывающей функцией параметров $|t_1|, \ldots, |t_\nu|$, а также убывающей функцией параметра $\sqrt{t_1^2+\ldots+t_\nu^2}$ на множестве $\sum_{i=1}^{\nu} t_i=\mathrm{const}\in \mathbf{Z}^1$.

Аналогичные соображения применимы к антиферромагнетикам (см. **e**)) со следующими изменениями: относительно плоскости симметрии P нужно предположить дополнительно, что отображение Φ_4 меняет местами четную подрешетку L_e и нечетную подрешетку L_0. Парное взаимодействие имеет вид (21), а величины $I_{st}=|I_{st}|$ удовлетворяют условию (30); при этом, однако, не требуется монотонности f. Пусть $h_s=h_1$, $s\in L_e$, $h_s=h_2$, $s\in L_0$, $h_1\geqslant h_2$. Тогда

$$(-1)^{|A\cap L_0|} \langle \prod_{s\in A}(x_s - x_{\Phi_4 s}) \rangle \geqslant 0. \tag{32}$$

Неравенство (32) доказывается с помощью комбинации методов этого пункта и пункта **e**). Для предельного гиббсовского поля соответствующего граничному условию $\bar{x}$

$$\bar{x}(s)=\begin{cases} b, & s\in L_e,\\ -b, & s\in L_0, \quad b\geqslant 0\end{cases}$$

мы получаем, в частности,

$$\langle x_s x_t \rangle + \langle x_{s+\tau} x_{t+\tau} \rangle \geqslant 2 \langle x_s x_{s+\sigma} \rangle,$$

где s, $t\in L_e$, σ, $\tau\in L_0$, $\|\tau\|=1$, вектора $s-t$, σ, τ — коллинеарны.

m) Неравенства для многомерных спинов (Жинибр [55], Данлоп и Ньюмен [25], Монро [112], Данлоп [23], Брикмонт [15], Кунц, Пфистер, и Виллермо [91], Мессаже, Миракль-Соль, Пфистер [110]).

Пусть $X=\mathrm{R}^4=\{(x^1, x^2, x^3, x^4),\ x_i\in \mathrm{R}^1\}$ и $\varphi, \psi, \rho, \tau$ таковы, что

$$x^1=\rho\cos\varphi, \quad x^3=\tau\cos\psi,$$
$$x^2=\rho\sin\varphi, \quad x^4=\tau\sin\psi.$$

Предположим, что мера μ имеет вид:

$$d\mu(x)=d\nu(\rho,\tau)\,d\varphi\,d\psi,$$

где $d\varphi$, $d\psi$ — меры Хаара некоторых подгрупп окружности а мера $d\nu$ такова, что

$$\int \prod_{\substack{p \in P \\ q \in Q}} (f_p(\rho) \pm f_p(\rho'))(f_q(\tau') \pm f_q(\tau))\, d\nu(\rho, \tau)\, d\nu(\rho', \tau') \geqslant 0 \qquad (33)$$

для любого конечного семейства $\{f_n,\ n \in P \cup Q\}$ положительных возрастающих функций на $[0, +\infty)$ и любого выбора знаков (отрицательная коррелированность).

В эту схему укладываются: модели Изинга (например $\varphi = \psi \equiv 0$, $\tau \equiv 0$); $X - Y$ модель: $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\psi \equiv 0$, $d\nu(\rho, \tau) = \delta(\rho - 1)\,\delta(\tau)\, d\rho d\tau$; классическая модель Гейзенберга: $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\psi \in \{0, \pi\}$, $d\nu(\rho, \tau) = \delta(\rho^2 + \tau^2 - 1)\, d\rho^2 d\tau$ и некоторые другие.

Пусть теперь $\Lambda \subset \mathbf{Z}^\nu$, $|\Lambda| < \infty$; через Q_1 обозначим мультипликативный положительный конус функций от φ_t, ρ_t, $t \in \Lambda$, порожденный функциями $\cos\left(\sum\limits_{\Lambda} m_t \varphi_t\right)$, $m_t \in \mathbf{Z}^1$ и возрастающими положительными функциями $f(\rho_t)$. Аналогично определяется множество Q_2 функций от ψ_t, τ_t. О взаимодействии предполагается, что

$$U(x_\Lambda \mid \bar{x}) = U_1(\varphi_\Lambda, \rho_\Lambda \mid \bar{\varphi}, \bar{\rho}) + U_2(\psi_\Lambda, \tau_\Lambda \mid \bar{\psi}, \bar{\tau}), \qquad (34)$$

причем

$$-U_1(\quad \mid \bar{\varphi}, \bar{\rho}) \in Q_1, \qquad -U_2(\quad \mid \bar{\psi}, \bar{\tau}) \in Q_2$$

ферромагнитность). Соотношение (34) показывает, что зависимость между (φ, ρ)- и (ψ, τ)-переменными сосредоточена только в мере $d\nu$.

Пусть теперь

$$f_1, g_1 \in Q_1, \qquad f_2, g_2 \in Q_2,$$

тогда

$$\langle f_1 g_1 \rangle \geqslant \langle f_1 \rangle \langle g_1 \rangle, \qquad (35a)$$

$$\langle f_2 g_2 \rangle \geqslant \langle f_2 \rangle \langle g_2 \rangle, \qquad (35b)$$

$$0 \leqslant \langle f_1 f_2 \rangle \leqslant \langle f_1 \rangle \langle f_2 \rangle. \qquad (35c)$$

Левая часть неравенства (35c) доказывается так же, как первое неравенство ГКШ (a)).

Положим $V_0 = \Lambda$, $\Gamma_2 = \varnothing$. Для применения схемы теоремы A нужно только проверить, что для любой функции $h \in Q_1 \cdot Q_2$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{4|\Lambda|}} h \prod_{t \in \Lambda} d\nu(\rho_t, \tau_t)\, d\varphi_t d\psi_t \geqslant 0.$$

Будем интегрировать сначала по переменным φ, ψ. Так как

$$\cos(\overline{m}\overline{\theta})\cos(\overline{m}'\overline{\theta}') = \frac{1}{2}\cos(\overline{m}+\overline{m}')\,\overline{\theta} + \cos(\overline{m}-\overline{m}')\,\overline{\theta}]$$

$$\cos 0 \equiv 1,$$

то интегралы по угловым переменным неотрицательны, и потому интеграл $\langle f_1 g_2 \rangle$ сводится к сумме интегралов положительных функций от переменных ρ_Λ, τ_Λ. Доказательство остальных неравенств аналогично доказательству второго неравенства ГКШ b): положим

$$V_+ = \Lambda, \quad V_- = \Lambda + e, \quad \Phi_1(t) = t + e.$$

Если h — некоторая функция от переменных x_Λ, то через h' обозначим функцию $h(x_{\Phi_1\Lambda})$.

В этих обозначениях неравенства (35) переписываются так:

$$\langle (f_1 - f_1')(g_1 - g_1') \rangle \geqslant 0, \tag{35'a}$$

$$\langle (f_2' - f_2)(g_2' - g_2) \rangle \geqslant 0, \tag{35'b}$$

$$\langle (f_1 - f_1')(f_2' - f_2) \rangle \geqslant 0. \tag{35'c}$$

Здесь усреднение проводится по совместному распределению величин $\{x_t, x_{\Phi_1 t}, t \in \Lambda\}$. Нужно отметить, что в соотношениях (35′) штрихи расставлены так же, как и в (33).

Интересующие нас средние (35′) можно с помощью разложения экспоненты в ряд представить в виде суммы ряда. Применяя к каждому из слагаемых этой суммы тождества (12), мы получим интегралы от произведений сомножителей вида

$$[\cos(\overline{m}\overline{\varphi}) \pm \cos(\overline{m}\overline{\varphi}')], \quad [\cos(\overline{n}\overline{\varphi}') \pm \cos(\overline{n}\overline{\varphi})],$$

$$[u(\rho_t) \pm u(\rho_{\Phi_1 t})], \quad [v(\tau_{\Phi t}) \pm v(\tau_t)],$$

где u, v — положительные возрастающие функции. Так как

$$\cos\overline{m}\overline{\theta} + \cos\overline{m}\overline{\theta}' = 2\cos\left(\overline{m}\,\frac{\overline{\theta}' + \overline{\theta}}{2}\right)\cos\left(\overline{m}\,\frac{\overline{\theta}' - \overline{\theta}}{2}\right),$$

$$\cos\overline{m}\overline{\theta} - \cos\overline{m}\overline{\theta}' = 2\sin\left(\overline{m}\,\frac{\overline{\theta}' + \overline{\theta}}{2}\right)\sin\left(\overline{m}\,\frac{\overline{\theta}' - \overline{\theta}}{2}\right),$$

то интегралы по угловым переменным имеют вид

$$\int d\varphi_\Lambda d\varphi_{\Phi_1\Lambda} F\left(\left\{\frac{\varphi_{\Phi_1 t} + \varphi_t}{2},\ t \in \Lambda\right\}\right) F\left(\left\{\frac{\varphi_{\Phi_1 t} - \varphi_t}{2},\ t \in \Lambda\right\}\right).$$

Будучи квадратами, эти интегралы неотрицательны.

Теперь осталось проинтегрировать по переменным ρ_t, τ_t, $\rho_{\Phi_1 t}$, $\tau_{\Phi_1 t}$. В силу (33), результат положителен, что и доказывает неравенства (35).

Из доказанных неравенств можно извлечь некоторые неравенства для модели Гейзенберга, в которой

$$X=\left\{(x^1,\ x^2,\ x^3),\ \sum (x^i)^2=1,\ x^i\in \mathrm{R}^1\right\},$$

взаимодействие ферромагнитное, парное и имеет вид

$$U_A\ (x_A)=\begin{cases}-J_{s,t}\sum\limits_i x_s^i x_t^i, & A=\{s,\ t\},\\ -h_t x_t^3, & A=\{t\},\end{cases}$$

граничное условие $(\bar{x})_t=(0,\ 0,\ x_t^3),\ x_t^3\geqslant 0$. Тогда

$$\begin{gathered}\langle \prod_C x_t^i \prod_D x_t^i \rangle \geqslant \langle \prod_C x_t^i \rangle \ \langle \prod_D x_t^i \rangle, \quad i=1,2,3,\\ \langle \prod_C x_t^i \prod_D x_t^3 \rangle \leqslant \langle \prod_C x_t^i \rangle \ \langle \prod_D x_t^3 \rangle, \quad i=1,2,\\ \langle x_s^i x_t^i \rangle \geqslant \langle x_s^3 x_t^3 \rangle - \langle x_s^3 \rangle \ \langle x_t^3 \rangle, \quad i=1,2,\\ \langle x_s^i x_t^i \rangle^2 \leqslant \langle x_s^3 x_t^3 \rangle^2 - \langle x_s^3 \rangle^2 \langle x_t^3 \rangle^2, \quad i=1,2.\end{gathered} \tag{36}$$

Аналогичные неравенства справедливы и для двумерных спинов.

Наконец, рассмотрим вопрос о сравнении систем с различными константами взаимодействия. Ограничимся случаем

$$X=S^1\subset \mathrm{R}^2,\quad x_t^1=\cos\theta_t,\quad x_t^2=\sin\theta_t,\quad d\mu=d\theta.$$

Если $M:\Lambda\to \mathbf{Z}^1$ — некоторая функция, то положим $M\theta_\Lambda=\sum\limits_{t\in\Lambda} M(t)\,\theta_t$. Для всякого M положим

$$U_M(\theta_\Lambda)=I\ (M)\cos M\theta_\Lambda.$$

В сосуде $\Phi_t\Lambda$ рассмотрим взаимодействие

$$U_{\Phi_t M}(\theta_{\Phi_t\Lambda})=I'\ (M)\cos(M\theta_{\Phi_t\Lambda}-\psi_M),$$

и пусть граничные условия $\bar{\theta}=\bar{\theta}_{\Phi_t}\equiv\theta^+\equiv 0$. Применим формулу (12а) к исследованию положительности коэффициентов функции взаимодействия. Так как

$$\begin{gathered}I\ (M)\cos M\theta_\Lambda+I'\ (M)\cos(M\theta_{\Phi_t\Lambda}-\psi_M)=\\ =\frac{1}{2}\,[I\ (M)+I'\ (M)]\,[\cos M\theta_\Lambda+\cos(M\theta_{\Phi_t\Lambda}-\psi_M)]+\\ +\frac{1}{2}\,[I\ (M)-I'\ (M)]\,[\cos M\theta_\Lambda-\cos(M\theta_{\Phi_t\Lambda}-\psi_M)],\end{gathered}$$

то условие (1) теоремы А выполнено, если

$$I\ (M)\geqslant|I'\ (M)|. \tag{37}$$

Далее, как и ранее в этом пункте, мы убеждаемся в положительной коррелированности функций

$$\cos M\theta_\Lambda \pm \cos(M\theta_{\Phi_1\Lambda} - \psi_M)$$

для различных M и любых знаков. Отсюда следует, что при условии (37)

$$\langle [\cos M\theta_\Lambda \mp \cos(M\theta_{\Phi_1\Lambda} - \varphi_M)]\,[\cos N\theta_\Lambda \pm \cos(N\theta_{\Phi_1\Lambda} - \varphi_N)] \rangle \geqslant 0,$$

в частности,

$$\langle \cos M\theta_\Lambda \rangle_U \geqslant |\langle \cos(M\theta_\Lambda - \varphi) \rangle_{U_{\Phi_1}}|. \tag{38}$$

Интересно сравнить последнее неравенство со вторым неравенством ГКШ. Из неравенства ГКШ следует, в частности, что корреляционные функции являются возрастающими функциями граничных условий. В нашей ситуации такого утверждения сформулировать нельзя, однако (38) означает, что корреляционные функции для «самых больших» граничных условий θ^+ являются наибольшими возможными.

n). Оценки корреляционных функций старшего порядка через младшие (Лебовиц [96]). Читатель мог отметить, что во всех приведенных до сих пор примерах применения теоремы А функция g полагалась равной единице. Заметим, однако, что в каждом из примеров, для доказательства неравенства (6) мы использовали лишь соображения симметрии, которые справедливы не только для $g \equiv 1$, но и для любой функции, инвариантной относительно используемой группы симметрий и неотрицательной μ_Λ почти всюду.

Поясним вышесказанное на примере второго неравенства ГКШ. Предположим, что мера μ имеет своим носителем отрезок $[-1, 1]$. Тогда функции вида

$$\prod_{t \in D \subset \Lambda} (1 \pm x_t x_{\Phi_1 t})$$

инвариантны относительно преобразований

$$x_t \to x_{\Phi_1 t}, \quad x_{\Phi_1 t} \to x_t,$$

$$x_t \to -x_{\Phi_1 t}, \quad x_{\Phi_1 t} \to -x_t,$$

(которые мы использовали в п. b) и μ_Λ — неотрицательны, поэтому из теоремы А вытекает, что в предположении (10)

$$\langle (x_C - x_{\Phi_1 C})(1 \pm x_D x_{\Phi_1 D}) \rangle \geqslant 0,$$

т. е.

$$\langle x_C \rangle_U - \langle x_C \rangle_{U_{\Phi_1}} \geqslant |\langle x_C x_D \rangle_U \langle x_D \rangle_{\Phi_1 U} - \langle x_C x_D \rangle_{\Phi_1 U} \langle x_D \rangle_U|, \tag{39}$$

что представляет собою усиление неравенства ГКШ.

Предположим, теперь, что C и D — одноточечные множества и что одноточечные корреляционные функции для взаимодействий U и U_{Φ_t} совпадают и не равны нулю. Тогда из неравенства (39) следует, что и двухточечные корреляционные функции для этих взаимодействий совпадают. Затем можно множество C считать двухточечным и т. д. Рассуждение по индукции с использованием неравенства (39) показывает тем самым, что из сделанного выше предположения об одноточечных корреляционных функциях следует совпадение всех корреляционных функций для взаимодействий U и U_{Φ_t}.

Для неравенства Перкуса аналогичный прием с функцией $g=\prod\limits_{D\subset\Lambda}\left(1\pm\frac{\alpha_t}{2}\right)$ дает неравенство:

$$\langle \beta_C \rangle_{\{U,U_{\Phi_t}\},V} \geqslant \frac{1}{2^{|D|}}\left|\langle \beta_C\alpha_D \rangle_{\{U,U_{\Phi_t}\},V}\right|$$

т. д.

§ 4. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИВЕДЕННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Пример 1. Критическая температура в двумерных и трехмерных моделях.

Рассмотрим модель с взаимодействием (3) — модель Изинга на ν-мерной решетке.

Пусть $\bar{x}_+(s)\equiv+1$. Тогда, в силу второго неравенства Гриффитса, $\langle x_0\rangle_{U,\Lambda,\bar{x}_+}\geqslant\langle x_0\rangle_{U,\Lambda',\bar{x}_+}$, $x_0\in\Lambda\subset\Lambda'$, а посему предел

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\langle x_0\rangle_{U,\Lambda,\bar{x}_+}=m_+^{(\nu)}(\beta),$$

называемый намагниченностью, существует. Число $\beta_{\text{cr},\nu}^{-1}$ такое, что $m_+^{(\nu)}(\beta)>0$ для всех $\beta>\beta_{\text{cr},\nu}$, $m_+^{(\nu)}(\beta)=0$ для остальных β, называется критической температурой.

Сравним критические температуры $\beta_{\text{cr}2}^{-1}$ и $\beta_{\text{cr}3}^{-1}$ для двумерной и трехмерной моделей.

Для этого рассмотрим трехмерную модель с парным взаимодействием ближайших соседей

$$U_{st}(x_s,x_t)=\begin{cases}-\beta x_sx_t, & t-s=e_1,\ e_2\\ -\lambda\beta x_sx_t, & t-s=e_3,\end{cases}$$

где e_1, e_2, $e_3\in\mathbf{Z}^3$ — три орта. В силу второго неравенства Гриффитса, намагниченность $m_+(\beta,\lambda)$ в этой модели монотонно возрастает по λ, $\lambda\geqslant0$. Но

$$m_+(\beta,0)=m_+^{(2)}(\beta),\quad m_+(\beta,1)=m_+^{(3)}(\beta),$$

поэтому

$$m_+^{(3)}(\beta)\geqslant m_+^{(2)}(\beta)\quad\text{и}\quad\beta_{\text{cr}3}^{-1}\geqslant\beta_{\text{cr}2}^{-1}.$$

Пример 2. Дифференцируемость свободной энергии при ненулевом магнитном поле (Престон [129]).

Рассмотрим ферромагнитное взаимодействие вида (15) с $h_s \equiv h$. Свободной энергией называется величина (см. формулу (1))

$$F(h, \Lambda, \bar{x}) = |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda(\bar{x}).$$

Функция $F(h, \Lambda, \bar{x})$ выпукла по h (первое неравенство Гриффитса), а потому она имеет предел

$$\lim_{\Lambda\to\infty} F(h, \Lambda, \bar{x}) = F(h),$$

который, как можно показать, не зависит от $\bar{x}$. Как будет видно из дальнейшего (см. пример 5), дифференцируемость функции $F(h)$ в точке h_0 эквивалентна существованию предела $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} P_{\Lambda,\bar{x}}$ для любого $\bar{x}$, т. е. единственности гиббсовского поля с данным взаимодействием при $h = h_0$. Сейчас же мы докажем, что указанная дифференцируемость при $h \neq 0$ является следствием неравенства ГХШ, т. е. имеет место, как только свободная мера μ симметрична и удовлетворяет (26).

Положим

$$f_{\Lambda,\bar{x}}(h) = \frac{\partial F(h, \Lambda, \bar{x})}{\partial h} \equiv \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{t\in\Lambda} \langle x_t \rangle.$$

В силу неравенства ГХШ, функции $f_{\Lambda,\bar{x}}(h)$ выпуклы по h при $h < 0$ (в силу симметрии, достаточно рассмотреть только этот случай).

Известно, что из любой последовательности выпуклых и равномерно ограниченных функций на открытом множестве можно выбрать подпоследовательность, поточечно сходящуюся к выпуклой непрерывной функции.

Пусть последовательность $\Lambda_n \to \mathbf{Z}^\nu$ такова, что

$$f_{\Lambda_n,\bar{x}}(h) \to f(h), \quad F(h, \Lambda_n, \bar{x}) \to F(h).$$

Пусть $h_0 < h < 0$, тогда

$$F(h) - F(h_0) = \lim_{n\to\infty} \int_{h_0}^{h} f_{\Lambda_h,\bar{x}}(t)\, dt = \int_{h_0}^{h} f(t) dt.$$

Так как функция f — непрерывна, то из последнего равенства следует дифференцируемость функции F при $h < 0$.

Пример 3. Фазовые переходы в моделях с дальнодействием (Дайсон [26—28], Кунц и Пфистер [90]).

Дайсон рассматривал одномерную модель с парным взаимодействием.

$$U_{st}^{(1)}(x_s, x_t) = -\beta I_{st}^{(1)} x_s x_t, \quad s, t \in \mathbf{Z}^1, \quad I_{st}^{(1)} \geqslant 0, \quad x_s, x_t = \pm 1,$$

а Кунц и Пфистер — двумерную модель с парным взаимодействием

$$U_{st}^{(2)}(x_s, x_t) = -\beta I_{st}^{(2)} x_s \cdot x_t,$$

$$s, t \in Z^2, \quad I_{st}^{(2)} \geqslant 0, \quad x_s, x_t \in R^2, \quad \| x_s \| = \| x_t \| = 1$$

(модель плоских ротаторов, или XY-модель). Их результаты также справедливы для случая

$$x_s, x_t \in R^3, \quad \| x_s \| = \| x_t \| = 1$$

(классическая модель Гейзенберга). Результаты эти состоят в следующем:

Пусть

$$I_{st}^{(\nu)} = | s - t |^{-\alpha}, \quad \nu < \alpha < 2\nu.$$

Тогда существуют такие значения $\beta_{cr,\nu}$ параметра β, что для всех $\beta > \beta_{cr,\nu}$ в соответствующей модели имеется ненулевая намагниченность.

Более точно, рассмотрим граничное условие $\overline{x^{(\nu)}} \equiv e$, где $e = \pm 1$ при $\nu = 1$, e — единичный вектор из R^2 или R^3 при $\nu = 2$. Тогда в бесконечном объеме намагниченность, равная

$$\langle x_{\bar{0}} \cdot e \rangle_{U^{(\nu)}, \overline{x^{(\nu)}}} > 0, \quad \bar{0} \in Z^\nu, \tag{41}$$

как только $\beta > \beta_{cr,\nu}$.

Основная идея доказательства принадлежит Дайсону. Заметим, что величина $\langle x_0 \cdot e \rangle$ является монотонно возрастающей функцией констант $I_{st}^{(\nu)}$ — это следует из второго неравенства Гриффитса для $\nu = 1$ и из неравенства (36) (которое доказано Жинибром для X—Y модели и Данлоном для классической модели Гейзенберга) — при $\nu = 2$. Поэтому достаточно доказать наличие ненулевой намагниченности для какого-нибудь более слабого взаимодействия, чем взаимодействие (40). Дайсон нашел такое ослабленное взаимодействие (названное им иерархическим), для которого указанная задача может быть решена, в силу наличия у него большей симметрии, чем у исходного взаимодействия. Однако она все еще достаточно громоздка, чтобы приводить здесь ее решение.

Пример 4. Единственность трансляционно-инвариантного состояния в моделях плоских ротаторов (Брикмонт, Ландау, Фонтен [16], Мессаже, Миракль-Соль, Пфистер [110]).

Первым критерием наличия фазового перехода в модели служит отличие от нуля значения намагниченности (41). Если же намагниченность равна нулю (как это имеет место в двумерной модели плоских ротаторов с $I_{st} = | s - t |^{-\alpha}$, $\alpha \geqslant 4$, или в любой симметричной относительно замены $x \to -x$ модели при достаточно высокой температуре), то сделать какого-то утверждения о фазовых переходах, вообще говоря, нельзя (см. однако, Пример 5). Тем не менее имеет место следующее утверждение:

Рассмотрим ν-мерную модель плоских ротаторов с трансляционно-инвариантным (т. е. инвариантным относительно сдвигов) парным взаимодействием ближайших соседей. Если в такой модели отсутствует намагниченность, то в ней есть ровно одно трансляционно-инвариантное состояние. (Мы пользуемся обозначениями § 3, m).

Изложим идею доказательства. Из неравенства (38) следует, что

$$\langle \cos M\theta \rangle_{\Lambda,\theta+} \geqslant \langle \cos M\theta \rangle_{\Lambda,\overline{\psi}}$$

для любых граничных условий $\overline{\psi}$. Следовательно, среднее $\langle \cos M\theta \rangle_{\Lambda,\theta+}$ монотонно убывает по Λ, поэтому, так как $\langle \sin M\theta \rangle_{\Lambda,\theta+}=0$, существует предел

$$\langle \quad \rangle_{+}=\lim_{\Lambda\to\infty} \langle \quad \rangle_{\Lambda,\theta+}.$$

Из неравенства (38) легко следует также трансляционная инвариантность, экстремальность и кластерность состояния $\langle \quad \rangle_{+}$ (кластерностью называется следующее свойство: для любых функций f_A, g_B, зависящих лишь от конфигураций в конечных сосудах A и B соответственно,

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle f_A g_{\tau+B} \rangle = \langle f_A \rangle \langle g_B \rangle, \quad \tau\in \mathbf{Z}^{\nu}).$$

Пусть $\cos\theta_t=x_t$, $\sin\theta_t=y_t$; обозначим через $\langle \quad \rangle_{-}$ состояние, полученное из $\langle \quad \rangle_{+}$ преобразованием $\theta_s\to-\theta_s$ для всех $s\in\mathbf{Z}^{\nu}$. Тогда, в силу неравенства (39),

$$\langle x_t \rangle_{+} - \langle x_t \rangle_{-} \geqslant |\langle x_A \rangle_{+} \langle x_A x_t \rangle_{-} - \langle x_A \rangle_{-} \langle x_A x_t \rangle_{+}|.$$

Но $\langle x_B \rangle_{-}=(-1)^{|B|}\langle x_B \rangle_{+}$, поэтому если число $|A|$ нечетно, то

$$2\langle x_t \rangle_{+} \geqslant 2|\langle x_A x_t \rangle_{+} \langle x_A \rangle_{+}|.$$

В силу неравенства (36), $\langle x_A x_t \rangle_{+}>0$, значит, для всех нечетных множеств A

$$\langle x_A \rangle_{+}=0, \tag{42}$$

если намагниченность отсутствует. Из экстремальности состояния $\langle \quad \rangle_{+}$, это же верно и для всех состояний.

Похожими рассуждениями доказывается, что парная корреляционная функция $\langle x_s x_t \rangle$ совпадает для всех трансляционно-инвариантных состояний, откуда снова с помощью неравенства (39) доказывается, что для любого четного множества A

$$\langle x_A \rangle = \langle x_A \rangle_{+}, \tag{43}$$

где $\langle \quad \rangle$ — трансляционно-инвариантное состояние.

Из утверждений (42), (43) уже несложно вывести доказываемое утверждение.

§ 5. НЕРАВЕНСТВО ФКЖ

Совсем иную природу, чем неравенства типа Гриффитса, имеют неравенства Фортюэна; Кастеляйна и Жинибра (ФКЖ) [45], к которым и переходим.

Пусть $X=\mathbb{R}^1$, мера μ — произвольна. Введем на пространстве X^Λ частичный порядок:

$$x_\Lambda \succ y_\Lambda \Leftrightarrow x_t \geqslant y_t \quad \forall t \in \Lambda.$$

Определим верхнюю грань $x_\Lambda \vee y_\Lambda$ и нижнюю грань $x_\Lambda \wedge y_\Lambda$ двух элементов из X^Λ соотношениями:

$$(x_\Lambda \vee y_\Lambda)_t = \max(x_t, y_t),$$

$$(x_\Lambda \wedge y_\Lambda)_t = \min(x_t, y_t).$$

Предположим, что взаимодействие U и граничное условие $\bar{x}$ таковы, что

$$U(x_\Lambda \wedge y_\Lambda \mid \bar{x}) + U(x_\Lambda \vee y_\Lambda \mid \bar{x}) \leqslant U(x_\Lambda \mid \bar{x}) + U(y_\Lambda \mid \bar{x}). \quad (44)$$

Тогда для любых двух возрастающих в смысле порядка $\succ$ функций f, g на пространстве X^Λ имеет место неравенство:

$$\langle fg \rangle \geqslant \langle f \rangle \langle g \rangle,$$

де среднее берется по мере $P_{\Lambda,\bar{x}}$.

Доказательство этого неравенства можно найти в работах Гуэрры, Розена и Саймона [76], Холли [84], Престона [130], Картье [19]; доказательство Картье приведено в книге Саймона [139] (переведенной на русский язык).

Область применимости ФКЖ-неравенств находится в общем положении с областью применимости второго неравенства ГКШ. Рассмотрим снова взаимодействие вида

$$U_A(x_A) = -I_A x_A.$$

Если $I_A \equiv 0$ при $|A| \geqslant 3$, то условие (44) выполнено, если

$$I_A \geqslant 0 \text{ при } |A| = 2.$$

При этом величины I_t (магнитные поля) и граничные условия $\bar{x}$ могут быть произвольными.

Если $I_A \equiv 0$ при $|A| \geqslant 4$, то условие (44) выполнено, есл

$$I_{rs} \geqslant \sum_{t \neq r,s} |I_{\{r,s,t\}}|, \quad r \neq s,$$

$$(\bar{x})_t \geqslant 0,$$

$$I_t \text{ — произвольно, } t \in \Lambda.$$

Кроме того, на меру μ не накладывается условие симметрий С другой стороны, неравенство ГКШ применимо к функ циям вида x_C, которые не являются возрастающими в смысле $\succ$ если $|C| > 1$. (Так как, напротив, функция x_t — возрастающа в смысле $\succ$, то неравенство (20) есть следствие неравенств ФКЖ).

Пример 5. Критерий наличия или отсутствия фазовы переходов. (Лебовиц, Мартин-Лёф [97]. Лебовиц, Презутт [101]). Рассмотрим парное ферромагнитное взаимодействи (15), причем

$$I_{s,t} = f(\|s-t\|), \quad \sum_{p \in Z^\nu} f(\|p\|) < \infty; \quad h_s \equiv h,$$

и пусть сначала свободная мера $d\mu(x) = (\delta(x-1) + \delta(x+1))\,dx$

Исследуем вопрос о зависимости предела $\lim\limits_{\Lambda \to \infty} \langle \quad \rangle_{U,\Lambda,\bar{x}}$ о граничных условий $\bar{x}$.

Всякое предельное состояние $\lim\limits_{\Lambda \to \infty} P_{\Lambda,\bar{x}}$ однозначно опреде ляется величинами

$$\langle x_C \rangle, \quad C \subset \mathbf{Z}^\nu,$$

где усреднение проводится по указанной предельной мере. По ложим $y_t = \frac{1}{2}(1 + x_t)$. Очевидно, что величины $\langle x_C \rangle$ являютс конечными линейными комбинациями величин вида $\langle y_D \rangle$, поэто му достаточно изучать функции $\langle y_D \rangle$, для которых справед ливо ФКЖ-неравенство. В частности,

$$\langle y_D \rangle_{\Lambda,-} \leqslant \langle y_D \rangle_{\Lambda,\bar{x}} \leqslant \langle y_D \rangle_{\Lambda,+}, \tag{45}$$

где через $+$ $(-)$ обозначено граничное условие $\bar{x} \equiv +1\,(-1)$. Кроме того, в силу ФКЖ-неравенства,

$$0 \leqslant \langle y_D \rangle_{\Lambda,+} - \langle y_D \rangle_{\Lambda,-} \leqslant \sum_{t \in D} [\langle y_t \rangle_{\Lambda,+} - \langle y_t \rangle_{\Lambda,-}], \tag{46}$$

так как функция

$$\sum_{t \in D} y_t - y_D$$

возрастает по каждой переменной x_t. Далее, последовательность $\langle y_D \rangle_{\Lambda,-}$ возрастает по Λ, а последовательность $\langle y_D \rangle_{\Lambda,+}$ — убывает, что снова следует из неравенства ФКЖ. Поэтому существуют пределы

$$\langle y_D \rangle_{\pm} = \lim_{\Lambda \to \infty} \langle y_D \rangle_{\Lambda, \pm}.$$

Суммируя вышесказанное, мы получаем следующее утверждение:

Предел $\lim\limits_{\Lambda \to \infty} P_{\Lambda, \bar{x}}$ существует и не зависит от граничных условий $\bar{x}$ тогда и только тогда, когда для всех $s \in Z^{\nu}$

$$\langle x_s \rangle_+ = \langle x_s \rangle_-.$$

Рассмотрим теперь функцию свободной энергии системы $F(h)$ (ср. пример 2). В силу выпуклости, функция $F(h)$ имеет в каждой точке правую и левую производную, которые не совпадают не более чем в счетном числе точек. Из неравенств ФКЖ следует, что

$$\left. \frac{\partial F(\tilde{h})}{\partial \tilde{h}^{\pm}} \right|_{\tilde{h}=h} = \langle x_t \rangle_{\pm}.$$

Поэтому доказанное выше утверждение можно сформулировать еще и так

Единственность состояния с взаимодействием (15) (т. е. независимость предела $\lim\limits_{\Lambda \to \infty} P_{\Lambda, \bar{x}}$ от $\bar{x}$) имеет место тогда и только тогда, когда функция $F(h)$ дифференцируема.

Аналогичные результаты справедливы и для класса мер μ таких, что для любого $\alpha > 0$

$$\int d\mu(x) \exp(-\alpha x^2) < \infty.$$

Рассмотрим множество гиббсовских состояний, сосредоточенных на таких конфигурациях x_{Z_ν}, что

$$\sum_{|s| < j} x_s^2 \leqslant C (2j+1)^{\nu}.$$

Такие состояния назовем состояниями умеренного роста. Оказывается, что если функция $F(h)$ дифференцируема в точке h, то гиббсовское состояние умеренного роста, отвечающее этому значению поля h, единственно.

§ 6. ДОПОЛНЕНИЕ

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — случайные величины. Функция Урселла $u_k(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k})$ определяется формулой

$$u_k(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}) = \frac{\partial^k}{\partial h_1 \ldots \partial h_k} \ln \left\langle \exp \left\{ \sum_{j=1}^{k} h_j \xi_{i_j} \right\} \right\rangle \Bigg|_{h=0};$$

так,

$$u_1(\xi) = \langle \xi \rangle,$$

$$u_2(\xi, \eta) = \langle \xi\eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle, \ldots .$$

Рассмотрим функции Урселла гиббсовских состояний. Пусть ферромагнитное взаимодействие имеет вид (8). Тогда

$$u_1(x_t) \geqslant 0 \quad \text{(первое неравенство ГКШ)},$$

$$u_2(x_t) \geqslant 0 \quad \text{(второе неравенство ГКШ)}.$$

Если предположить дополнительно, что взаимодействие имеет парный характер, а свободная мера μ удовлетворяет условию (26), то

$$u_3(x_s, x_t, x_k) \leqslant 0 \quad \text{(неравенство ГХШ)}.$$

Для этой же модели в обозначениях пункта § 2, d имеем

$$u_4(x_s, x_t, x_k, x_l) = 2[\langle \beta_s\beta_t\alpha_k\alpha_l \rangle - \langle \beta_s\beta_t \rangle \langle \alpha_k\alpha_l \rangle] - \\ - \frac{1}{2}[u_3(x_s, x_t, x_k)\langle \alpha_l \rangle + u_3(x_s, x_t, x_l)\langle \alpha_k \rangle] \tag{47}$$

(мы предполагаем, что $U = U_{\Phi_1}$). Если дополнительно предположить, что распределение каждой из величин x_p симметрично, то $\langle \alpha_p \rangle \equiv 0$, а первое слагаемое в формуле (47) отрицательно, в силу неравенства Лебовица (28). Поэтому $u_4(x_s, x_t, x_k, x_l) \leqslant 0$ (Лебовиц [94]).

Фельдман [41] высказал гипотезу, что при нулевом поле

$$(-1)^n u_{2n} \geqslant 0. \tag{48}$$

Сильвестр [145], Перкус [127] и Картье [191] доказали, что $u_6(x_s, \ldots, x_t) \geqslant 0$. Сильвестр [145] доказал также справедливость гипотезы (48) при достаточно больших и достаточно малых значениях температуры.

Приведем, наконец, одно интересное неравенство, принадлежащее Ньюмену [119].

Пусть $C \subset \Lambda$. Назовем разбиением на пары множества C его представление в виде объединения двухточечных множеств, если $|C|$ — четно, и объединение одного одноточечного и нескольких двухточечных, если $|C|$ — нечетно. Положим, для $A \subset C$, $\tilde{A} = C \setminus A$. Семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств множества C назовем допустимым, если всякое разбиение множества на пары является измельчением двухэлементного разбиения $(A, \tilde{A})$ для некоторого $A \in \mathfrak{A}$.

Тогда для взаимодействия (15) со свободной мерой

$$d\mu(x) = \sum_{j=0}^{l} \delta(-l + 2j + x)\,dx, \quad l \in \mathbf{Z}^+$$

имеет место неравенство

$$\langle x_C \rangle \leqslant \sum_{A \in \mathfrak{A}} \langle x_A \rangle \langle x_{\bar{A}} \rangle .$$

В частности, для $C = 2k$

$$\langle x_C \rangle \leqslant \sum \langle x_{s_1} x_{t_1} \rangle \dots \langle x_{s_k} x_{t_k} \rangle ,$$

где суммирование происходит по всем разбиениям множества C на пары.

Простое доказательство этого неравенства нашел Сильвестр [146].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Добрушин Р. Л.*, Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной моделях Изинга. Теория вероятностей и ее применения, 1965, *10*, № 2, 209—230 (РЖМат, 1967, 12В164)
2. —, Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием. Функц. анализ и его прилож., 1968, *2*, № 4, 31—43 (РЖМат, 1969, 7В120)
3. —, Гиббсовское состояние, описывающее сосуществование фаз для трехмерной модели Изинга. Теория вероятностей и ее приложения, 1972, № 4, 619—639 (РЖМат, 1973, 4В251)
4. *Пирогов С. А.*, *Синай Я. Г.*, Правило фаз Гиббса. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 5, 191 (РЖМат, 1976, 3Б948)
5. —, —, Фазовые диаграммы классических решетчатых систем. Теор. и мат. физ., 1975, *25*, № 3, 358—369 (РЖМат, 1976, 5Б476)
6. —, —, Фазовые диаграммы классических решетчатых систем. III—IV. Теор. и мат. физ., 1976, *26*, № 1, 61—76 (РЖМат, 1976, 9В231)
7. *Шлосман С. Б.*, Убывание корреляций в двумерных моделях с непрерывной симметрией. Теор. и мат. физ. 1978, 37, № 3, 427—430
8. *Albeverio S.*, *Høegh-Krohn R.*, Uniqueness of physical vacuum and the Wightman functions in the infinite volume limit for some non-polynomial interactions. Communs. Math. Phys., 1973, *30*, 171—200 (РЖМат, 1973, 9Б502)
9. —, —, The Wightman axioms and the mass gap for strong interactions of exponential type in two-dimensional space-time. J. Funct. Anal., 1974, *16*, 39—82 (РЖМат, 1974, 11Б584)
10. *Asano T.*, Lee—Yang theorem and the Griffiths inequality for the anisotropic Heisenberg ferromagnet. Phys. Rev. Lett., 1970, *24*, 1409—1411
11. —, Theorems on the partition functions for Heisenberg ferromagnets. J. Phys. Soc. Jap., 1970, *25*, 350—359
12. *Bortz A. B.*, *Griffiths R. B.*, Phase transitions in anisotropic classical H eisenberg ferromagnets. Communs Math. Phys., 1972, *26*, № 2, 102—108 (РЖМат, 1973, 2Б491)
13. *Brascamp H. J.*, *Kunz H.*, Analyticity properties of the Ising model in the antiferromagnetic phase. Communs Math. Phys., 1973, *32*, № 2, 93—106 (РЖМат, 1974, 1Б403)
14. —, *Lieb E.*, On extensions of the Brunn—Minkowski and Prékopa—Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation. J. Funct. Anal., 1976, *22*, № 4, 366—389 (РЖМат, 1977, 3Б623)
15. *Bricmont J.*, Correlation inequalities for two component fields. Ann. Soc. sci. Bruxelles, 1976, *90*, № 3, 245—252 (РЖМат, 1977, 2В229)

16. —, *Fontaine J. R., Landau L. J.*, On the uniquenes of the equilibrium state in plane rotators. Communs Math. Phys., 1977, *56*, № 3, 281—296
17. *Capocaccia D., Cassandro M., Ciccotti G.*, Equilibrium states of an Ising ferromagnet in the low temperature region. Communs. Math. Phys., 1973, *29*, № 1, 31—42 (РЖМат, 1973, 7Б436)
18. —, —, *Olivieri E.*, A study of metastability in the Ising model. Communs. Math. Phys., 1974, *39*, № 3, 185—205
19. *Cartier P.*, Inégalités de corrélation en mécanique statistique Lect. Notes Math., 1974, № 383, 242—264 (РЖМат, 1975, 1Б723)
20. *Cassandro M., Da Fano A., Olivieri E.*, Existence of phase transition for a lattice model with a repulsive hard core and an attractive short range interaction. Communs Math. Phys., 1975, *44*, 45—51 (РЖМат, 1976, 3Б952)
21. —, *Gallavotti G., Lebowitz J. L., Monroe J. L.*, Existence and uniqueness of equilibrium states for some spin and continuum systems. Communs Math. Phys., 1973, *32*, № 2, 153—165 (РЖМат, 1974, 2Б557)
22. *Dobrushin R. L.*, Existence of phase transition in models of a lattice gas. Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability. Univ. of Calif. Press, 1967, *3*, 73—87
23. *Dunlop F.*, Correlation inequalities for multicomponent rotators. Communs. Math. Phys., 1976, *49*, № 3, 247—256
24. —, Zeroes of partition functions via correlation inequalities. J. Statist. Phys., 1977, *17*, № 4, 215—228
25. —, *Newman Ch. M.*, Multicomponent field theories and classical rotators, Communs Math. Phys., 1975, *44*, 223—235 (РЖМат, 1976, 6В238)
26. *Dyson F. J.*, Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet. Communs Math. Phys., 1969, *12*, № 1, 91—100
27. —, Non-existence of spontaneous magnetization in a one-dimensional Ising ferromagnet. Communs. Math. Phys., 1969, *12*, № 3, 212—215 (РЖМат, 1970, 2Б561)
28. —, An Ising ferromagnet with discontinuous long-rance order. Communs. Math. Phys., 1977, *21*, 269—283
29. —, *Lieb E. H., Simon B.*, Phase transitions in quantum spin systems with isotropic and non-isotropic interactions. Phys. Rev. Lett., 1977, *37*, № 2, 120—128
30. *Eckmann J. P., Magnen J., Sénéor R.*, Decay properties and Borel summability for Schwinger functions in $P(\varphi)_2$-theories. Communs Math. Phys., 1975, *39*, 251—272 (РЖМат, 1975, 8Б497)
31. *Edwards D. A.*, On the Holley-Preston inequalities. Proc. Roy. Soc. Edinbourgh, 1978, *A78*, № 3-4, 265—272
32. *Ellis R. S., Monroe J. L.*, A simple proof of the *GHS* and further inequalities. Communs. Math. Phys., 1975, *41*, 33—38 (РЖМат, 1975, 10Б490)
33. —, —, *Newman C. N.*, The *GHS* and other inequalities for a class of even ferromagnets. Communs. Math. Phys., 1976, *46*, 167—182 (РЖМат, 1976, 9Б413)
34. —, —, Necessary and sufficient conditions for the *GHS* inequality with applications to analysis and probabilty. J. Funct. Anal., 1978, *237*, 83—99
35. —, —, Quantum mechanical soft springs and reverse correlation inequalities. Preprint, 8 p.
36. —, —, Limit theorems for sums of dependent random variables occuring in statistical mechanics. Preprint
37. *Elvey J. S. N.*, The Yang—Lee distribution for a class of lattice gases. Communs Math. Phys., 1974, *35*, 101—112
38. *Fannes M., Verbeure A.*, Correlation inequalities and equilibrium states. Communs Math. Phys., 1977, *55*, № 2, 125—131 (РЖМат, 1978, 2В266)
39. —, —, Correlation inequalities and equilibrium states. II. Communs Math. Phys., 1977, *57*, № 2, 165—171
40. —, —, Global thermodinamical stability and correlation inequalities. J. Math. Phys., 1978, *19*, № 3, 558—560

41. *Feldman J.*, The $\lambda\varphi_3^4$ field theory in finite volume. Communs. Math. Phys., 1974, *31*, № 2, 93—120 (РЖМат, 1975, 8Б541)
42. —, *Osterwalder K.*, The construction of φ_3^4-quantum field models. Proc. of the Int. Colloq. on Math. Methods of QFT, Marseille 1975
43. —, —, The Wightman axioms and the mass gap for weakly coupled φ_3^4-quantum field theories. Ann. Phys., 1976, *97*, № 1, 80—135
44. *Fisher M. E.*, Rigorous inequalities for critical-points correlation exponents. Phys. Rev.. 1969, *180*, № 2, 594—600
45. *Fortuin C. M., Kastein P. W., Ginibre J.*, Correlation inequalities on some partially ordered sets. Communs Math. Phys., 1971, *22*, № 2, 89—103
46. *Fröhlich J.*, Schwinger functions and their generating functionals. I. Helv. phys. Acta, 1974, *47*, № 3, 265—306
47. —, Schwinger functions and their generating functionals. II. Markovian and generating path space measures. Adv. Math., 1977, *23*, № 2. 119—180 (РЖМат, 1978, 1В273)
48. —, Phase transitions, Goldstone bosons and topological superselection rules. Acta phys. austr., 1976, Suppl. XV, 133—269
49. —. *Lieb E. L.*, Existence of phase transitions for anisotropic Heisenberg models. Phys. Rev. Lett., 1977, *38*, № 3, 440—448
50. —, *Park Y. M.*, Correlation inequalities and the thermodynamic limit for classical and quantum continuous systems. Communs Math. Phys., 1978, *59*, № 3, 235—266
51. —, *Simon B.*, Pure states for general $P(\varphi)_2$-theories: constructions regularity and variational equality. Ann. Math., 1977, *105*, № 3, 493—526 (РЖМат, 1978, 3В194)
52. —, —, *Spencer T.*, Infrared bounds phase transitions and continous symmetry breaking. Communs Math. Phys., 1976, *50*, № 1, 79—87
53. *Ginibre J.*, Simple proof and generalization of Griffiths second inequality. Phys. Rev. Lett., 1969, *23*, 828—830
54. —, Existence of phase transitions for quantum lattice systems. «Communs Math. Phys., 1969, *14*, № 3, 205—234
55. —, General formulation of Griffiths inequality. Communs Math. Phys., 1970, *16*, № 4, 310—328 (РЖМат, 1970, 10Б456)
56. —, Correlation inequalities in statistical mechanics. Math. Aspects Statist. Mech. (SIAM—AMS Proc., Vol. 5). Providence, R. I., 1972, 27—45 (РЖМат, 1973, 6Б524)
57. *Glimm J., Jaffe A., Spencer T.*, The particle structure of the weakly coupled $P(\varphi)_2$-model and other applications of high temperature expansions. Part I. Physics of quantum field models. Lect. Notes Phys., 1973, *25*, 132—198 (РЖМат, 1974, 9Б641)
58. —, —, —, The particle structure of the weakly coupled $P(\varphi)_2$-model and other applications of high temperature expanstions. Part II. The cluster expansion. Lect. Notes Phys., 1973, *25*, 199—242 (РЖМат, 1974, 9Б642)
59. —, —, —, The Wightman axioms and particle structure in the $P(\varphi)_2$ quantum field model. Ann. Math., 1974, *100*, № 3, 585—632 (РЖМат, 1975, 5Б939)
60. —, —, —, Existence of phase transitions for quantum fields. Proc., 1975, Marseille conference
61. —, —, —, Phase transition for φ_2^4 quantum fields. Communs Math. Phys., 1975, *45*, № 3, 203—216 (РЖМат, 1976, 7Б498)
62. —, —, —, A convergent expansion about mean field theory. I. Expansion. Ann. Phys., 1976, *101*, 610—630
63. —, —, —, A convergent expansion about mean field theory. II. Convergence of the expansion. Ann. Phys., 1976, *101*, 631—669
64. *Griffiths R. B.*, Peierls proof of spontaneous magnetisation in a two-dimensional Ising ferromagnet. Phys. Rev., 1964, *136A*, 437—439
65. —, Correlations in Ising ferromagnets. I. J. Math. Phys., 1967, *8*, 478—483
66. —, Correlation in Ising ferromagnets. II. J. Math. Phys., 1967, *8*, 484—489

67. —, Correlation in Ising ferromagnets. III. A mean-field bound for binary correlations. Communs Math. Phys., 1967, *6*, № 2, 121—127
68. —, Rigorous results for Ising ferromagnets with arbitrary spin. J. Math. Phys., 1969, *10*, 1559—1565
69. —, Phase transitions, in: «Statistical Mechanics and quantum field theory, les Houches, 1970», ed. C. De Witt and R. Stora, Gordon and Breach: New York, 1971
70. —, Rigorous results and theorems, in: «Phase transitions and critical phenomena, vol. 1. Exact results», ed. C. Domb and M. S. Green, Academic Press, New York, 1972, 7—109
71. —, *Ruelle D*, Strict convexity (continuity) of the pressure in lattice systems. Communs Math. Phys., 1971, *23*, № 3, 169—175 (РЖМат, 1972, 6Б823)
72. —, *Hurst C., Sherman S.*, Concoavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. J. Math. Phys., 1970, *11*, № 3, 790—795 (РЖМат, 1970, 10Б450)
73. *Guerra F.*, Exponential bounds in lattice field theory. Proc. Int. Colloq. on Math. Methods of OFT, Marseille, 1975
74. —, *Rosen L., Simon B.*, Nelson's symmetry and the infinite volume behavior of the vacuum in $P(\varphi)_2$. Communs Math. Phys., 1972, *27*, № 1, 10—22 (РЖМат, 1973, 2Б513)
75. —, —, —, The vacuum energy for $P(\varphi)_2$: infinite volume limit and coupling constant dependence. Communs Math. Phys., 1973, *29*, № 3, 233—247 (РЖМат, 1973, 7Б456)
76. —, —, —, Correlation inequalities and the mass gap in $P(\varphi)_2$. III. Mass gap for a class of strongly coupled theories with non-zero external field. Communs Math. Phys., 1975, *41*, № 1, 19—32
77. —, —, —, The $P(\varphi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics. I. Ann Math., 1975, *101*, № 2, 111—189 (РЖМат, 1975, 9Б450)
78. —, —, —, The $P(\varphi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics. II. Ann. Math., 1975, *101*, № 2, 191—259 (РЖМат, 1975, 9Б451)
79. *Harris T. E.*, A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. Proc. Cambridge Philos Soc., 1960, *56*, № 1, 13—20 (РЖМат, 1961, 1В211)
80. *Hegerfeld G. C.*, Correlation inequalities for Ising ferromagnet with symmetries. Communs Math. Phys., 1977, *57*, № 3, 259—266
81. —, *Nappi C.*, Mixing properties in lattice systems. Communs Math. Phys., 1977, *53*, № 1, 1—7 (РЖМат, 1977, 12В303)
82. *Higuchi Y., Shiga T.*, Some results on Markov processes in infinite lattice spin systems. J. Math. Kyoto Univ., 1975, *15*, 211—229
83. *Holley R.*, Free energy in a Markovian model of a lattice spin system. Communs Math. Phys., 1971, *23*, № 2, 87—99 (РЖМат, 1972, 3В49)
84. —, Remarks on the *FKG* inequalities. Communs Math. Phys., 1974, *36*, № 3, 227—231 (РЖМат, 1974, 1В8)
85. *Holsztynski W., Slawny J.*, Phase transitions in ferromagnetic spin systems at low temperatures. Lett. nuovo com., 1975, *13*, № 3, 534—544
86. *Hurst C. A., Sherman S.*, Griffiths' theorems for the ferromagnetic Heisenberg model. Phys. Rev. Letters, 1969, *22*, № 25, 1357—1358
87. —, —, Correlation inequalities for Heisenberg ferromagnets. J. Math. Phys., 1970, *11*, № 8, 2473—2480
88. *Iedrzejewski I.*, *GKS* and other inequalities for Ising model with random interaction. J. Phys. A.: Math. and Gen., 1978, *11*, № 3, 569—573
89. *Kelly D., Sherman S.*, General griffiths inequalities on correlations in Ising ferromagnets. J. Math. Phys., 1968, *9*, 466—484
90. *Kunz H., Pfister C.-E.*, First order phase transition in the plane rotator ferromagnetic model in two dimensions. Communs Math. Phys., 1976, *46*, № 3, 245—251 (РЖМат, 1976, 9Б412)

91. —, —, *Vuillermot P.-A.*, Correlation inequalities for some classical spin vector models. Phys. Lett., 1975, *54A*, № 6, 428—430
92. *Lebowitz J. L.*, Bounds on the correlations and analyticity properties of ferromagnetic Ising spin systems. Communs Math. Phys., 1972, *28*, № 4, 313—321 (РЖМат, 1973, 6Б518)
93. —, More inequalities for Ising ferromagnets. Phys. Rev., 1972, *B5*, № 7, 2538—2541
94. —, *GHS* and other inequalities. Communs Math. Phys., 1974, *35*, № 2, 87—92 (РЖМат, 1974, 7Б508)
95. —, On the equivalence of different order parameters for Ising ferromagnets. J. Statist. Phys., 1977, *16*, № 1, 3—10 (РЖМат, 1977, 10В162)
96. —, Coexistence of phases in Ising ferromagnets. J. Statist. Phys., 1977, *16*, № 6, 463—476
97. —, *Martin-Löf A.*, On the uniqueness of the equilibrium state for Ising spin systems. Communs Math. Phys., 1972, *25*, № 4, 276—282 (РЖМат, 1972, 11Б587)
98. —, —, Inequalities for higher order Ising spins and for continuum fluids. Communs Math. Phys., 1972, *28*, № 4, 301—311 (РЖМат, 1973, 6Б517)
99. —, *Penrose O.*, Decay of correlations. Phys. Rev. Lett., 1975, *35*, № 4, 549—557
100. —, —, Cluster and percolation inequalities for lattice systems with interactions. J. Statist. Phys., 1977, *16*, № 4, 321—337 (РЖМат, 1978, 2В244)
101. —, *Presutti E.*, Statistical mechanics of systems of unbounded spins. Communs Math. Phys., 1976, *50*, № 3, 195—218 (РЖМат, 1977, 5В169)
102. *Leff H. S.*, Correlation inequalities for coupled oscillators. J. Math. Phys., 1971, *12*, № 4, 569—578 (РЖМат, 1971, 11Б628)
103. *Liberto Francesco di*, On the uniqueness of the equilibrium state for antiferromagnetic Ising spin system in the phase transition region. Communs Math. Phys., 1973, *29*, № 4, 293—310 (РЖМат, 1973, 7Б442)
104. *Maguen J.*, *Sénéor R.*, The infinite volume limit of the φ_3^4 model. Ann. Inst. H. Poincaré, 1976, XXIV, № 2, 95—219
105. *Malyshev V. A.*, Phase transition in classical Heisenberg ferromagnets with arbitrary parameter of anisotropy. Communs Math. Phys., 1975, *40*, № 1, 75—82 (РЖМат, 1975, 9Б457)
106. *Martin-Löf A.*, On the spontaneous magnetisation in the Ising model. Communs Math. Phys., 1972, *24*, № 4, 253—259 (РЖМат, 1970, 8Б498)
107. *McBryan O. A.*, *Spencer T.*, On the decay of correlations in $SO(n)$-symmetric ferromagnets. Communs Math. Phys., 1977, *53*, № 3, 299—302 (РЖМат, 1977, 10Б998)
108. *Messager A.*, *Miracle-Sole S.*, Equilibrium states of two-dimensional Ising model in the two-phase region. Communs Math. Phys., 1975, *40*, № 2, 187—196
109. —, —, Correlation functions and boundary conditions in the Ising ferromagnet. J. Statist. Phys., 1977, *17*, № 4, 245—262
110. —, —, *Pfister C.*, Correlation inequalities and uniqueness of the equilibrium state for the plane rotator ferromagnetic model. Communs Math. Phys., 1978, *58*, № 1, 19—29
111. *Miyamoto M.*, A remark to Harris theorem on percolation. Communs Math. Math., 1975, *44*, № 2, 169—173 (РЖМат, 1976, 4В343)
112. *Monroe J. L.*, Correlation inequalities for two-dimensional vector spin systems. J. Math. Phys., 1975, *16*, № 9, 1809—1812 (РЖМат, 1976, 3Б496)
113. —, *Siegert A. J. F.*, *GKS* inequalities for arbitrary spin Ising ferromagnets. J. Statist. Phys., 1974, *10*, 237
114. *Myerson R. I.*, New bounds for the critical temperature and the correlation functions of the classical planar rotors. Phys. Rev. B: Solid State, 1977, *16*, № 7, 3203—3207
115. *Nelson E.*, Probability theory and Euclidean field theory. Lect. Notes. Phys., 1973, *25*, 94—124 (РЖМат, 1974, 11В133)
116. *Newman C. M.* Nondiscrete spins and the Lee—Yang theorem. Lect. Notes Phys., 1973. *25*, 321—325 (РЖМат, 1974, 8Б498)

117. —, Zeroes of the partition function for generalized Ising systems. Communs Pure and Appl. Math., 1974, *27*, № 2, 143—159 (РЖМат, 1975, 3Б499)
118. —, Inequalities for Ising models and field theories which obey the Lee — Yang theorem. Communs Math. Phys., 1975, *41*, № 1, 1—9 (РЖМат, 1975, 10Б487)
119. —, Gaussian correlation inequalities for ferromagnets. Z. Warscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1975, *3*, № 2, 75—93 (РЖМат, 1976, 7В217)
120. —, Moment inequalities for ferromagnetic Gibbs distributions. J. Math. Phys., 1975, *16*, № 9, 1956—1959 (РЖМат, 1976, 3Б498)
121. —, An extension of Khintchine's inequality. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 5, 913—915 (РЖМат, 1976, 6В21)
122. —, Rigorous results for general Ising ferromagnets. J. Statist. Phys., 1976, *15*, № 5, 399—406 (РЖМат, 1977, 8В242)
123. —, Fourier transforms with only real zeroes. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *61*, № 2, 245—251 (РЖМат, 1977, 10Б194)
124. *Nicolai H.*, An inequality for fermion-systems. Communs Math. Phys., 1978, *59*, № 1, 71—80
125. *Park Y. M.*, Lattice approximation of the $\lambda\varphi^4-\mu\varphi$ field theory in a finite volume. J. Math. Phys., 1975, *16*, № 8, 1065—1070
126. *Peierls R.*, On Ising's model of ferromagnetism. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1936, 32, 477—481
127. *Percus J. K.*, Correlation inequalities for Ising spin lattices. Communs Math. Phys., 1975, *40*, № 3, 283—308 (РЖМат, 1975, 9Б459)
128. *Powers R. T.*, Resistance inequalities for *KMS* states of the isotropic Heisenberg model. Communs Math. Phys., 1976, *51*, № 2, 151—156 (РЖМат, 1977, 7Б1019)
129. *Preston C. J.*, An application of the *GHS* inequalities to show the absence of phase transitions for Ising spin system. Communs Math. Phys., 1974, *35*, № 3, 253—257 (РЖМат, 1974, 7Б509)
130. —, A generalization of the *FKG* inequalities. Communs Math. Phys., 1974, *36*, № 3, 233—242 (РЖМат, 1974, 12Б303)
131. —, *Roepstorff G.*, Correlation inequalities in quantum statistical mechanics and their application in the Kondo problem. Communs Math. Phys., 1976, *46*, № 3, 253—262 (РЖМат, 1977, 2Б571)
132. —, A stronger version of Bogoliubov's inequality and the Heisenberg model. Communs Math. Phys., 1977, *53*, № 2, 143—151 (РЖМат, 1977, 10В165)
133. *Roos H.*, Strict convexity of the pressure: a note on a paper by R. B. Griffiths and D. Ruelle. Communs Math. Phys., 1974, *36*, № 4, 263—276 (РЖМат, 1974, 11Б568)
134. *Shrader*, New correlation inequalities for the Ising model and $P(\varphi)_2$-theories. Phys. Rev. B., 1977, *15*, № 5, 2798—2803
135. *Sherman S., A* ferromagnetic inequality. J. Combin Theory, 1969, *6*, № 4, 399—401 (РЖМат, 1969, 12В324)
136. —, When is an Ising magnet a ferromagnet. J. Math. Phys., 1970, *11*, № 8, 2480—2481
137. *Simon B.*, Correlation inequalities and the mass gap in $P(\varphi)_2$. I. Domination by the two point function. Communs Math. Phys., 1973, *31*, № 2, 127—136 (РЖМат, 1973, 11Б430)
138. —, Correlation inequalities and the mass gap in $P(\varphi)_2$. II. Uniqueness of the vacuum for a class of strongly coupled theories. Ann. Math., 1975, *101*, № 2, 260—267
139. —, The $P(\varphi)_2$ Euclidean (quantum) field theory Princeton Univ. Press: Princeton N. J., 1974
140. —, *Griffiths R. B.*, The $(\varphi^4)_2$ field theory as a classical Ising model. Communs Math. Phys., 1973, *33*, № 2, 145—164 (РЖМат, 1974, 3Б515)
141. *Slawny J.*, Analyticity and uniqueness for spin 1/2 classical ferromagnetic lattice systems at low temperatures. Communs Math. Phys., 1973, *34*, № 4, 271—296 (РЖМат, 1974, 6Б580)

142. —, A family of equilibrium states relevant to low temperature behavior of spin 1/2 classical ferromagnets. Breaking of translation symmetry. Communs Math. Phys., 1974, *35*, № 4, 297—305 (РЖМат, 1974, 8Б480)
143. —, Ferromagnetic spin systems at low temperatures. Communs Math. Phys., 1976, *46*, № 1, 75—97 (РЖМат, 1976, 8Б597)
144. *Sylvester G. S.*, Inequalities for continuous spin Ising ferromagnets. J. Statist. Phys., 1976, *15*, № 4, 327—341
145. —, Representations and inequalities for Ising model Ursell functions. Communs Math. Phys., 1975, *42*, № 3, 209—220 (РЖМат, 1975, 12Б623)
146. —, Representations and inequalities for Ising model Ursell functions. Rev. appendix. Preprint.
147. *Szasz D.*, Correlation inequalities for non pure ferromagnets. Preprint, 1977
148. *Van Beijeren H.*, Interface sharpness in the Ising system. Communs Math. Phys., 1975, *40*, № 1, 1—6