УДК 519.213.1:517.582

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Г. В. Мартынов

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящего обзора является изложение основных известных методов, относящихся к вычислению значений многомерной и одномерной функций нормального распределения и описанных в литературе до середины 1978 года. Несмотря на то, что исследованию этой важной в практическом отношении задачи посвящено большое количество работ, ее удовлетворительного решения не найдено в общем случае до настоящего времени. С практической точки зрения удовлетворительно решена задача о вычислении функции нормального распределения с числом измерений, не превышающем трех, и задача о вычислении вероятности первого квадранта.

В настоящем обзоре использованы следующие обозначения:

$m=(m_1, \ldots, m_n)'$ — вектор математических ожиданий; $\Sigma=(\sigma_{ij})$ — ковариационная матрица; $\Sigma^{-1}=(q_{ij})$ — матрица, обратная к ковариационной; $\varphi_n(x; m, \Sigma)$ — плотность n-мерного нормального распределения с вектором математических ожиданий m и ковариационной матрицей Σ (Σ — положительно определена);

$$\Phi_n(x; m, \Sigma)=\int\limits_{y<x} \varphi_n(y; m, \Sigma)\,dy \tag{0.1}$$

— функция n-мерного нормального распределения. Неравенство $y<x$ означает, что все элементы вектора y меньше соответствующих элементов вектора x. Выражение в правой части (0.1) имеет смысл при положительно определенной матрице Σ;

$$\Phi_n^*(x; m, \Sigma)=\int\limits_{y>x} \varphi_n(y; m, \Sigma); \tag{0.2}$$

$R=(\rho_{ij})$ — корреляционная матрица, $\rho_{ii}=1$; $\Phi_n(x; 0, R)$ — стандартная функция n-мерного нормального распределения; $\Phi(x)=\Phi_1(x; 0, 1)$ — функция одномерного нормального распределения; $\varphi(x)=\Phi'(x)$ — функция плотности одномерного нормального распределения; $\psi(t)=\Phi^{-1}(t)$ — квантиль нормального распределения; $\Phi(x_1, x_2; \rho_{12})=\Phi_2((x_1, x_2)'; 0, R)$ — функция двумерного нормального распределения; $K_n(R)=\Phi_n^*(0; 0, R)$ — вероятность первого квадранта при стандартном нормальном распределении; R^* — корреляционная матрица с равными коэффициентами корреляции $\rho_{ij}=\rho$, $i\neq j$;

$$P_n(\rho)=K_n(R^*).$$

В обзоре, за исключением нескольких специальных случаев, рассматривается невырожденное нормальное распределение.

§ 1. МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕГО ВИДА

1. Не ограничивая общности, будем считать, что дисперсии компонент n-мерного нормально распределенного вектора равны 1, т. е. $\Sigma=R$, а их математические ожидания равны нулю. Плэкет [106] (см. также [18]) предложил метод преобразования правой части (0.2) к сумме, содержащей интегралы меньшей кратности. Этот метод заключается в следующем.

Введем некоторую корреляционную матрицу $K=(\varkappa_{ij})$ и будем рассматривать матрицы K и R как элементы $n(n-1)/2$-мерного пространства. Введем матрицу

$$K_t=(\lambda_{ij}(t))=tR+(1-t)K,$$

являющуюся корреляционной матрицей при $t\in[0, 1]$. Из формулы полного дифференциала следует, что

$$\Phi_n^*(x; 0, R)=\Phi_n^*(x; 0, K)+$$

$$+\sum_{i<j}\int_{\varkappa_{ij}}^{\rho_{ij}}\frac{\partial\Phi_n^*(x; 0, K_t)}{\partial\lambda_{ij}(t)}\,d\lambda_{ij}(t). \qquad (1.1)$$

Пусть матрица R разбита на блоки следующим образом

$$R=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix},$$

где R_{11} — квадратная матрица второго порядка. Аналогично представим матрицу $C=R^{-1}$,

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}.$$

Вектор $x=(x_1, \ldots, x_n)$ разобъем на две части: $x=\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)}\end{pmatrix}$, где $x^{(1)}=(x_1, x_2)'$. Справедлива формула

$$\frac{\partial \Phi_n^*(x;\,0,\,R)}{\partial \lambda_{12}(t)} = \varphi(x_1,\,x_2;\,\rho_{12})\,\Phi_{n-2}^*(x^{(2)};\,b,\,C_{22}^{-1}), \tag{1.2}$$

где $b=(b_3,\,\ldots,\,b_n)'=R_{21}R_{11}^{-1}x^{(1)}$. Эта формула вытекает из следующих формул:

$$\frac{\partial \varphi_n(x;\,0,\,R)}{\partial \rho_{ij}} = \frac{\partial^2 \varphi_n(x;\,0,\,R)}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\frac{\partial \Phi_n^*(x;\,0,\,R)}{\partial \rho_{12}} = \int_{x_3}^{\infty}\ldots\int_{x_n}^{\infty}\varphi_n((x_1,\,x_2,\,y_3,\,\ldots,\,y_n)';\,0,R)\,dy_3\ldots dy_n, \tag{1.3}$$

$$\varphi_n(x;\,0,\,R)=\varphi_2(x^{(1)};\,0,\,R_{11})\,\varphi_{n-2}(x^{(2)};\,R_{21}R_{11}^{-1}x^{(1)},\,C_{22}^{-1}).$$

Корреляционную матрицу K в правой части равенства (1.1) можно выбрать, например, таким образом, чтобы она отличалась от матрицы R только одним элементом $\varkappa_{n-1,\,n}$ и имела ранг $n-1$. В этом случае сумма в правой части (1.1) содержит только один член, а все интегралы имеют порядок $n-1$ (с учетом формулы (1.2)). Такое значение $\varkappa_{n-1,\,n}$ может быть найдено как одно из решений квадратного уравнения

$$K_{21}R_{11}^{-1}K_{12}=1.$$

Применяя описанную процедуру повторно, можно сократить порядок входящих интегралов примерно вдвое. Реально, описанный метод может быть применен, по-видимому, для вычисления функции нормального распределения до пятого порядка.

2. В работе Кендалла [83] производится разложение функции двумерного нормального распределения в ряд по тэтрахорическим функциям

$$\tau_r(x)=\frac{H_{r-1}(x)\,\varphi(x)}{(r!)^{1/2}},$$

где $H_r(x)$ — r-й полином Эрмита. Используя содержащееся в этой работе указание, Дат [59] получил разложение общего вида

$$\Phi_n(x;\,0,\,R)=\sum_{j_{12}=0}\ldots\sum_{j_{n-1,n}=0}A_{j_{12}\ldots j_{n-1,n}}, \tag{1.4}$$

где

$$A_{j_{12}\ldots j_{n-1,n}}=\prod_{\substack{m,s=1\\ m<s}}^{n}(\rho_{ms}^{j_{ms}}/j_{ms}!)\prod_{k=1}^{n}(n_k!)^{1/2}\,\tau_{n_k}(x_k),$$

$$n_k=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} j_{kl}.$$

Это разложение рассматривалось независимо также в работе [98]. В этой же работе рассмотрены результаты вычислений по этой формуле вплоть до $n=6$.

При $n=2$ ряд (1.4) имеет вид

$$\Phi(x, y; \rho)=\sum_{r=0}^{\infty} \rho^r \tau_r(x)\tau_r(y)$$

и сходится равномерно по x и y при всех $\rho \leqslant 1$. При $n=3$ ряд (1.4) имеет вид

$$\Phi_3(x; 0, R)=\sum_{j,k,l} \frac{\rho_{12}^j \rho_{23}^k \rho_{13}^l}{j!\,k!\,l!}((j+k)!\,(j+l)!\,(k+l)!)^{1/2}\times$$
$$\times \tau_{j+k}(x_1)\,\tau_{j+l}(x_2)\,\tau_{k+l}(x_3).$$

Из интегрального представления для полиномов Эрмита следует интегральное представление для тетрахорических функций

$$\tau_m(x)=\frac{1}{\pi(m!)^{1/2}}\int_0^{\infty}\exp(-s^2/2)\,s^{m-1}\cos(xs-(m-1)\pi/2)\,ds. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.4), после преобразований Дат [59, 60] показал, что

$$\Phi_n^*(x; 0, R)=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} D_{1;j}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\sum_{i<j=1}^{n} D_{2;ij}+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\sum_{i<j<k=1}^{n} D_{3;ijk}+\ldots+D_{n;1,\ldots,n}, \quad (1.6)$$

где

$$D_{k;j_1,\ldots,j_k}=D_k(x_{j_1},\ldots,x_{j_k})=$$
$$=2(2\pi)^{-k}\int_0^{\infty}ds_1\ldots\int_0^{\infty}ds_k e^{-(s_1^2+\ldots+s_k^2)/2}\times$$
$$\times d_k(s_1,\ldots,s_k, x_{j_1},\ldots,x_{j_k})\Big/\prod_{l=1}^{k} s_l,$$

и, например,

$$d_1=\sin_1=\sin x_1 s_1, \quad d_2=e_{-12}\cos_{1-2}-e_{12}\cos_{1+2},$$
$$d_3=e_{12+13+23}\sin_{1+2+3}-e_{-12-13+23}\sin_{-1+2+3}-$$
$$-e_{-12+13-23}\sin_{1-2+3}-e_{12-13-23}\sin_{1+2+3},$$
$$d_4=e_{12+13+23+14+24+34}\cos_{1+2+3+4}+e_{12-13-23-14-24+34}\cos_{-1-2-3+4}+$$
$$+e_{-12+13-23-14+24-34}\cos_{-1+2-3+4}+e_{-12-13+23+14-24-34}\cos_{1-2-3+4}-$$

$$-e_{-12-13+23-14+24+34}\cos_{1+2-3+4}-e_{12+13+23-14-24-34}\cos_{1+2+3-4}.$$

Использованы следующие обозначения

$$e_{p_1q_1+\ldots+p_mq_m}=\exp\{-(d_{p_1q_1}\rho_{p_1q_1}s_{p_1}s_{q_1}+\ldots+d_{p_mq_m}\rho_{p_mq_m}s_{p_m}s_{q_m}\},$$

$$\sin_{p_1+\ldots+p_m}=\sin(d_{p_1}x_{p_1}s_{p_1}+\ldots+d_{p_m}x_{p_m}s_{p_m}),$$

$$\cos_{p_1+\ldots+p_m}=\cos(d_{p_1}x_{p_1}s_{p_1}+\ldots+d_{p_m}x_{p_m}s_{p_m}).$$

Здесь $d_{p_iq_i}=1$, если перед p_iq_i стоит плюс, и -1, если — минус. Аналогично определяется d_{p_i}.

В этой же работе сообщается о возможности применения описанных формул для вычисления значений $\Phi_n(x;\,0,\,R)$ при $n\leqslant 6$.

3. В работе Андела [28] и упрощающей ее работе Шидака [126] получена формула для вероятности прямоугольной области вида $A=[-a_1,\,a_1]\times\ldots\times[-a_n,\,a_n]$ при функции распределения $\Phi_n(x;\,0,\,R)$. Пусть $\Sigma^{-1}=(q_{ij})$. Эта формула имеет вид

$$P(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k, \tag{1.7}$$

где

$$c_k=|\det\Sigma^{-1}|^{1/2}\frac{1}{k!}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{-a_1}^{a_1}\ldots\int\limits_{-a_n}^{a_n}\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_jq_{ij}\right)^k\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2q_{ii}\right\}dx_1\ldots dx_n.$$

В частности,

$$c_0=|\det\Sigma^{-1}|^{1/2}(q_{11}\ldots q_{nn})^{-1/2}2^n\prod_{i=1}^{n}\left[\Phi(q_{ii}^{1/2}a_i)-\frac{1}{2}\right],$$

$$c_1=0.$$

Приведена формула для оценки остатка ряда (1.7).

4. В работе Милтона [94] вычисление $\Phi_n(x;\,0,R)$ производится с применением квадратурной формулы Симпсона к интегралу порядка $n-1$, получаемому из $\Phi_n(x;\,0,R)$ в предположении, что в подынтегральном выражении выделяется функция одномерного нормального распределения, которая вычисляется хорошо разработанными методами (см. § 6). Возможно, этот метод может быть усовершенствован путем выделения функции двумерного или трехмерного нормального распределения и дальнейшего вычисления ее значений методами, описанными ниже в § 2 и § 3. В работе [94] сообщается, что вычисление одного значения функции нормального распределения шестого порядка с точностью 10^{-4} производилось на ЭВМ за 159 секунд.

В работах [55, 63] для вычисления $\Phi_n(x;\,0,R)$ применяется метод Монте-Карло.

§ 2. ДВУМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

1. Задача о вычислении функции двумерного нормального распределения подробно рассмотрена в книге Н. В. Смирнова и Л. Н. Большева [21]. Это работа основана на работах Оуэна [102, 103], но методически более совершенна. Более ранними работами являются работы [100, 107, 124].

Из формулы (1.1) сразу можно получить выражение для функции двумерного нормального распределения в виде однократного интеграла. Однако более удобной является формула, использующая функцию Оуэна (см. [21, 103])

$$T(h, a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^a \frac{\exp\left\{-\frac{h^2}{2}(1+x^2)\right\}}{1+x^2}\,dx.$$

Справедлива формула

$$\Phi(x, y; \rho)=\frac{1}{2}\Phi(x)+\frac{1}{2}\Phi(y)-T(x, a_1)-T(y, a_2),$$

где

$$a_1=\frac{y-\rho x}{x\sqrt{1-\rho^2}},\quad a_2=\frac{x-\rho y}{y\sqrt{1-\rho^2}},\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0.$$

Вычисление $\Phi(x, y; \rho)$ в остальных квадрантах производится путем преобразования аргументов x и y к первому квадранту по формулам

$$\Phi(x, y; \rho)=\Phi(x)-\Phi(x, -y; -\rho),$$

$$\Phi(x, y; \rho)=\Phi(y)-\Phi(-x, y; \rho),$$

$$\Phi(x, y; \rho)=\Phi(x)+\Phi(y)-1+\Phi(-x, -y; \rho).$$

В [21] представлены различные разложения для $T(h, a)$ и описаны ее свойства. В работе Рубена [110] предложена другая формула для $\Phi(x, y; \rho)$, использующая функции $W(c, \theta)$, простым образом связанные с $T(h, a)$. Рассмотрены различные разложения для функции $W(c, \theta)$, в том числе в непрерывную дробь.

2. В работе [129] рассматривается следующее представление для функции двумерного нормального распределения

$$\Phi(x_1, x_2; \rho)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,\Phi\{(c_1y-x_1)/(1-c_1^2)^{1/2}\}\times$$

$$\times\Phi\{(c_2y-x_2)/(1-c_2^2)^{1/2}\}\,dy,$$

где $c_i^2\leqslant 1$, $i=1, 2$, $c_1c_2=\rho$. Предлагается выбирать $c_1=$ $=\operatorname{sign}\rho c_2=\sqrt{|\rho|}$. Сравниваются результаты вычислений по этой формуле с использованием квадратурных формул Гаусса—Эрмита и Симпсона.

3. В работе [34] предложен метод вычисления $T(h, a)$, использующий следующую аппроксимацию

$$T(h, a) \approx \varphi(h) \sum_{k=0}^{m} c_{2k} I_{2k}(w) \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^{-(2k+1)},$$

$$w = ha/\sqrt{2},$$

$$I_{2k}(w) = \frac{1}{2}\{(2k-1) I_{2k-2}(w) - w^{2k-1} \exp(-w^2)\},$$

$$I_0(w) = \sqrt{\pi}\,(\Phi(w/2) - 1/2).$$

Приведены значения коэффициентов c_{2k}. Этот метод рекомендуется при $h>1{,}6$ и одновременно $a>0{,}3$. При $m=6$ в этом случае точность достигает 10^{-7}.

В работе П. И. Кузнецова и А. С. Юдиной [9] выводится асимптотическое разложение для $T(h, a)$. Первый член этого разложения

$$T_0(h, a) = \frac{1-4[\Phi'(x)-1/2]}{8} -$$

$$- \frac{e^{-h^2/2}}{2h\sqrt{2\pi}}[\Phi(h) - \Phi(ah)] - \frac{e^{-h^2(1+a^2)/2}(1-a^2)}{4\pi h^2 a(1+a^2)}$$

может быть использован при $h \gg 3$ и значениях a, близких к 1. При $0<a<1$ и $h \gg 2$ может использоваться формула

$$T(h, a) = [1-\Phi(h)]\left[\Phi(ah) - \frac{ah}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(ah)^2/2}\right] +$$

$$+ \frac{e^{-h^2(1+a^2)/2}}{2\pi} a(1 + a^2\varphi_1(h) + a^4\varphi_2(h) + \ldots),$$

где

$$\varphi_n(h) = \frac{1}{2n+1}[(-1)^n + h^2\varphi_{n-1}(h)], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\varphi_0(h) = 1 + e^{-h^2/2} h\sqrt{2\pi}\,[\Phi(h) - 1].$$

Используя эту формулу, можно достичь точности 10^{-7}.

Различные аппроксимации можно найти также в работах [7, 21, 38, 49, 65, 95].

В работе [145] построены диаграммы для определения значений функции двумерного нормального распределения. Эти диаграммы построены на основе формулы

$$\Phi(x, y; \rho) = \Phi\left(x, 0; \frac{(\rho x - y)\operatorname{sign} x}{(x^2-2\rho xy+y^2)^{1/2}}\right) + \Phi\left(y, 0; \frac{(\rho y - x)\operatorname{sign} y}{x^2-2\rho xy+y^2}\right) - d,$$

где $d=0$, если истинно логическое выражение

$$(hk>0) \vee [(hk=0) \wedge (h+k>0)].$$

В противоположном случае $d=1/2$. Эта формула была получена Оуэном в неопубликованной работе. Таким образом, задача сведена к построению диаграмм для двухпараметрических функций.

4. В работах [45, 46, 56, 144] приведены программы для вычисления $T(h, a)$. Программа для вычисления $\Phi(x, y;\ \rho)$ с точностью до 13 значащих цифр описана в работе [49].

§ 3. ТРЕХМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В работе Плэкета [106] из формулы редукции, описанной в § 1, получено следующее выражение

$$\Phi_3^*(x;\ 0,\ R) = \Phi_3^*(x;\ 0,\ K) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\arccos\rho_{23}}^{\arccos\varkappa_{23}} \exp\{-(x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3\cos\theta)/(2\sin\theta)\} \times$$

$$\times (1 - \Phi\{[(x_1 - \rho_{12}x_2 - \rho_{13}x_3) + (\rho_{13}x_2 + \rho_{12}x_3)\cos\theta -$$

$$- x_1\cos^2\theta]/(\sin\theta\,(1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\cos\theta - \cos^2\theta)^{1/2})\})\,d\theta,$$

где

$$\varkappa_{23} = \rho_{12}\rho_{13} + \{(1 - \rho_{12}^2)(1 - \rho_{13}^2)\}^{1/2},$$

а матрица K получена из матрицы R заменой ρ_{23} на $\varkappa_{23}$.

В работе Стека [131] получено выражение для $\Phi_3(x;\ 0,\ R)$, использующее функцию

$$S(h,\ a,\ b) = \int\limits_{-\infty}^{h} T(as,\ b)\,\varphi(s)\,ds =$$

$$= \frac{b}{2\pi} \int\limits_0^1 \frac{\Phi\,[h\,(1 + a^2 + a^2b^2y^2)^{1/2}]}{(1 + b^2y^2)(1 + a^2 + a^2b^2y^2)^{1/2}}\,dy. \tag{3.1}$$

Это выражение имеет вид:

а) если $x > 0$ или $x < 0$, то

$$\Phi_3(x;\ 0,\ R) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\Bigg[\lambda_i\Phi(x_i) -$$

$$- \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} (T(x_i,\ a_{ij}) + 2S(x_i,\ a_{ij},\ b_{ij}))\Bigg];$$

б) при $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \leqslant 0$ или $x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$ следует воспользоваться преобразованием

$$\Phi_3(x;\ 0,\ R) = \frac{1}{2}[\Phi(x_1) + \Phi(x_2) - \delta(x_1,\ x_2)] -$$

$$- T(x_1,\ a_{12}) - T(x_2,\ a_{21}) - \Phi_3((x_1,\ x_2,\ -x_3)';\ 0,\ \bar{R}).$$

Использованы следующие обозначения

$$\bar{R}=\begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & -\rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & -\rho_{23} \\ -\rho_{31} & -\rho_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\delta(u, v)=\begin{cases} 0, \text{ если } (\operatorname{sign} u)(\operatorname{sign} v)=1, \\ 1 \text{ в противоположном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda_i=(1-\delta(a_{ij}, a_{ik})), \quad i=1, 2, 3,$$

где $\{i, j, k\}$ — перестановка $\{1, 2, 3\}$,

$$a_{ij}=\frac{x_j-x_i\rho_{ij}}{x_i\left(1-\rho_{ij}^2\right)^{1/2}}, \quad i\neq j,$$

$$b_{ij}=b_{ijk}=[(1-\rho_{ij}^2)(x_k-x_i\rho_{ik})-$$

$$-(\rho_{jk}-\rho_{ij}\rho_{ik})(x_j-x_i\rho_{ij})]/[(x_j-x_i\rho_{ij})(\det R)^{1/2}],$$

где $\{i, j, k\}$ — перестановка $\{1, 2, 3\}$.

Приведенные формулы выведены, исходя из геометрических рассуждений. Формулы такого же типа можно получить, исходя из представления

$$\Phi_3(x; 0, R)=$$

$$=[(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{13}^2)]^{1/2}\int_{-\infty}^{x_1}\varphi(\tau)\,\Phi\left(\frac{x_2-\tau\rho_{12}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}, \frac{x_3-\tau\rho_{13}}{\sqrt{1-\rho_{13}^2}}; \rho^*\right)d\tau.$$

После этого, функция $\Phi(u, v; \rho^*)$ выражается через функции Оуэна.

Для функции $S(h, a, b)$ в [131] выведена сравнительно простая приближенная формула, получаемая из (3.1) путем разложения функции стандартного одномерного нормального распределения в подынтегральном выражении в ряд Тейлора в окрестности точки $h(1+a^2+a^2b^2/4)^{1/2}$ до третьего члена. Эта формула имеет вид

$$S(h, a, b)\approx\frac{1}{2\pi}[\Phi(h\lambda)\chi+h\varphi(h\lambda)(\Delta_1(a, b)-h^2\lambda\Delta_2(a, b))],$$

где

$$\lambda=(1+a^2+a^2b^2/4)^{1/2},$$

$$\chi=\operatorname{arctg}(b/(1+a^2+a^2b^2)^{1/2}),$$

$$\Delta_1(a, b)=\operatorname{arctg} b-\lambda x,$$

$$\Delta_2(a, b)=(1+\lambda^2)\chi-2\lambda\operatorname{arctg} b+$$

$$+a\left\{\ln(ab+(1+a^2+a^2b^2)^{1/2})-\frac{1}{2}\ln(1+a^2)\right\}.$$

Сообщается, что если в полученном приближении используется только первый член, то при $h\leqslant2$ ошибка составляет 10^{-4}; при

$h>2$ ошибка равна 10^{-5}. При использовании трех членов точность аппроксимации превышает $6\cdot 10^{-6}$.

§ 4. МНОГОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ С КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ МАТРИЦАМИ ЧАСТНОГО ВИДА

Ряд известных формул для специального вида корреляционной матрицы могут быть выведены (см. [88]) из равенства

$$\Phi_n(x;\ 0,\ A+B)=E\Phi_n(x-\eta;\ 0,\ A),$$

где η — нормально распределенный случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей B. Эта формула следует из формулы свертки, примененной к двум функциям многомерного нормального распределения.

Пусть $A=I+T'T$, где T — матрица размера $k\times n$ со столбцами $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Тогда

$$\Phi_n(x;\ 0,\ A)=E\{\Phi(x_1-\xi\tau_1)\ldots\Phi(x_n-\xi\tau_n)\},$$

где ξ имеет функцию распределения $\Phi_k(x;\ 0,\ I)$. Отсюда получаем, например, что если

$$\rho_{ij}=\sum_{s=1}^{k}\beta_{is}\beta_{sl},\quad i\neq j,$$

то

$$\Phi_n(x;\ 0,\ R)=\int\limits_{R^k}\prod_{i=1}^{n}\Phi\left(\frac{x_i-\sum\limits_{j=1}^{k}\beta_{ij}y_j}{\left(1-\sum\limits_{s=1}^{k}\beta_{is}^2\right)^{1/2}}\right)\times$$
$$\times\varphi(y_1)\ldots\varphi(y_k)\,dy_1\ldots dy_k. \qquad (4.1)$$

Этот результат, его частные случаи и аналогичные результаты содержатся также в [37, 48, 54, 80, 135].

В работе [32] рассмотрено простое обобщение формулы (4.1) на случай km-мерного нормального распределения, когда ковариационная матрица имеет аналогичную блочную структуру.

Из формулы (4.1) нетрудно получить формулу для $\Phi_n(x;\ 0, R)$ при одинаковых положительных ρ_{ij}, $i\neq j$. Эта формула будет справедлива и при $\rho>-1/(n-1)$ (см. [133]). Если также и компоненты вектора x одинаковы, $x=x^*=(t, \ldots, t)'$, то имеют место формулы (см. [132])

$$\Phi_n(x^*;\ 0,\ R^*)\equiv F_n(t,\ \rho)=$$
$$=n\int\limits_{-\infty}^{t}F_{n-1}\left(y\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}},\ \frac{\rho}{1+\rho}\right)\varphi(y)\,dy,$$

$$F_n(t,\rho)=n!\int\limits_{-\infty}^{t}d\Phi(y_1)\int\limits_{-\infty}^{a_1y_1}d\Phi(y_2)\dots\int\limits_{-\infty}^{a_{n-1}y_{n-1}}d\Phi(y_n),$$

$$F_n(t,\rho)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}F_k(d_nt,\rho_n)\,F_{n-k}(t,\rho),$$

где

$$d_j^2=(1-\rho)/\{[1+(j-1)\rho][1+(j-2)\rho]\},$$
$$a_j=d_{j+1}/d_j,\quad \rho_n=-\rho/(1+(n-2)\rho).$$

§ 5. СТАНДАРТНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ПЕРВОГО КВАДРАНТА

1. Существует большое число работ, в которых рассматривается вопрос о вычислении вероятности первого квадранта

$$K_n(R)=\Phi_n(0;\,0,\,R).$$

Известны формулы (см., например, [8])

$$K_2(R)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arcsin\rho_{12},\qquad(5.1)$$

$$K_3(R)=\frac{1}{4\pi}(2\pi-\arccos\rho_{12}-\arccos\rho_{13}-\arccos\rho_{23}).\qquad(5.2)$$

При $n\geqslant 4$ таких простых формул не существует. Известно разложение [96], полученное при разложении в ряд экспоненты в выражении для характеристической функции,

$$K_4(R)=\sum_{l,m,n,p,q,r=0}^{\infty}A_{lmnpqr}\rho_{12}^{l}\rho_{13}^{m}\dots\rho_{34}^{r},$$

где

$$A_{lmnpqr}=\frac{(-1)^{l+\dots+r}G_{l+m+n}G_{l+p+q}G_{m+p+r}G_{n+q+r}}{l!\,m!\,n!\,p!\,q!\,r!},$$

$G_0=1/2$, $G_s=0$ при четном s, и

$$G_s=(2s)!/(i\,(2\pi)^{1/2}2^s s!)$$

при нечетном s. Таким образом,

$$K_4(R)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8\pi}(\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{14}+\rho_{23}+\rho_{24}+\rho_{34})+$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}(\rho_{12}\rho_{34}+\rho_{13}\rho_{24}+\rho_{14}\rho_{23})+\dots.$$

В работе Дэвида [52] (см. также [8]) отмечена формула справедливая при нечетных n,

$$K_n(R)=\frac{1}{2}\Big\{1-K_1(R^i)+\sum_{i<j}K_2(R^{ij})-$$

$$-\sum_{i<j<k}K_3(R^{ijk})+\ldots+(-1)^{n-1}\sum_s K_{n-1}(R^{1,\ldots,s-1,s+1,\ldots,n})\Big\}, \quad (5.3)$$

где корреляционная матрица $R^{ij\ldots l}$ получена из R вычеркиванием всех строк и столбцов с номерами, не совпадающими с $i, j, \ldots, l$. Заметим, что формула (5.2) следует из (5.1) и (5.3).

В работе [91] выведена формула

$$K_n(R)=2^{-n}\Big[1+\frac{2}{\pi}\sum_{i>j\geqslant 1}\arcsin\rho_{ij}+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\sum_{l>k>j>i\geqslant 1}(\rho_{ij}\rho_{kl}+\rho_{il}\rho_{jk})\Big]+O(\rho^3).$$

2. В работе Абрахамсона]26] рассматривается вопрос о вычислении $K_4(\rho)$. Получено выражение

$$K_4(\rho)=\sum_{l=1}^{\nu}\delta_l P_4(a_l, b_l, c_l), \quad \nu\leqslant 6,$$

где δ_l принимают значения 1 или -1; a_l, b_l, c_l определены ниже, а $P_4(a, b, c)$ — функции вида

$$P_4(a, b, c)=\frac{1}{16}\Big\{1+\frac{2}{\pi}(\arcsin a+\arcsin b+\arcsin c)+$$

$$+\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^c\int_0^a[(1-\gamma^2)(1-\alpha^2)-b^2]^{1/2}\,d\alpha d\gamma\Big\}.$$

Для функции $P_4(a, b, c)$ приведена шестизначная таблица при $a=0\,(0{,}1)\,0{,}9$; $b=0\,(0{,}1)\,0{,}9$ и $c=0{,}05\,(0{,}05)\,0{,}95$. Заметим, что, как показал Ван-дерВаарт [139, 140], $P_4(a, b, c)=K_4(R)$ при

$$R=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ a & 1 & b & 0\\ 0 & b & 1 & c\\ 0 & 0 & c & 1\end{pmatrix}.$$

Предложен следующий алгоритм вычисления $K_4(R)$.

1) Если $\rho_{14}=\rho_{24}=\rho_{34}=0$, то

$$K_4(R)=\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{8}+\frac{1}{4\pi}(\arcsin\rho_{12}+\arcsin\rho_{23}+\arcsin\rho_{13})\Big\}.$$

В дальнейшем предполагается, что это условие не выполнено.

2) Рассмотрим множество троек (i, j, k) из набора $(1, 2, 3, 4)$, $i\neq j\neq k\neq i$. Для каждой тройки такой, что $k\neq 4$, определим $\tau_{ijk}=\rho_{ij}-\rho_{ik}\rho_{jk}$.

3) Для каждой перестановки (i, j, k) из $(1, 2, 3)$ определяем:

а) $u_{i4}=\begin{cases}1, \text{ если } \rho_{i4}\geqslant 0,\\ 0, \text{ если } \rho_{i4}<0;\end{cases}$

б) $u_{i4j}\begin{cases}1, \text{ если } \tau_{i4j}\geqslant 0,\\ -1, \text{ если } \tau_{i4j}<0;\end{cases}$

в) $\mu_{ij}=\mu_{ji}=\frac{1}{2}\{1+u_{i4k}+u_{j4k}-u_{i4k}u_{j4k}\}$;

г) $f_k=[\tau^2_{j4k}(1+\rho^2_{ik})+\tau^2_{i4k}(1-\rho^2_{jk})-2\tau_{ijk}\tau_{i4k}\tau_{j4k}]^{1/2}$;

д) если $\rho^2_{j4}+\rho^2_{k4}\neq 0$, то $g_i=[\rho_{j4}\tau_{j4k}+\rho_{k4}\tau_{k4j}]^{1/2}$;

е) если $\rho_{j4}=\rho_{k4}=0$, но $\rho_{i4}\neq 0$, то $X_j=X_k=0$;

ж) если $\rho_{k4}\neq 0$, то определим

$$\theta_{ki}=u_{i4}u_{j4}u_{k4}|\rho_{k4}|,$$

$$\varphi_{ki}=-\mu_{ij}(u_{14}u_{24}u_{34})\,g_i|\tau_{j4k}|,$$

$$\psi_{ki}=\mu_{ij}g_if_k|\rho_{k4}|[\tau_{i4k}\tau_{ijk}-\tau_{i4k}(1-\rho^2_{ik})];$$

з) если $\rho_{k4}=0$, то $X_k=0$.

4) Для тех $k=1, 2, 3$, для которых $\rho_{k4}\neq 0$, найдем X_k следующим образом. Для каждой перестановки (i, j, k) из $(1, 2, 3)$ положим $a=\theta_{ki}$, $b=\varphi_{ki}$, $c=\psi_{ki}$, $V_{ki}=P_4(a, b, c)$. Значение V_{ki} находится по таблицам, приведенным в работе, либо численным интегрированием. Затем вычисляется

$$X_k=|u_{i4k}V_{ki}-u_{j4k}V_{kj}|.$$

5) Окончательно находим

$$K_4(R)=|u_{24}u_{34}X_1+u_{14}u_{34}X_2+u_{14}u_{24}X_3|.$$

Полезны следующие выражения:

$$P_4(-a, b, c)=\frac{1}{8}+Q(b)+Q(c)-P_4(a, b, c),$$

$$P_4(a, -b, c)=P_4(a, b, c)-Q(b),$$

$$P_4(-a, -b, c)=\frac{1}{8}+Q(c)-P_4(a, b, c),$$

$$P_4(-a, -b, -c)=P_4(a, b, c)-Q(a)-Q(b)-Q(c),$$

$$P_4(-a, b, -c)=P_4(a, b, c)-Q(a)-Q(c),$$

$$P_4(a, b, c)=P_4(c, b, a),$$

где

$$Q(t)=\frac{1}{4\pi}\arcsin t.$$

3. В работе Чайлдса [40] получены следующие формулы

$$K_{2n}(R)=\frac{1}{2^{2n}}\left\{1+\sum_{i<j<1}^{2n}\frac{2}{\pi}\arcsin\rho_{ij}+\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2j}\sum_{\substack{k_1<\ldots<k_{2j},\\ k_1,\ldots,k_{2j}\in\{1,\ldots,2n\}}}w_{k_1,\ldots,k_{2j}}\right\},$$

$$K_{2n-1}(R)=\frac{1}{2^{2n-1}}\left\{1+\sum_{i<j=1}^{2n-1}\frac{2}{\pi}\arcsin\rho_{ij}+\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2j}\sum_{\substack{k_1<\ldots<k_{2j},\\ k_1,\ldots,k_{2j}\in\{1,\ldots,2n-1\}}} w_{k_1,\ldots,k_{2j}}\right\},$$

$$w_{k_1,\ldots,k_{2j}}=(2\pi)^j\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\frac{\varphi_{2j}\left(x;\ 0,\ R_{2j}^{-1}\right)}{x_{k_1}\ldots x_{k_{2j}}}\,dx,$$

$$x=(x_{k_1},\ldots,\ x_{k_{2j}}),$$

где R_{2j} — корреляционная матрица, составленная из строк и столбцов матрицы R с номерами $k_1,\ldots,\ k_{2j}$. Величина w_{1234} выражена в работе через три интеграла вида

$$I_j=\frac{4}{\pi}\rho_{1,j+1}\int_0^1(1-\rho_{1,j+1}u^2)^{-1/2}\arcsin\left(\frac{\alpha-\beta u^2}{[(c-du^2)(e-fu^2)]^{1/2}}\right)du.$$

Рассматривается выражение для $K_6(R)$ при некоторых частных видах матрицы R.

В работе Дата и Лина [61] рассматривается применение формулы (1.6) к вычислению $K_n(R)$.

В работе Мак-Фаддена [91] рассмотрены два специальных случая соотношений между величинами ρ_{ij}.

а) Пусть x_1, x_2, x_3 и x_4 являются наблюдениями стационарного гауссовского марковского процесса с нулевым математическим ожиданием и единичными дисперсиями. Тогда

$$\rho_{13}=\rho_{12}\rho_{23},\quad \rho_{14}=\rho_{12}\rho_{23}\rho_{34},\quad \rho_{24}=\rho_{23}\rho_{34}.$$

Таким образом, элементы матрицы R могут быть выражены через три параметра: ρ_{12}, ρ_{23} и ρ_{34}. Показано, что

$$K_4(R)=\frac{1}{16}\,[1+\frac{2}{\pi}\sum_{i,j=1}^{4}\arcsin\rho_{ij}+W(\rho_{22},\rho_{23},\rho_{34})],\qquad(5.4)$$

где

$$W(\rho_{12},\rho_{23},\rho_{34})=\frac{4}{\pi^2}\{\arcsin\rho_{12}\arcsin\rho_{34}+\rho_{12}\rho_{34}(1-\rho_{12}^2)^{1/2}\times$$
$$\times(1-\rho_{34}^2)^{1/2}\left[\frac{\rho_{23}^2}{2!}+\frac{\rho_{23}^4}{4!}(1-2\rho_{12}^2)(1-2\rho_{34}^2)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\rho_{23}^6}{6!}(3+4\rho_{12}^2+8\rho_{12}^4)(3+4\rho_{34}^2+8\rho_{34}^4)+\ \ldots\right]\right\}.$$

Точность вычислений, достигаемая при использовании выписанных членов ряда, составляет примерно 10^{-2}.

б) Во втором случае полагается, что $\rho_{13}=\rho_{14}=\rho_{24}=0$, причем $\rho_{23}^2<(1-\rho_{12}^2)(1-\rho_{34}^2)$. Тогда справедлива формула (5.4), где

$$W(\rho_{12},\rho_{23},\rho_{34})=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(1/2)_p}{p!}\rho_{23}^{2p}S_p(\rho_{12})S_p(\rho_{34}),$$

$$S_p(\rho)=\frac{2}{\pi}\rho(1-\rho^2)^{1/2-p}F(1,\ 1-p;\ 3/2;\ \rho),$$

$$(1/2)_p=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(\frac{1}{2}+p-1\right)$$

F — гипергеометрическая функция.

В работе Дэвида и Мэллоуса [53] выводятся формулы для $K_4(R)$ при корреляционных матрицах таких же, как у случайных величин вида

$$X_1=x_i-x_j,\quad X_2=x_k-x_l,\quad Y_1=y_m-y_n,\quad Y_2=y_r-y_s,$$

где i, j, k, l, m, n, r, s принимают значения 1, 2 или 3, причем $i\neq j$, $k\neq l$, $m\neq n$, $r\neq s$, а $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ — независимые между собой пары случайных величин с одинаковым двумерным нормальным распределением, нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями и коэффициентом корреляции ρ. Например, при $X_1=x_1-x_2$, $X_2=x_2-x_3$, $Y_1=y_2-y_3$, $Y_2=y_3-y_1$

$$R=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & -\rho/2 & -\rho/2\\ & 1 & \rho & -\rho/2\\ & & 1 & -1/2\\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$K_4(R)=\frac{1}{36}+\frac{1}{8\pi}\left[-3\arcsin\frac{1}{2}\rho+\arcsin\rho\right]+$$
$$+\frac{1}{8\pi^2}\left[\left(\arcsin\frac{1}{2}\rho\right)^2-(\arcsin\rho)^2\right].$$

В работе приводятся формулы для всех 24-х вариантов R, причем в двенадцати случаях $K_4(\rho)$ выражается лишь с помощью интегралов, а в остальных случаях — элементарными формулами. Для одиннадцати входящих в эти формулы интегралов приведены разложения в ряды Тейлора. Вывод формул использует формулу редукции Плэкета (см. § 1).

4. Из (4.1) следует, что вероятность первого квадранта в случае, если все недиагональные элементы матрицы R одинаковы и равны $\rho>0$, есть

$$P_n(\rho)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^n\left(-\sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}}\,y\right)\varphi(y)\,dy. \tag{5.5}$$

Эта формула справедлива и при $\rho>-1/(n-1)$ (см. [133]). Интеграл в (5.5) легко вычисляется численным интегрированием (см. [8, 97]).

Для вычисления $P_n(\rho)$ при отрицательных ρ можно воспользоваться равенством (см. [132])

$$P_n(\rho)=\frac{1}{2}-\sum_{\substack{k=2,\\ k\text{—четное}}}^{n}\binom{n}{k}P_k\left(\frac{-\rho}{1+(k-2)\rho}\right)P_{n-k}\left(\frac{\rho}{1+k\rho}\right).$$

В частности,

$$P_4(\rho)+P_4\left(-\frac{\rho^2}{1+2\rho}\right)=\frac{1}{8}+\frac{3}{4\pi}\left[\arcsin\rho-\arcsin\left(\frac{\rho}{1+2\rho}\right)\right]+$$
$$+\frac{3}{2\pi^2}\arcsin\rho\arcsin\left(\frac{\rho}{1+2\rho}\right).$$

Отметим также формулы общего вида, полученные в работе [41],

$$K_n(R)+K_n(R^{-1})=1-\sum K_m(R_M^{-1})K_{n-m}(R_{K\setminus M;M}).$$

Здесь суммирование ведется по всем непустым подмножествам

$$M=\{i_1,\ldots,i_m\}\subset K=\{1,2,\ldots,n\},\quad M\neq K,$$

R_m — корреляционная матрица вектора $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\}$, а $R_{K\setminus M;M}$ — корреляционная матрица вектора $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_m}\}$ при условии, что вектор, составленный из величин x_i при $i\in M$, фиксирован. В ряде работ (например, [30, 90, 129, 132]) из формулы (при $\rho>0$)

$$P_4(\rho)=\frac{1}{16}+\frac{3}{4\pi}\arcsin\rho+T(\rho),$$

$$T(\rho)=\frac{3}{2\pi^2}\int_0^{\rho}\frac{\arcsin(x/(1+2x))}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

выводятся аппроксимации для $P_4(\rho)$. В работе [89] получено разложение

$$T(\rho)=3\rho^2-4\rho^3+7\rho^4-12\rho^5+\frac{338}{15}\rho^6-44\rho^7+\frac{3162}{35}\rho^8+\ldots.$$

Отсюда выводится приближенное выражение

$$P_4(\rho)\approx\frac{1}{16}+\frac{3}{4\pi}\varphi+\frac{1}{4\pi^2}\frac{\varphi(3+5\varphi)}{(1+\varphi)(1+2\varphi)},$$

где $\rho=\sin\varphi$. Отмечается, что точность этого приближения составляет не менее пяти значащих цифр при $3<1/\rho<12$.

В работе [129] (см. также [132]) получена формула

$$P_4(\rho)\approx\frac{1}{2}-\frac{3\varphi}{2\pi^2}\left(\frac{1}{2}\pi+\arcsin\frac{1}{3}\right)+\frac{3\varphi^3}{\pi\sqrt{8}}\left(\frac{1}{36}+\varphi^2\frac{(ac-b^2)\varphi^2-ab}{c\varphi^2-b}\right),$$

$$\varphi=\arccos\rho,\quad a=23/(5!\,48),\quad b=3727/(7!\,1152),$$
$$c=(1/9!)(124\,627/3072).$$

В работах [30, 132] можно найти исследование случаев вычисления $P_5(\rho)$, $P_6(\rho)$ и $P_7(\rho)$.

§ 6. ОДНОМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Существует большое количество методов вычисления значений функции одномерного нормального распределения $\Phi(x)$. Часть из этих методов дает лучшие результаты при небольших значениях x, а другие методы работают лучше при больших значениях x, примерно при $x>3$. Нельзя указать наиболее предпочтительные методы, т. к. необходимый метод вычисления для программирования на ЭВМ выбирается в зависимости от предъявляемых требований к алгоритму, относящихся, например, к быстродействию или длине программы.

1. Рассмотрим сначала методы вычисления $\Phi(x)$, дающие лучшие результаты при небольших значениях x. Разлагая $\varphi(y)$ в ряд по степеням y и почленно интегрируя в формуле

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)\,dy,$$

получаем ряд

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\,2^2 5}-\frac{x^7}{3!\,2^3 7}+\ldots\right). \tag{6.1}$$

Обозначим

$$R(x)=\frac{1-\Phi(x)}{\varphi(x)} \text{ и } \bar{R}(x)=\frac{\Phi(x)-1/2}{\varphi(x)},$$

Из уравнения $d\bar{R}(x)/dx=x\bar{R}(x)+1$ можно получить, что

$$\bar{R}(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots. \tag{6.2}$$

Разложения (6.1) и (6.2) были известны еще Лапласу [87] (см. также [8, 84]). В работе [107] этот ряд был открыт заново.

Шентон в работе [123] предложил также разложение $\bar{R}(x)$ в непрерывную дробь, дающее хороший способ вычисления $\Phi(x)$. Из (5.2) можно вывести, что

$$\bar{R}(x)=x_1F_1(1;\ 3/2;\ t^2/2),$$

где ${}_1F_1(a;\ b;\ t)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Исходя из известного разложения Гаусса этой функции в непрерывную дробь, Шентон показал, что

$$\bar{R}(x)=\frac{x}{1-}\,\frac{\overset{*}{x^2}}{3+}\,\frac{2\overset{*}{x^2}}{5-}\,\frac{3x^2}{7+}\,\frac{4x^2}{9-}\,\frac{5\overset{*}{x^2}}{11+}\,\frac{6\overset{*}{x^2}}{13-}\,\frac{7x^2}{15+}\cdots \tag{6.3}$$

Здесь звездочками отмечены члены, оборвав на которых непрерывную дробь, мы получаем значение $\bar{R}(x)$ с избытком, в противном случае — с недостатком.

В недавней работе [84] предложено использовать разложение

$$\bar{R}(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_{2n}(x/2)}{2n+1}, \tag{6.4}$$

где $\theta_n(x)=x^n H_n(x)/n!$ ($H_n(x)$ — полиномы Эрмита), причем θ_n следует вычислять по рекуррентной формуле

$$\theta_{n+1}(x)=x^2(\theta_n(x)-\theta_{n-1}(x))/(n+1).$$

2. Рассмотрим теперь методы вычисления $\Phi(x)$, дающие лучшие результаты при больших значениях x. Удачное разложение в непрерывную дробь

$$R(x)=\frac{1}{x+}\,\frac{1}{x+}\,\frac{2}{x+}\,\frac{3}{x+}\cdots \tag{6.5}$$

получено еще Лапласом [87]. Его вывод содержится в [8].

Шлемильх ([122], см. также [123]) получил следующее разложение

$$xR(x)=1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\int_0^{\infty}t_{(i)}e^{-t}t^{-1/2}dt/(u_1\,\ldots\,u_i),$$

$$u_i=x^2+2i,\quad t_{(i)}=t(t-1)\ldots(t-i+1),\quad x>0.$$

Первые члены этого разложения имеют вид

$$xR(x)=1-\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1u_2}-\frac{5}{u_1u_2u_3}+\frac{9}{u_1\ldots u_4}-\frac{129}{u_1\ldots u_5}+\ldots.$$

Менее пригоден для вычислений асимптотический ряд (см. [8, 87])

$$R(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1\cdot 3}{x^5}-\ldots+(-1)^j\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2j-1)}{x^{2j+1}}+R_j(x), \tag{6.6}$$

$$|R_j(x)|<1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2j-1)\,x^{-2j-1}.$$

В работе Вийнгардена [142] получено следующее асимптотическое разложение для интеграла ошибок

$$\operatorname{erf}(x)\sim 1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k!\binom{2k}{k}(2x)^{-2k}.$$

При $x=1$ двадцать членов этого ряда дают девять точных значащих цифр.

В работе [84] произведено сравнение результатов работы алгоритмов, основанных на разложениях (6.1)—(6.6).

Ряд разложений, менее пригодных для использования, содержится в работах [108, 116].

3. В ряде работ рассмотрены методы аппроксимации $\Phi(x)$. В работах Рубена [114, 116] получены следующие аппроксимации для отношения Миллса

$$R(x)\approx\frac{x(x^4+6x^2+11)}{(x^2+1)(x^2+3)^2},$$

$$R(x) \approx \frac{x(x^{10}+21x^8+176x^6+740x^4+161x^2+1507)}{(x^2+1)(x^2+3)(x^2+5)^3},$$

$$R(x) \approx \frac{2}{(x^2+2)^{1/2}} - \frac{[1-(x^2+4)^{-1}]}{(x^2+4)^{1/2}},$$

а в работе Грея [65] — аппроксимация

$$R(x) \approx \frac{x}{x^2+2}\left(\frac{x^6+6x^4-14x^2-28}{x^6+5x^4-20x^2-4}\right).$$

В [65] производится сравнение этих аппроксимаций, дающих точность, превышающую 10^{-4} при $x>5$.

В работе Рэя и Питмана [108] рассматривается аппроксимация отношения Миллса полиномами Чебышева на интервалах [0, 1] и [1, ∞]. В работе Милтона и Хотчкисса [95] предложена аппроксимация по методу наименьших квадратов к $\operatorname{erf}(y)$ вида

$$p_i(y) = \sum_{j=1}^{k+1} c_{ij}(y-d_i)^{k-j+1},$$

$$y \in [a_{i-1}, a_i], \quad d_i \in [a_{i-1}, a_i], \quad i=1,\ldots,n.$$

Приведены значения c_{ij}, d_i. При $k=9$, $n=6$ точность этой аппроксимации не хуже $4 \cdot 10^{-10}$. Приведена программа на языке ФОРТРАН, реализующая этот метод.

Другие, менее полезные для вычислений аппроксимации содержатся в работах [36] и [72]. Ряд аппроксимаций даны в виде неравенств в работах [33, 35, 43, 64, 69, 99, 117, 123, 137, 143].

4. Перечислим известные опубликованные программы для вычисления значений $\Phi(x)$. В работе Купера [44] приводится программа на языке ФОРТРАН для вычисления значений $\Phi(x)$, использующая при $-2{,}5<x<2{,}5$ разложение в ряд, а при остальных значениях x — непрерывную дробь.

В работе Хилла [75] эта программа, переведенная на язык АЛГОЛ, сравнивается с программой Хилла и Джоуса [77]. Последняя признана более быстродействующей, но несколько менее точной. Обе программы имеют точность порядка 10^{-10}. Программы Иббетсона [79] и Адамса [27] аналогичны предыдущим.

Используя метод Адамса (см. [27]), Хилл в [76] составил программу на языке ФОРТРАН, дающую десятикратное улучшение по быстродействию без потери точности и являющуюся более короткой.

В сборнике программ [6] содержится программа для $\Phi(x)$ на языке АЛГОЛ.

§ 7. КВАНТИЛЬ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Часто значения функции $\psi(t)$, обратной к функции нормального распределения $\Phi(x)$ (квантиля нормального распределения), находят путем численного решения уравнения $\Phi(x)=t$ по методу Ньютона. Однако существуют и другие методы.

В работе В. А. Кутина [10] предложено без исследования вопроса о сходимости разложение

$$\psi^2(t)=\sum_{l=1}^{\infty} a_l[-\ln(1-4(t-1/2)^2)]^l, \tag{7.1}$$

причем коэффициенты a_l находятся из системы уравнений

$$\sum_{k=0}^{l-1} a_{l-k} b_{k+1,l-k}=\frac{(\pi/2)^l}{(2l)!} c_{2l,l},$$

где $b_{l,1}=1$ при $k=1$, а при $k\geqslant 2$

$$b_{lk}=\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(j(l+1)-(k-1))}{j+1} b_{l,k-j}.$$

Для величин $c_{n,k}$ справедливы рекуррентные соотношения

$$c_{n,n-k}=(n-1)c_{n-1,n-k-1}+(n-(2k-1))c_{n-1,n-k},$$
$$0\leqslant k\leqslant n-1,\quad c_{1,1}=2,\quad c_{n-1,n}=0 \text{ при } n\geqslant 2.$$

В работе приведены несколько первых коэффициентов a_l. Их уточненные значения, вычисленные Н. М. Зубовой, есть

$$a_1=\pi/2,\quad a_2=0{,}37068870\cdot 10^{-1};\quad a_3=-0{,}83209445\cdot 10^{-3};$$
$$a_4=-0{,}23232430\cdot 10^{-3};\quad a_5=0{,}12935888\cdot 10^{-4};$$
$$a_6=0{,}29034835\cdot 10^{-5};\quad a_7=-0{,}22096814\cdot 10^{-6};$$
$$a_8=-0{,}45415913\cdot 10^{-7};\quad a_9=0{,}40361657\cdot 10^{-8};$$
$$a_{10}=0{,}79875294\cdot 10^{-9}.$$

Используя несколько первых членов ряда (7.1), можно достичь точности 10^{-8} при $0{,}03\leqslant t\leqslant 0{,}97$. При других t использование этого разложения дает менее точные результаты.

В работах [12, 20] рассмотрено разложение

$$\psi(t)=\psi(t_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{V_i(\psi(t_0))(t-t_0)^i}{i!\varphi^i(\psi(t_0))}+r_n(t), \tag{7.2}$$

где многочлены $V_k(x)$ находятся с помощью рекуррентных соотношений

$$V_1(x)=1,\quad V_k(x)=(k-1)xV_{k-1}(x)+V'_{k-1}(x),\quad k=2,3,\ldots$$

Для остатка $r_n(t)$ в [12] получено неравенство

$$|r_h(t)| < \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)}\left(\dfrac{2|t-t_0|}{t_2}\right)^{n+1}, & -\psi(t_2) \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{2(n+1)}\left(\sqrt{8\pi e}\,|t-t_0|\right)^{n+1}, & -\psi(t_2) < 1, \end{cases}$$

$$t,\ t_0 < 1/2, \quad t_2 = \min(t, t_0).$$

Вычисление с высокой точностью значения $\psi(t)$ может производиться с помощью итерационной формулы, следующей из (7.2),

$$X_{N+1} = X_N + \sum_{l=2}^{N} \frac{V_l(X_N)[t-\Phi(X_N)]^l}{l!\varphi^l(X_N)}, \quad N = 0, 1, 2, \ldots$$

Значение X_{N+1} дает приближенное значение для $\psi(t)$ с точностью, оцениваемой по приведенному выше неравенству. Значение X_0 рационально выбирать с помощью какой-либо приближенной формулы.

При достаточно малых значениях t справедливы формулы (см. [12])

$$\psi(t) = -\sqrt{-2\ln(\sqrt{2\pi}t)} + O\left(\frac{\ln|\ln t|}{|\ln t|^{1/2}}\right),$$

$$\psi(t) = -\sqrt{-2\ln\left(\sqrt{2\pi}t\sqrt{-2\ln(\sqrt{2\pi}t)}\right)} + O\left(\frac{\ln|\ln t|}{|\ln t|^{3/2}}\right), \quad (7.3)$$

а более точно значение $\psi(t)$ может быть найдено с использованием итерационного процесса

$$X_{k+1} = -\sqrt{-\ln(t/R(X_k))}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (7.4)$$

При использовании первого члена в (7.3) как приближенной формулы для $\psi(t)$ при $t \leqslant 0{,}05$ ошибка не превосходит 0,0092. При этом для получения пяти верных значащих цифр при $t \leqslant 0{,}00005$ требуется провести дополнительно не более двух итераций по формуле (7.4).

Известен способ вычисления значений $\psi(t)$, основанный на использовании приближенной формулы вида (см. [36, 71, 72, 73, 104])

$$\psi(t) \approx \frac{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n}{1 + b_1 s + \ldots + b_{n+1} s^{n+1}},$$

$$s = (-2\ln t)^{-1/2}, \quad t < 1/2.$$

При $n=2$ точность может достигать $5\cdot 10^{-4}$, а при $n=4$ точность составляет $2\cdot 10^{-6}$.

Программы для вычисления значений $\psi(t)$ можно найти в работах [6, 47, 101].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Авраменко В. И.,* О вычислении вероятности попадания нормального вектора в n-мерный параллелепипед. В сб. «Электроника и моделирование». Вып. 12. Киев, «Наук. думка», 1976, 65—69 (РЖМат, 1977, 4В13)
2. —, *Позняков В. В.,* Приближенное вычисление n-мерных нормальных функций распределения при помощи рядов Эджворта. Кибернет. и вычисл. техн. Респ. межвед. сб., 1972, вып. 18, 31—36 (РЖМат, 1973, 4В31)
3. —, —, Вычисление функции 4-мерного нормального вектора распределения с помощью двумерного ряда Эджворта. Точность и надежность кибернет. систем. Респ. межвед. сб., 1973, вып. 1, 36—41 (РЖМат, 1973, 12В6)
4. *Ведров В. С., Деревнина Н. В.,* Приближенные формулы для расчета отношения Миллса и функции распределения Лапласа. Уч. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та, 1978, *9*, № 2, 122—126 (РЖМат, 1978, 10В386)
5. *Годлевский В. С., Заварин А. Н.,* Способ приближенного вычисления многомерных нормальных интегралов. Точность и надежность кибернет. систем. Респ. межвед. сб., 1976, вып. 4, 30—35 (РЖМат, 1976, 10В13)
6. *Дубнер П. Н.,* Вычисление прямых и обратных функций распределения. М., Моск. ун-т, 1971. 19 с., Книж. летопись, 1972, № 1, 22 (РЖМат, 1972, 12В3К)
7. *Дунаев Б. Б.,* Метод вычисления двумерного нормального распределения. Прикл. математика. Вып. 3. Иркутск, 1971, 82—94 (РЖМат, 1972, 3В11)
8. *Кендалл М., Стьюарт А.,* Теория распределений. Перев. с англ. М., Наука, 1966, 587 стр. (РЖМат, 1968, 10В5К)
9. *Кузнецов П. И., Юдина А. С.,* Некоторые асимптотические разложения неполного интеграла вероятности. Теория вероятностей и ее применения, 1973, *18*, № 2, 367—371 (РЖМат, 1973, 10Б17)
10. *Кутин В. А.,* Одна формула обращения интеграла вероятности. Уч. зап. Перм. ун-т, 1974, № 309, 99—101 (РЖМат, 1974, 11В159)
11. *Левин Б. Р., Фомин Я. А.,* Об одном способе приближенного вычисления многомерных интегральных функций распределения случайных процессов. Пробл. передачи информ., 1970, *6*, № 4, 102—108 (РЖМат, 1971, 7В70)
12. *Мартынов Г. В.,* Итерационные формулы для нормальных квантилей. В сб. «Численные методы математической статистики. Алгоритмы и программы», М., Моск. ун-т, 1976, 22—29
13. *Митропольский А. К.,* Интеграл вероятностей. Изд. 2-е, Л., Ленингр. ун-т, 1972. 86 с. (РЖМат, 1973, 7Б951К)
14. *Муха В. С.,* Вычисление интегралов, связанных с многомерным гауссовским распределением. Изв. Ленингр. электротехн. ин-та. 1974, вып. 160, 27—30 (РЖМат, 1975, 5В12)
15. *Переверзев Е. С.,* Об одном приближенном способе вычисления многомерных нормальных функций распределения. Автоматика и вычисл. техн., 1971, № 5, 89—91 (РЖМат, 1972, 1В13)
16. —, Об одном алгоритме для приближенного вычисления многомерного нормального распределения. Гидроаэромех. и теория упругости. Межвуз. науч. сб., 1972, вып. 14, 188—191 (РЖМат, 1972, 10В17)
17. *Позняков В. В.,* Приближенное вычисление многомерного нормального распределения. Кибернет. и вычисл. техн. Респ. межвед. сб., 1971, вып. 10, 16—24 (РЖМат, 1972, 1В422)
18. —, Об одном представлении многомерного нормального распределения. Укр. мат. ж., 1971, *23*, № 4, 562—566 (РЖМат, 1971, 11В19)
19. —, Способ построения приближенных оценок для многомерных нормальных интегралов. Точность и надежность кибернет. систем. Респ. межвед. сб., 1976, вып. 4, 27—30 (РЖМат, 1976, 10В12)

20. *Ракова Е. В.*, Об «обратных вероятностных функциях». Тр. учебн. ин-тов. связи. М-во связи СССР, 1970, вып. 52, 166—172 (РЖМат, 1971, 12В25)
21. *Смирнов Н. В., Большев Л. Н.*, Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения. М., АН СССР, 1962, 204 стр. (РЖМат, 1963, 4В58К)
22. *Судаков Р. С., Чеканов А. Н.*, Приближенный метод вычисления многомерных нормальных интегралов в задачах надежности. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 1, 69—75
23. Таблицы вероятностных функций, т. I, II. М., Вычислительный центр АН СССР, 1970
24. *Тверитинов Д. И.*, Об одном подходе к вычислению многомерного нормального распределения. В сб. «Вероятностно-стат. методы исслед. сложн. систем». Киев, «Наук. думка», 1976, 88—93 (РЖМат, 1977, 6В8)
25. —, О вычислении многомерных интегралов от нормальной функции плотности вероятностей. Тр. Моск. высш. техн. уч-ща им. Н. Э. Баумана, 1976, № 218, 21—23 (РЖМат, 1977, 2В17)
26. *Abrahamson I. G.*, Orthant probabilities for the quadrivariate normal distribution. Ann. Math. Statist., 1964, *35*, № 4, 1685—1703 (РЖМат, 1966, 1В12)
27. *Adams A. G.*, Algorithm 39. Areas under normal curve. Comput. J., 1969, *12*, 197—198
28. *Anděl Jiří*, On multiple normal probabilities of rectangles. Apl. mat., 1971, *16*, № 3, 172—181 (РЖМат, 1972, 2В14)
29. *Anis A. A., Lloid E. H.*, On the range of partial sums of a finite number of independent normal variates. Biometrika, 1953, *40*, № 1-2, 35—42 (РЖМат, 1954, 1737)
30. *Bacon R. H.*, Approximations to multivariate normal orthant probabilities. Ann. Math. Statist., 1963, *34*, № 1, 191—198 (РЖМат, 1964, 3В24)
31. *Beasley J. D., Springer S. G.*, Algorithm AS 111. The percentage points of the normal distribution. Appl. Statist., 1977, *26*, № 1, 118—121 (РЖМат, 1977, 12В146)
32. *Bechhofer R. E., Tamhane A. C.*, An iterated integral representation for a multivariate normal integral having block covariance structure. Biometrika, 1974, *61*, № 3, 615—619 (РЖМат, 1975, 6В137)
33. *Birnbaum Z. W.*, An inequality for Mills' ratio. Ann. Math. Statist., 1942, *13*, № 2, 245—246
34. *Borth D. M.*, A modification of Owen's method for computing the bi-variate normal integral. Appl. Statist., 1973, *22*, № 1, 82—85 (РЖМат, 1973, 9В59)
35. *Boyd A. V.*, Inequalities for Mills' ratio. Repts Statist. Appl. Res., Union Jap. Sci. and Eng, 1959, *6*, № 2, 44—46 (РЖМат, 1960, 11756)
36. *Burr I. W.*, A useful approximation to the normal distribution function, with application to simulation. Technometrics, 1967, *9*, № 4, 647—651 (РЖМат, 1968, 8В137)
37. *Cacoullos T., Sobel M.*, An inverce-sampling procedure for selecting the most probable event in a multinomial distribution. Multivariate Analysis. New York — London, Acad. Press, 1966, 423—455 (РЖМат, 1968, 1В129)
38. *Cadwell J. H.*, The bivariate normal integral. Biometrika, 1951, *38*, № 3-4, 475—479
39. *Cheng M. C.*, The orthant probabilities of four Gaussian variates. Ann. Math. Statist., 1969, *40*, № 1, 152—161 (РЖМат, 1971, 8В15)
40. *Childs D. R.*, Reduction of the multivariate normal integral to characteristic form. Biometrika, 1967, *54*, № 1-2, 293—300 (РЖМат, 1968, 3В7)
41. *Choi Jae-Rong*, An equality involving orthant probabilities. Communs Statist., 1975, *4*, № 12, 1167—1175 (РЖМат, 1976, 10В11)
42. —, On method of computing singular orthant probability and its application. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1976, *A30*, № 1, 7—13 (РЖМат, 1976, 10В10)

43. *Chu J. T.*, On bounds for the normal integral. Biometrika, 1955, *42*, № 1-2, 263—265 (РЖМат, 1956, 5374)
44. *Cooper B. E.*, Algorithm AS 2. The normal integral. Appl. Statist., 1968, *17*, № 2, 186—188 (РЖМат, 1969, 4В537)
45. —, Algorithm AS 4. An auxiliary function for distribution integrals. Appl. Statist., 1968, *17*, № 2, 190—192 (РЖМат, 1969, 4В539)
46. —, Algorithm AS 4. An auxilari function for distribution integrals. (Corrigendum). Appl. Statist., 1970, *19*, № 2, 204 (РЖМат, 1971, 4В681)
47. *Cunningham S. W.*, From normal integral to deviate. Algorithm AS 24. Appl. Statist., 1969, *18*, № 3, 290—293 (РЖМат, 1970, 7В541)
48. *Curnow R. N., Dunnett C. W.*, The numerical evaluation of certain multivariate normal integrals. Ann. Math. Statist., 1962, *33*, № 2, 571—579 (РЖМат, 1963, 3В98)
49. *Dagenais M. G., Lonergan G.*, Accurate evaluation of bivariate normal integrals. Cah. Cent. étud. rech. opér., 1974, *16*, № 2, 153—160 (РЖМат, 1975, 4Б45)
50. *Daley D. J.*, Computation of bi- and tri-variate normal integrals. Appl. Statist., 1974, *23*, № 3, 435—438 (РЖМат, 1975, 8В92)
51. *Das Sisir Chandra*, The numerical evaluation of a class of integrals. II. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1956, *52*, № 3, 442—448 (РЖМат, 1958, 5196)
52. *David F. N.*, A note on the evaluation of the multivariate normal integral. Biometrika, 1953, *40*, № 3-4, 458—459 (РЖМат, 1954, 3772)
53. —, *Mallows C. L.*, The variance of Spearman's rho in normal samples. Biometrika, 1961, *48*, № 1-2, 19—28 (РЖМат, 1962, 4В38)
54. *David H. A., Six F. B.*, Sign distribution of standard multinormal variables with equal positive correlation. Rev. Inst. int. statist., 1971, *39*, № 1, 1—3 (РЖМат, 1971, 12В22)
55. *Deák István*, A többdimenziós normális eloszlásfüggvény Monte Carlo integrálással történő kiszámitásának számitógépes tapasztalatai. Magy. tud. akad. Számítástechn. és automatiz. kut. intéz. közl., 1978, № 19, 47—59 (РЖМат, 1978, 10В648)
56. *Donnelly T. G.*, Algorithm 462. Bivariate normal distribution. Communs ACM, 1973, *16*, № 10, 638 (РЖМат, 1975, 11В904)
57. *Dunn O. J.*, Estimation of the means of dependent variables. Ann. Math. Statist., 1958, *29*, № 4, 1095—1111 (РЖМат, 1960, 646)
58. *Dunnett C. W., Sobel M.*, Approximations to the probability integral and certain percentage points of a multivariate analogue of Student's t-distributions. Biometrika, 1955, *42*, № 1-2, 258—260 (РЖМат, 1956, 7513)
59. *Dutt J. E.*, A representation of multivariate normal probability integrals by integral transforms. Biometrika, 1973, *60*, № 3, 637—645 (РЖМат, 1974, 4В115)
60. —, Numerical aspects of multivariate normal probabilities in econometric models. Ann. Econ. and Social Meas., 1976, *5*, № 4, 547—561 (РЖМат, 1977, 11В503)
61. —, *Lin T. K.*, A short table for computing normal orthant probabilities dimensions 4 and 5. J. Statist. Comput. and Simul., 1975, *4*, № 2, 95—120 (РЖМат, 1976, 7В129)
62. *Edwards A. W. F.*, A linkage for drawing the normal distribution. Appl. Statist., 1963, *12*, № 1, 44—45 (РЖМат, 1964, 7В222)
63. *Escoufier Y.*, Calculs de probabilités par une méthode de Monte-Carlo pour une variable p-normale. Rev. statist. appl., 1967, *15*, № 4, 5—15 (РЖМат, 1968, 10В152)
64. *Gordon R. D.*, Values of Mills' ratio of area to bounding ordinate of normal probability integral for large values of the argument. Ann. Math. Statist., 1941, *12*, № 3, 364—366
65. *Gray H. L., Schucany W. R.*, On the evaluation of distribution functions. J. Amer. Statist. Assoc., 1968, *63*, № 322, 715—720 (РЖМат, 1969, 5В10)

66. *Gupta S. S.*, Probability integrals of multivariate normal and multivariate t. Ann. Math. Statist., 1963, *34*, № 3, 792—828 (РЖМат, 1964, 10В8)
67. —, Bibliography on the multivariate normal integrals and related topics. Ann. Math. Statist., 1963, *34*, № 3, 829—838 (РЖМат, 1964, 5В226)
68. —, A note on some inequalities for multivariate normal distribution. Bull. Calcutta Statist. Assoc., 1969, *18*, № 71-72, 179—180
69. —, *Waknis M. N.*, A system of inequalities for the incomplete gamma function and the normal integral. Ann. Math. Statist., 1965, *36*, № 1, 139—149 (РЖМат, 1965, 11Б25)
70. *Haldane J. B. S.*, Simple approximations to the probability integral and $P(\chi^2, 1)$ when both are small. Sankhyā, 1961, *A23*, № 1, 9—10 (РЖМат, 1964, 11В12)
71. *Hamaker Hugo C.*, Approximating the cumulative normal distribution and its inverse. Appl. Statist., 1978, *27*, № 1, 76—77 (РЖМат, 1978, 11В158)
72. *Hastings C.*, Approximations for digital computers. Prinston. N. Y., Univ. Press, London, Oxford Univ. Press., 1955, 201 pp. (РЖМат, 1956, 7700К)
73. *Hebrant F.*, Numerical techniques and algorithms for the normal and chi-square probability functions and their inverses. Biometrie-Praximetrie, 1977, *17*, № 3-4
74. *Hildebrand F. B.*, Introduction to numerical analysis. New York—London, McGraw-Hill, 1956, 511 pp. (РЖМат, 1957, 927К)
75. *Hill I. D.*, A remark on algorithm AS 2 «The normal integral». Appl. Statist., 1969, *18*, № 3, 299—300 (РЖМат, 1970, 8В531)
76. —, Algorithm AS 66. The normal integral. Appl. Statist., 1973, *22*, № 3, 424—427
77. —, *Jouse S. A.*, Algorithm 304. Normal curve integral. Communs ACM, 1967, *10*, 374—375
78. *Hornecker G.*, Évalution approchée de la meileure approximation polinomiale d'ordre n de $f(x)$ sur un segment fini (a, b). Chiffres, 1958, *1*, 157—169 (РЖМат, 1962, 11Б83)
79. *Ibbetson D.*, Algorithm 209. Gauss. Communs ACM, 1963, *6*, 616
80. *Ihm P.*, Numerical evaluation of certain multivariate normal integrals. Sankhia, 1959, *21*, № 3-4, 363—366 (РЖМат, 1960, 10949)
81. *John S.*, On the evaluation of the probability integral of a multivariate normal distribution. Sankhiā, 1959, *21*, № 3-4, 367—370 (РЖМат, 1961, 2В12)
82. *Johnson N. L., Kotz S.*, Continuous multivariate distributions. New York, Wiley Interscience, 1972. 331 pp., Publishers' Weekly, 1972, *202*, № 17, 61 (РЖМат, 1973, 4В13К)
83. *Kendall M. G.*, Proof of relations connected with the tetrachoric series and its generalization. Biometrika, 1941, *32*, № 1-2, 196—198
84. *Kerridge D. F., Cook G. W.*, Yet another series for the normal integral. Biometrika, 1976, *63*, № 2, 401—403 (РЖМат, 1977, 2В15)
85. *Khatri C. G.*, On certain inequalities for normal distributions and their applications to simultaneous confidence bounds. Ann. Math. Statist., 1967, *38*, № 6, 1853—1867 (РЖМат, 1971, 10В209)
86. *Kibble W. F.*, An extension of a theorem of Mehler's on Hermite polinomials. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1945, *41*, 12—15
87. *Laplace P. S.*, Théorie analitique de probabilités. Part 2, Paris: Courcier, 1812
88. *Marsaglia G.*, Expressing the normal distribution with covariance matrix $A+B$ in terms of one with covariance matrix A. Biometrika, 1963, *50*, № 3-4, 535—538 (РЖМат, 1964, 10В9)
89. *McFadden J. A.*, Urn models of correlation and a comparison with the multivariate normal integral. Ann. Math. Statist., 1955, *26*, № 3, 478—489 (РЖМат, 1956, 6733)
90. —, An approximation for the symmetric, quadrivariate normal integral. Biometrika, 1956, *43*, № 1, 206—207 (РЖМат, 1958, 5943)

91. —, Two expansions for the quadrivariate normal integral. Biometrika, 1960, *47*, № 3-4, 325—333 (РЖМат, 1961, 9В20)
92. —, *Lewis J. L.*, Multivariate normal integrals for highly correlated samples from a Wiener process. J. Appl. Probab., 1967, *4*, № 2, 303—312 (РЖМат, 1968, 5В33)
93. *Mills J. P.*, Tables of ratio: area to bounding ordinate, for any portion of the normal curve. Biometrika, 1926, *18*, 395—400
94. *Milton R. C.*, Computer evaluation of the multivariate normal integral. Technometrics, 1972, *14*, № 4, 881—889 (РЖМат, 1973, 4В165)
95. —, *Hotchkiss R.*, Computer evaluation of the normal and inverse normal distribution functions. Technometrics, 1969, *11*, № 4, 817—822
96. *Moran P. A. P.*, Rank correlation and product-moment correlation. Biometrika, 1948, *35*, № 1-2, 203—206
97. —, The numerical evaluation of a class of integrals. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1956, *52*, № 2, 230—233 (РЖМат, 1956, 9128)
98. *Murotsu Yoshisada, Yonezawa Masaaki, Oba Fuminori, Niwa Kazukuni*, A method for calculating multi-dimensional Gaussian distribution. Bull. Univ. Osaka Prefect., 1975, *A24*, № 2, 193—204 (РЖМат, 1976, 11В9)
99. *Murti V. N.*, On a result of Birnbaum regarding the skewness of *X* in a bivariate normal population. J. Indian Soc. Agric. Statist., 1962, *4*, 85—87
100. *Nicholson C.*, The probability integral for two variables. Biometrika, 1943, *33*, № 1, 59—72
101. *Odeh R. E., Evans J. O.*, Algorithm AS 70. The percentage points of the normal distribution. Appl. Statist., 1974, *23*, № 1, 96—97 (РЖМат, 1975, 1В1071)
102. *Owen D. B.*, Tables for computing bivariate normal probabilities. Ann. Math. Statist., 1956, *27*, № 4, 1075—1090 (РЖМат, 1958, 1387)
103. —, *Wiesen J. M.*, A method of computing bivariate normal probabilities with an application to handling errors in testing and measuring. Bell Sistem Techn. J., 1959, *38*, № 2, 553—572 (РЖМат, 1960, 11893)
104. *Page E.*, Approximations to the cumulative normal function and its inverse for use on a pocket calculator. Appl. Statist., 1977, *26*, № 1, 75—76 (РЖМат, 1977, 10В102)
105. *Pearson K.*, Mathematical contributions to the theory of evolution. VII. On the correlation of characters not quantitatively measurable. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1901, *A195*, 1—47
106. *Plackett R. L.*, A reduction formula for normal multivariate integrals. Biometrika, 1954, *41*, № 3-4, 351—360 (РЖМат, 1956, 5364)
107. *Polyà G.*, Remarcs on computing the probability integral in one and two dimensions. Proc. Berkeley Symp., 1949, 63—78
108. *Ray W. D., Pitman A. E. N. T.*, Chebyshev polinomial and other new approximations to Mills' ratio. Ann. Math. Statist., 1963, *34*, № 3, 892—902 (РЖМат, 1965, 10В11)
109. *Ruben H.*, On the moments of order statistics in samples from normal populations. Biometrika, 1954, *41*, № 1-2, 200—227 (РЖМат, 1956, 7490)
110. —, Probability content of regions under spherical normal distributions. III. The bivariate normal integral. Ann. Math. Statist., 1961, *32*, № 1, 171—186 (РЖМат, 1962, 8В7)
111. —, On the numerical evaluation of a class of multivariate normal integrals. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1959—1960, *A65*, № 3, 272—281 (РЖМат, 1962, 1В180)
112. —, A new asymptotic expansion for the normal probability integral and Mills' ratio. J. Roy. Statist. Soc., 1962, *B24*, № 1, 177—179 (РЖМат, 1963, 2В90)
113. —, An asymptotic expansion for a class of multivariate normal integrals. J. Austral. Math. Soc., 1962, *2*, № 3, 253—264 (РЖМат, 1963, 5В89)

114. —, A convergent asymptotic expansion for Mills' ratio and the normal probability integral in terms of rational functions. Math. Ann., 1963, *151*, № 4, 355—364 (РЖМат, 1964, 3В28)
115. —, An asymptotic expansion for the multivariate normal distribution and Mills' ratio. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1964, *B68*, № 1, 3—11 (РЖМат, 1964, 11В11)
116. —, Irrational fraction approximations to Mills' ratio. Biometrika, 1964, *51*, № 3-4, 339—345 (РЖМат, 1965, 5В14)
117. *Sampford M. R.*, Some inequalities on Mills' ratio and related functions. Ann. Math. Statist., 1953, *24*, № 1, 130—132 (РЖМат, 1953, 349)
118. *Savage I. R.*, Mills' ratio for multivariate normal distributions. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1962, *B66*, № 3, 93—96 (РЖМат, 1963, 11В142)
119. *Scott A.*, A note on conservative confidence regions for the mean of a multivariate normal. Ann. Math. Statist., 1967, *38*, № 1, 278—280 (РЖМат, 1971, 6В151)
120. *Schläfli L.*, On the multiple integral $\int^n dxdy \ldots dz$ whose limits are $p_1=a_1x+b_1y+\ldots+h_1z>0$, $p_2>0, \ldots, p_n>0$ and $x^2+\ldots+z^2<1$. Quart. J. Pure Appl. Math., 1858, *2*, 261—301
121. —, On the multiple integral $\int^n dxdy \ldots dz$ whose limits are $p_1=a_1x+b_1y+\ldots+h_1z>0$, $p_2>0, \ldots, p_n>0$ and $x^2+\ldots+z^2<1$. Quart. J. Pure Appl. Math., 1860, *3*, 54—68, 97—107
122. *Schlömilch O.*, Compendium der Höheren Analysis, 1895, *2*, 265—270
123. *Shenton L. R.*, Inequalities for the normal integral including a new continued fraction. Biometrika, 1954, *41*, № 1-2, 177—189 (РЖМат, 1955, 827)
124. *Sheppard W. F.*, II. On the calculation of the double-integral expressing normal correlation. Trans. Cambridge Phil. Soc., 1900, *19*, 23—26
125. —, The probability integral. British Assoc. Math. Tables, 1939, *7*, Cambridge Univ. Press.
126. *Šidák Z.*, Remarks on Anděl's paper «On multiple normal probabilities of rectangles». Apl. mat., 1971, *16*, № 3, 182—187 (РЖМат, 1972, 2В15)
127. *Silver E. A.*, A safety factor approximation based on Tukey's lambda distribution. Oper. Res. Quart., 1977, *28*, № 3/ii, 743—746 (РЖМат, 1978, 10В413)
128. *Somerville P. N.*, Some problems of optimum sampling. Biometrika, 1954, *41*, № 3-4, 420—429 (РЖМат, 1956, 5390)
129. *Sondhi Man Mohan*, A note on the quadrivariate normal integral. Biometrika, 1961, *48*, № 1-2, 201—203 (РЖМат, 1962, 1В18)
130. *Sowden R. R., Ashford J. R.*, Computation of the bi-variate normal integral. Appl. Statist., 1969, *18*, № 2, 169—180 (РЖМат, 1970, 4В205)
131. *Steck G. P.*, A table for computing trivariate normal probabilities. Ann. Math. Statist., 1958, *29*, № 3, 780—800 (РЖМат, 1959, 9279)
132. —, Orthant probabilities for the equicorrelated multivariate normal distribution. Biometrika, 1962, *49*, № 3-4, 433—445 (РЖМат, 1963, 10В102)
133. —, *Owen D. B.*, A note on the equicorrelated multivariate normal distribution. Biometrika, 1962, *49*, № 1-2, 269—271 (РЖМат, 1963, 2В91)
134. *Stroud A. H., Secrest D.*, Gaussian quadrature formulas. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1966
135. *Stuart A.*, Equalli correlated variates and the multinormal integral. J. Roy. Statist. Soc., 1958, *B20*, № 2, 373—378 (РЖМат, 1960, 5619)
136. *Szántai Tamás*, Egy eljárás a többdimenziós normális eloszlásfüggvénty és gradiense értékeinek meghatározására. Alkalm. mat. lapok., 1976, *2*, № 1-2, 27—39 (РЖМат, 1978, 3В9)
137. *Tate R. F.*, On a double inequality of the normal distribution. Ann. Math. Statist., 1953, *24*, № 1, 132—134 (РЖМат, 1953, 348)
138. *Tong Yung Liang*, Some probability inequalities of multivariate normal and multivariate *t*. J. Amer. Statist. Assoc., 1970, *65*, № 331, 1243—1247 (РЖМат, 1971, 7В31)

139. *Vaart H. R. van der,* The content of certain spherical polyhedra for any number of dimensions. Experientia, 1953, *9*, № 3, 88—90 (РЖМат, 1953, 894)
140. —, The content of some classes of non-Euclidean polyhedra for any number of dimensions, with several applications. I. II. Indag. math., 1955, *A58*, № 2, 199—221 (РЖМат, 1956, 8212)
141. *Webster J. T.,* On the application of the method of Das in evaluating a multivariate normal integral. Biometrika, 1970, *57*, № 3, 657—660 (РЖМат, 1971, 7В156)
142. *Wijngaarden A. van,* A transformation of formal series. I. II. Indag. math., 1953, *A56*, № 5, 522—543 (РЖМат, 1954, 5531)
143. *Williams J. D.,* An approximation to the probability integral. Ann. Math. Statist., 1946, *17*, № 3, 363—365
144. *Young J. C., Minder Ch. E.,* Algorithm AS 76. An integral useful in calculating noncentral *t* and bivariate normal probabilities. Appl. Statist., 1974, *23*, № 3, 455—457 (РЖМат, 1975, 10В757)
145. *Zelen M., Severo N. C.,* Graphs for bivariate normal probabilities. Ann. Math. Statist., 1960, *31*, № 3, 619—624 (РЖМат, 1962, 3В144)