Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Ю. Готлиб, Свойства уравнения Шрёдингера с потенциалом типа барьер,
УМН, 1977, том 32, выпуск 1, 181–182

https://www.mathnet.ru/rm3054

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
5 декабря 2025 г., 06:18:50

СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ ТИПА БАРЬЕР

В. Ю. Готлиб

Пусть Ω_0— область в R^2, гомеоморфная кольцу, ограниченная снаружи контуром S_1, а изнутри контуром S_2. S_1 и S_2 предполагаем гладкими не менее C^2. Обозначим через Ω_i $(i = 1, 2)$ области, такие, что $\Omega_i \subset R^2 \setminus \Omega_0$, $\partial\Omega_i = S_i$. Рассматривается неоднородное уравнение Шрёдингера:

$$(1) \qquad (\Delta + k^2 - M^2\Psi_{\Omega_0})\, u = \delta\,(x - x_0)$$

с потенциалом $M^2\Psi_{\Omega_0}$, где Ψ_{Ω_0} — характеристическая функция области Ω_0, а M — достаточно велико.

При помощи интегральных уравнений удается получить асимптотику $M \to \infty$ полюсов по k функции u. Каждая такая особенность сходится при $M \to \infty$ к собственным числам внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа, либо квазисобственным числам внешней. Интересно отметить, что в случае внутренней задачи асимптотика $\mathrm{Re}K_j(M)$ и $\mathrm{Im}K_j(M)$ получается существенно разной (см. формулы в конце статьи). Условия на $u(x, x_0, k)$ — экспоненциальное убывание при $\mathrm{Im}\, k > 0$, $|x| \to \infty$; $u\,(x, x_0, k)$ мероморфна на комплексной плоскости с разрезом по нижней части мнимой оси — следствие финитности потенциала. Будем рассматривать при больших M особенности, соответствующие собственным числам внутренней области. Введем следующие условия и обозначения: $G_{\Omega_i}(x, y, k)$ — функции Грина оператора $\Delta + k^2$ в Ω_i при условиях Дирихле, а k меняется в области $b < \mathrm{Re}\, k < a$, $b_1 < \mathrm{Im}\, k < a_1$, не содержащей особенностей функций Грина внешней задачи и не более одного собственного значения внутренней $k = k_0 \in (a, b)$. Тогда при $k \neq k_0$ $u(x, x_0, k)$ представляется через ее значения на S_1 и S_2 следующим образом:

$$(2) \qquad u\,(x, x_0, k) = \int \frac{\partial G\Omega_i\,(x, x\,(S_i))}{\partial n_{S_i}}\, u\,(S_i)\, dS_i + P_i\,(x, x_0) \text{ в } \Omega_i.$$

Аналогичные формулы получаются при $x_0 \in \Omega_2$ и Ω_0.

Обозначим $F\,(z) = -\dfrac{2}{\pi} K_0\,(z)$, где K_0— функция Макдональда. Пользуясь тем, что $\delta(x - x') = (\Delta - 1)F(|x - x'|)$, имеем интегральное тождество

$$u\,(x, x_0, k, M) =$$
$$= F\,(\sqrt{M^2 - k^2}\,|x - x_0|) - M^2 \int\limits_{R^2 \setminus \Omega_0} u\,(x', x_0, k, M)\, F\,(\sqrt{M^2 - k^2}\,|x - x'|)\, dx',$$

из которого с учетом (2) получаем систему интегральных уравнений для $u(S_1)$ и $u(S_2)$ с ядрами $D_{ik}(S_i, S_k)$, где

$$(3) \qquad D_{ik}\,(S_i, S_k) = -M^2 \int\limits_{\Omega_k} F\,(\sqrt{M^2 - k^2} \cdot |x\,(S_i) - x|)\, \frac{\partial G_{\Omega_k}\,(x, x\,(S_k))}{\partial n_{S_k}}\, dx.$$

Аналогичные формулы имеют место для свободных членов.

При достаточно больших M имеем в правой части (3) оператор сжатия.

Оценки основаны на легко выводимом с учетом известной асимптотики функции F соотношении (4)

$$\int\limits_{R^e \setminus \Omega_0} F\,(\sqrt{M^2 - k^2}\,|x - x_0|)\, dx = \frac{1}{M^2 - k^2}\left(\frac{1}{2} + O\,(1/M)\right),$$

если $x_0 \in S_1$ или S_2, и представлении $G_{\Omega_k} = (G_{\Omega_k} - \overset{0}{G}_{\Omega_k}) + \overset{0}{G}_{\Omega_k}$, где $\overset{0}{G}_{\Omega_k}$ — функция Грина уравнения Лапласа. При этом используются оценки роста вблизи границы для решений эллиптических уравнений [1], [2] и принцип максимума модуля.

Учет известной асимптотики функции F при больших M позволяет находить асимптотику решений (3) при гладких правых частях. Она оказывается равномерной, если $|k - k_0| > c_0$, c_0 — произвольное фиксированное.

Для изучения поведения u в окрестности k_0 мы представляем оператор $\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$ в виде операторов конечномерного и регулярного по k. Тогда, пользуясь тем, что D_{22} вещественно при вещественных k, а нормы недиагональных операторов экспоненциально малы, мы можем находить асимптотику отдельно для $\mathrm{Re}(k^2(M) - k_0^2)$ и $\mathrm{Im}\,(k^2(M) - k_0^2)$, где $k(M)$ — собственное значение однородного уравнения (3), а следовательно, и неспектральная особенность функции Грина. Приведем теперь окончательный результат для наиболее типичного случая, когда $\rho(s_1, s_2)$ имеет один абсолютный минимум с невырожденной квадратичной формой вторых производных и k_0 имеет кратность 1 с собственной функцией $\varphi_0(x)$ $x \in \Omega_2$. Тогда

$$\mathrm{Re}\,(k^2 - k_0^2) \sim -\frac{1}{M} \int\limits_{S_2} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}(s_2) \right]^2 ds_2,$$

а

$$\mathrm{Im}\,(k^2 - k_0^2) =$$

$$= \left[1 + O\left(\frac{1}{M}\right)\right] \frac{16 c_0 \pi \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}\right)^2_{s_{20}} M^{-3} e^{-2ML}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_0 + L} - \frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1 - L}\right)\left(1 - \frac{L}{R_1}\right)\left(1 + \frac{L}{R_0}\right)}},$$

где

$$L = \min \rho(s_1, s_2) = \rho(s_{10}, s_{20}),$$

$$R = R(s_{10}), \quad R_1 = R(s_{20}),$$

$$c_0 = \left(\frac{\partial\, \mathrm{Im}\, \Psi}{\partial n}\right)_{s_{10}},$$

причем

$$(\Delta + k_0^2)\Psi = 0, \ \Psi|_{s_1} = \delta(s_1 - s_{10}).$$

Методика допускает распространение на трехмерный случай и кратный спектр. Отличную от нашей методику применил в подобной задаче А. А. Арсеньев [3]. Осесимметричный случай рассматривался в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] О. А. Ладыженская, Н. И. Уральцева, О непрерывности по Гёльдеру решений и их производных для линейных и квазилинейных уравнений эллиптического типа, ДАН 155:6 (1964).

[2] Б. Р. Вайнберг, О решениях гиперболических систем во внешней области, УМН 24:78 (120) (1969).

[3] А. А. Арсеньев, Сингулярные потенциалы и резонансы, Изд-во МГУ, 1974.

[4] Я. Б. Зельдович, А. И. Базь, Реакции, рассеяние и распады в нерелятивистской квантовой механике, М., «Наука», 1966.

Поступило в Правление общества 2 апреля 1975 г.