ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 5 (228)

М. М. Арсланов

УДК 510.54

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

В теории алгоритмов при доказательстве теорем часто используется теорема о неподвижной точке, один из вариантов которой, напр., гласит, что если w_0, $w_1, \ldots$ — геделевская нумерация всех рекурсивно перечислимых множеств, а f — одноместная общерекурсивная функция, то найдется такое натуральное число n, что

$$w_n = w_{f(n)} \tag{1}$$

(неподвижная точка отображения f).

Можно попытаться обобщить эту теорему в следующих двух направлениях.

1. Так (максимально) расширить класс общерекурсивных функций, чтобы для всех функций из этого класса соотношение (1) по-прежнему имело место, т. е. описать весь класс функций (не обязательно общерекурсивных), для которых имеет место соотношение (1). В связи с этим заметим, что для любой функции f достаточно изменить ее значение в одной единственной точке, положив, напр., $f(0) = 0$ (или любому другому номеру множества w_0), чтобы соотношение (1) имело место. Поэтому, в этой работе речь пойдет не об описании класса всех таких функций, а об описании Тьюринговых степеней неразрешимости, все функции из которых имеют неподвижные точки.

Теорема о неподвижной точке в ее первоначальном виде установлена для всех всюду определенных функций из степени 0. Легко показать, что любая степень, большая или равная $0'$, содержит функции „без неподвижных точек", т. е. функции, для которых соотношение (1) ложно. Какие степени между 0 и $0'$ содержат только функции с неподвижными точками? Существуют ли отличные от 0 степени α такие, что все функции, общерекурсивные относительно α, обладают неподвижными точками (последнее особенно важно для применений этой теоремы)? Существуют ли меньшие $0'$ степени „без неподвижных точек" (т. е. степени, содержащие функции без неподвижных точек)?

Все эти вопросы обсуждаются в § 1 этой работы.

2. При установлении тех или других фактов с помощью теоремы о неподвижной точке часто мы не нуждаемся в этой теореме в ее первоначальном виде. Например, при изучении свойств фактор-решетки рекурсивно перечислимых множеств по модулю конечных множеств вместо теоремы о неподвижной точке мы нуждаемся в более слабой теореме о „почти неподвижной точке" функции, т. е. вместо соотношения (1) нам достаточно иметь соотношение

$$\exists x \, (w_x =^* w_{f(x)}),$$

здесь $\ldots =^* \ldots$ означает что „существуют конечные множества A, B такие, что $\ldots \bigcup A = \ldots \bigcup B$"; при изучении степеней неразрешимости нам нужна теорема о T-неподвижной точке:

$$\exists x \, (w_x =_T w_{f(x)}),$$

здесь $=_T$ означает эквивалентность относительно сводимости по Тьюрингу; при изучении m-, tt-, wtt- и других сводимостей мы нуждаемся в теоремах об m-, tt-, wtt- и других неподвижных точках, которые определяются аналогично.

Возникают естественные вопросы об описании классов степеней, все функции из которых имеют соответствующие неподвижные точки.

Эти вопросы изучаются в § 2.

К. Джокуш указал автору на возможность использования их (вместе с Р. Соаре) теоремы о низких степенях при доказательстве теоремы 7. Здесь мы приводим это доказательство (первоначальное доказательство теоремы было намного более сложным). Аспирант К. Джокуша Л. Велш улучшил доказательство теоремы 8, автора Р. Соаре нашел новое доказательство теоремы 1, не использующее критерий T-полноты А. Лахлана (ниже приводится это доказательство). Всем им автор выражает свою глубокую благодарность.

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ означает геделевскую нумерацию всех частично-рекурсивных функций от одной переменной, $\varphi_0^A, \varphi_1^A, \ldots$ — такая же нумерация всех частично-рекурсивных относительно множества A функций от одной переменной. По определению $\varphi_{e,t}^A(x)=\varphi_e^A(x)$, если вычисление $\varphi_e^A(x)$ завершается за t тактов в работе соответствующей машины Тьюринга, в противном случае $\varphi_{e,t}^A(x)$ не определена. Если A рекурсивно перечислимо, то $A^{(s)}$ означает конечное подмножество A, полученное за s первых шагов при некотором фиксированном перечислении элементов А. Характеристическая функция множества A обозначается через $A(x)$, т. е. $A(x)=1$, если $x\in A$, и $A(x)=0$, если $x\notin A$. $A[x]$ означает конечное множество $A\cap\{0, 1, \ldots, x\}$. Множество всех натуральных чисел обозначается через N. Всюду в работе степень означает Тьюринговую степень неразрешимости (если не оговорено противное).

§ 1. Теорема 1 (критерий полноты рекурсивно перечислимых множеств). *Рекурсивно перечислимое множество полно относительно сводимости по Тьюрингу тогда и только тогда, когда существует функция $f\leqslant_T A$ такая, что $w_{f(x)}\neq w_x$ для всех x.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Очевидно, т. к. $\{x\mid w_x=\varnothing\}=_T 0'$.

$\Leftarrow$. Пусть $\forall x\,(w_{f(x)}\neq w_x)$ и $f(x)=\varphi_e^A(x)$. Пусть K — креативное множество. Определим частично-рекурсивную функцию m: $m(x)=\mu s\,(x\in K^{(s)})$. Теперь пусть общерекурсивная функция $\tilde f(s, x)=\varphi_{e,t}^{A^{(t)}}(x)$, где $t\geqslant s$ — наименьшее число такое, что $\varphi_{e,t}^{A^{(t)}}(x)$ определено. Далее, пусть $g(x)=$ наименьшему числу такому, что при вычислении $\varphi_e^A(x)$ вопросы оракулу A задаются из интервала $0, 1, \ldots, g(x)$. Ясно, что $g\leqslant_T A$.

По теореме о неподвижной точке существует общерекурсивная функция h такая, что

$$w_{h(x)}=\begin{cases} w_{\tilde f(m(x),\, h(x))}, & \text{если } x\in K;\\ \varnothing, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Теперь определим общерекурсивную относительно A функцию r следующим образом: $r(x)=\mu s\,[A^{(s)}[gh(x)]]=A[gh(x)]$. Теперь, если $x\in K$ и $r(x)\leqslant m(x)$, то $A^{(m(x))}[gh(x)]=A[gh(x)]$. Поэтому $\tilde f(m(x), h(x))=fh(x)$ и $w_{fh(x)}=w_{h(x)}$. Это противоречит предположению об f. Следовательно, для $x\in K$ $m(x)<r(x)$. Таким образом, для всех x $x\in K\leftrightarrow x\in K^{(r(x))}$, что влечет $K\leqslant_T A$. Значит, A T-полно, что и требовалось доказать.

Замечание. Если рекурсивно перечислимое множество A не T-полно и $f\leqslant_T A$, то неподвижная точка функции находится эффективно относительно A и по номеру f в нумерации $\varphi_0^A, \varphi_1^A, \ldots$ Для этого выберем x такое, что $x\in K$ и $r(x)\leqslant m(x)$. Такое x найдется, в противном случае $K\leqslant_T A$. Тогда $\tilde f(m(x), h(x))=fh(x)$ и $w_{fh(x)}=w_{h(x)}$. Таким образом, число $h(x)$ является неподвижной точкой функции f.

Степень α называется слабо рекурсивно перечислимой степенью порядка n (короче, n-слабо рекурсивно перечислимой степенью), где $n \geqslant 1$, если существуют такие степени $\beta_1, \ldots, \beta_n$, что $\beta_1 \leqslant_T \ldots \leqslant_T \beta_n$ и $\forall i (i < n \to \beta_{i+1}$ рекурсивно перечислима относительно $\beta_i)$, β_1 рекурсивно перечислима и $\beta_n = \alpha$. Если здесь β_1 рекурсивно перечислима относительно некоторой степени γ, то α называется n-слабо рекурсивно перечислимой относительно γ степенью.

Ясно, что 1-слабо рекурсивно перечислимые степени—это в точности все рекурсивно перечислимые степени. В [1] показано, что для любого n существуют $(n+1)$-, но не n-слабо рекурсивно перечислимые степени. Из теорем 2 и 4 будет следовать, что иерархия n-слабо рекурсивно перечислимых степеней при $n \in N$ не исчерпывает совокупности всех степеней $\leqslant 0'$.

Теорема 2. *Любая функция, общерекурсивная относительно некоторой слабо рекурсивно перечислимой степени порядка* n, $n \geqslant 1$, *меньшей* $0'$, *имеет неподвижную точку.*

Доказательство этой теоремы следует индукцией по n из теоремы 1 и следующей теоремы (см. [2]).

Теорема 3 (обобщенная теорема о рекурсии). *Пусть* $\bar{\underline{\circ}}$ *—такое отношение между множествами, что* $w_x = w_y \to w_x \bar{\underline{\circ}}\, w_y$. *Далее, пусть степень* β *рекурсивно перечислима относительно степени* α, $0^{(n)} \leqslant \alpha$, $\beta \oplus \alpha <_T 0^{(n+1)}$, *любая функция, степень которой меньше или равна* α, *обладает* $\bar{\underline{\circ}}$*-неподвижной точкой, которая находится эффективно относительно* α. *Тогда любая функция* f, *общерекурсивная относительно* $C \in \beta$, *обладает* $\bar{\underline{\circ}}$*-неподвижной точкой.*

Для доказательства теоремы 2 с помощью теорем 1 и 3 необходимо $\bar{\underline{\circ}}$-неподвижную точку функции f находить эффективно по C и номеру f в нумерации $\varphi_0^C, \varphi_1^C, \ldots$ Действительно (в обозначениях доказательства обобщенной теоремы о рекурсии из [2]), существует такое $t_0 \in T$, что $\exists s (\psi(s, t_0) = 0)$, но $\forall s (s \leqslant v(e^*, t_0) \to \psi(s, t_0) \neq 0)$. Такое t_0 найдется, иначе $T \leqslant_T V$. Тогда для e^* и t_0

$$C^{(v(e^*, t_0))} \cap \{0, 1, \ldots, \tau(\rho(e^*, t_0))\} = C \cap \{0, 1, \ldots, \tau(\rho(e^*, t_0))\}.$$

Отсюда

$$\varphi_{\pi(e^*, t_0)}(i) = \chi_C(i), \; i \leqslant \tau(\rho(e^*, t_0)). \tag{2}$$

Если $w_{f(\rho(e^*, t_0))} \neq w_{\rho(e^*, t_0)}$, то вместе с соотношением (3) из [2] и (2) имеет место соотношение (4) из [2]. Следовательно, $w_{\theta(\pi(e^*, t_0), \rho(e^*, t_0))} \bar{\underline{\circ}}\, w_{\rho(e^*, t_0)}$, в противоречие определению ρ. Отсюда следует, что $\rho(e^*, t_0)$ является неподвижной точкой функции f, что и требовалось.

Следующая теорема показывает, что не все функции $f \leqslant_T 0'$ обладают неподвижными точками.

Теорема 4. *Существуют такие функции* f *без неподвижных точек, что* $(\deg f)' = 0'$ *(следовательно,* $f <_T 0'$*).*

Доказательство этой теоремы см. в [1].

Следствие. Существует такая степень $\alpha < 0'$, что любая степень, заключенная строго между α и $0'$, не только не рекурсивно перечислима, но даже и не слабо рекурсивно перечислима ни для какого n.

В связи с этим сформулируем одну интересную проблему. Существуют ли минимальные степени $< 0'$ без неподвижных точек? Положительный ответ на этот вопрос приводит к следующему интересному результату: существует такая степень $\alpha < 0'$, которая не сравнима не только с рекурсивно перечислимыми степенями, заключенными строго между 0 и $0'$ (теорема Ейтса), но и со всеми n-слабо рекурсивно перечислимыми степенями (для любого n), заключенными строго между 0 и $0'$.

Остается открытым также и следующий вопрос: верно ли, что если степень содержит только функции с неподвижными точками, то она $\leqslant_T$ некоторой слабо рекурсивно перечислимой степени, меньшей $0'$?

§ 2. Легко показать (см. [3]), что каждая функция, общерекурсивная относительно $0'$, обладает почти неподвижной точкой, которая находится эффективно по номеру функции в нумерации $\varphi_0^{0'}$, $\varphi_1^{0'}$, ... Снова применяя обобщенную теорему о рекурсии, получим следующую более общую теорему.

Теорема 5. *Любая функция, общерекурсивная относительно некоторой степени $\geqslant 0'$, n-слабо рекурсивно перечислимой относительно $0'$ и меньшей $0''$, обладает почти неподвижной точкой.*

Из этой теоремы следует, напр., (ср. с теоремой 1)

Теорема 6 (критерий полноты рекурсивно перечислимых относительно $0'$ множеств). *Рекурсивно перечислимое относительно $0'$ множество A $0''$-полно тогда и только тогда, когда существует общерекурсивная относительно A функция оез почти неподвижных точек.*

Для дальнейшего нам понадобится принадлежащая Джокушу и Соаре теорема о некоторых свойствах функций, принадлежащих непустому Π_1^0-классу. Так как доказательство этой теоремы, насколько известно автору, нигде не опубликовано, ниже приводится не только точная формулировка теоремы, но и краткое ее доказательство. Если f — одноместная функция, то по определению $\bar{f}(x) = p_0^{f(0)}, p_1^{f(1)} \cdot \ldots \cdot p_{x-1}^{f(x-1)}$, где p_0, p_1 ... — все простые числа, расположенные в порядке возрастания. Π_1^0-классом называется класс всех одноместных функций f таких, что $\forall x\, R(\bar{f}(x))$ для некоторого рекурсивного предиката R.

Теорема Джокуша — Соаре о низких степенях: *если $\mathfrak{A}$ — непустой Π_1^0-класс, то существует функция $f \in \mathfrak{A}$ такая, что* $(\deg f)' = 0'$.

Доказательство. Множество T конечных последовательностей натуральных чисел называется деревом, если $\sigma \in T \,\&\, \tau \subseteq \sigma \rightarrow \tau \in T$, где $\tau \subseteq \sigma$ означает, что конечная последовательность τ является начальным отрезком конечной последовательности σ. Дерево называется рекурсивным, если отношение $\sigma \in T$ рекурсивно. Длину конечной последовательности σ обозначим через $\ln(\sigma)$ и в дальнейшем под σ будем понимать $\bar{\sigma}(\ln \sigma)$. Для дерева T обозначим через $T^* = \{f \mid \forall x (\bar{f}(x) \in T)\}$ все бесконечные ветви T. Так как $\mathfrak{A}$ — непустой Π_1^0-класс, то существует, как легко убедиться, такое рекурсивное дерево T, что $\mathfrak{A} = T^*$. Построим последовательность бесконечных рекурсивных деревьев $T_0, T_1, \ldots : T_0 = T$. Пусть T_e определено, и пусть $u_e = \{\sigma \mid \varphi^{\sigma}_{e, \ln(\sigma)}(e)$ не определено$\}$. Ясно, что u_e образует рекурсивное дерево. Определим

$$T_{e+1} = \begin{cases} T_e, & \text{если } T_e \cap u_e \text{ конечно;} \\ T_e \cap u_e, & \text{если } T_e \cap u_e \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Таким образом, либо для всех $g \in T^*_{e+1}$ $\varphi_e^g(e)$ определена, либо $\varphi_e^g(e)$ не определена ни для каких $g \in T^*_{e+1}$. Выберем $f \in \bigcap \{T_e^* \mid e \in N\}$. Очевидно, $f \in \mathfrak{A}$, $(\deg f)' = 0'$, т. к. вся конструкция рекурсивна в $0'$, что и требовалось доказать.

Если предикат R рекурсивен относительно некоторой степени α, то класс $\mathfrak{A} = \{f \mid \forall x\, R(\bar{f}(x))\}$ называется $\Pi_1^{0,\alpha}$-классом. Очевидная релятивизация предыдущей теоремы приводит к следующему результату.

Релятивизованная теорема Джокуша — Соаре о низких степенях: *если $\mathfrak{A}$ — непустой $\Pi_1^{0,\alpha}$-класс, то существует функция $f \in \mathfrak{A}$ такая, что* $(\deg f)' = \alpha'$.

Определим рекурсивный относительно $0'$ предикат с одной свободной переменной x следующим образом: $R(x) \Leftrightarrow \forall_{i \leqslant \ln(x)}\, i$ (множества w_i и w_{t_i} отличаются в интервале $0, 1, \ldots, x$, по крайней мере, в $(x)_0$ точках). Здесь t_i — показатель степени при p_i в разложении x на простые множители. ($R(0)$ истинно по определению.) Пусть $\mathfrak{A} = \{f \mid \forall x\, R(\bar{f}(x))\}$. Ясно, что $R \leqslant_T 0'$ и $\mathfrak{A}$ есть $\Pi_1^{0,0'}$-класс. Легко увидеть, что $\mathfrak{A} \neq \varnothing$ и $\forall f (f \in \mathfrak{A} \rightarrow \forall x (w_x \neq {}^*w_{f(x)}))$.

Следовательно, по релятивизованной теореме Джокуша—Соаре существует функция f такая, что $(\deg f)' = 0''$ и $\forall x (w_x \neq {}^* w_{f(x)})$. Таким образом, доказана

Теорема 7. *Существует функция f без почти неподвижных точек такая, что* $(\deg f)' = 0''$ (*следовательно,* $\deg f < 0''$).

Следующая теорема была анонсирована без доказательства в [4].

Теорема 8 (о T-неподвижной точке). *Любая функция f, общерекурсивная относительно $0''$ обладает T-неподвижной точкой.*

Доказательство. Пусть f — такая функция. Построим общерекурсивную функцию g такую, что для всех x $w_{g(x)} =_T w_{f(x)}$.

Пусть h — такая общерекурсивная функция, что для всех x $w_{h(x)} = w_x \oplus N$. Тогда $hf \leqslant_T 0''$ и для всех x $w_{hf(x)}$ — бесконечное множество, T-эквивалентное $w_{f(x)}$. Пусть α — такая общерекурсивная функция, что $\lim\limits_n \alpha(n, t, e)$ существует для всех t, e и $\lim\limits_t \lim\limits_n \alpha(n, t, e) = hf(e)$. (Каждая функция, общерекурсивная относительно $0''$, является такой „2-предельно рекурсивной“; см., напр., теорему 1 из [2].) Определим для каждого e рекурсивно перечислимое и T-эквивалентное с $w_{hf(e)}$ множество M^e так, чтобы существовала общерекурсивная функция g такая, что $w_{g(e)} = M^e$ для всех e.

Для всех e, t пусть $N^e_{t,0} = \varnothing$. Если $n > 0$, то $N^e_{t,n}$ есть множество всех тех u, для которых справедливы условия:

а) $u \in w^{(n)}_{\alpha(n,t,e)}$;

б) $\alpha(n, t, e) = \alpha(n, t+1, e) = \ldots = \alpha(n, t+u, e)$;

в) $u > \max(\bigcup \{w^{(k)}_{\alpha(k,t,e)} \mid k < n \,\&\, \alpha(k, t, e) \neq \alpha(n, t, e)\})$.

Пусть $M^e_{t,n} = \bigcup\limits_{k \leqslant n} N^e_{t,k}$ и $M^e_t = \bigcup\limits_n M^e_{t,n} = \bigcup\limits_n N^e_{t,n}$. Наконец, пусть $M^e = \bigoplus\limits_t M^e_t$. Докажем, что $M^e =_T w_{hf(e)}$ для всех e. С этой целью фиксируем e и выбираем числа t_0 и n_0 так, чтобы

$$t_0 = \mu t\,[s \geqslant t \rightarrow \lim_n \alpha(n, s, e) = hf(e)],$$

$$n_0 = \mu n\,[m \geqslant n \rightarrow \alpha(m, t_0, e) = hf(e)].$$

Теперь доказательство следует из следующих лемм.

Лемма 1. $M^e_{t_0} =^* w_{hf(e)}$.

Доказательство. Пусть $u > \max(\bigcup \{w^{(k)}_{\alpha(k,t_0,e)} \mid k < n_0\})$. Покажем, что $u \in M^e_{t_0}$ тогда и только тогда, когда $u \in w_{hf(e)}$. Предположим, что $u \in M^e_{t_0}$ и выберем n такое, что $u \in N^e_{t_0,n}$. Тогда, согласно условию а) $u \in w^{(n)}_{\alpha(n,t_0,e)}$. Но в силу $u > \max(\bigcup \{w^{(k)}_{\alpha(k,t_0,e)} \mid k < n_0\})$ мы должны иметь $n \geqslant n_0$, так что $\alpha(n, t_0, e) = hf(e)$. Следовательно, $u \in w_{hf(e)}$.

Теперь пусть $u \in w_{hf(e)}$. Выберем такое большое $n \geqslant n_0$, что $u \in w^{(n)}_{\alpha(n,t_0,e)}$ и $\alpha(n, t_0, e) = \alpha(n, t_0+1, e) = \ldots = \alpha(n, t_0+u, e) = hf(e)$. По определению t_0 это возможно. Тогда u удовлетворяет условиям а) и б). Заметим также, что если $\alpha(k, t_0, e) \neq \alpha(n, t_0, e)$, то $k < n_0$ по определению n_0. Значит, $u > \max(\bigcup \{w^{(k)}_{\alpha(k,t_0,e)} \mid k < n_0\}) \geqslant \max(\bigcup \{w^{(k)}_{\alpha(k,t_0,e)} \mid k < n \,\&\, \alpha(k, t_0, e) \neq \alpha(n, t_0, e)\})$, так что u удовлетворяет и условию в). Таким образом, $u \in N^e_{t_0,n} \subseteq M^e_{t_0}$. Мы доказали, что $M^e_{t_0} =^* w_{hf(e)}$.

Лемма 2. $w_{hf(e)} \leqslant_T M^e$.

Доказательство следует немедленно из леммы 1.

Лемма 3. *Если $t < t_0$, то M^e_t конечно.*

Доказательство. Фиксируем $t < t_0$. По определению t_0 мы имеем $\lim_n \alpha(n, t, e) \neq hf(e) = \lim_n \alpha(n, t_0, e)$. Пусть $n_1 = \mu n\, [n \geqslant n_0 \,\&\, (\forall m \geqslant n)\, [\alpha(m, t, e) = \lim_k \alpha(k, t, e)]]$ и u — любое фиксированное число такое, что:

1) $u \geqslant t_0 - t$;
2) $u > \max(\bigcup \{w^{(k)}_{\alpha(k, t, e)} \mid k < n_1\})$.

Покажем, что $u \notin M^e_t$. Пусть наоборот, напр., $u \in N^e_{t, n}$. Тогда $u \in w^{(n)}_{\alpha(n, t, e)}$, так что, по 2) $n \geqslant n_1$. Таким образом, $\alpha(n, t, e) \neq hf(e)$. Но $\alpha(n, t_0, e) = hf(e)$, что противочит условию б), которое гласит, что мы должны иметь $\alpha(n, t, e) = \ldots = \alpha(n, t+u, e)$, т. к. $u_0 \geqslant t_0 - t$. Противоречие.

Лемма 4. $\bigoplus_{t<t_0} M^e_t \leqslant_T w_{hf(e)}$.

Доказательство следует немедленно из леммы 3.

Лемма 5. *Если* $t \geqslant t_0$, *то* $M^e_t \leqslant_T w_{hf(e)}$. *Эта сводимость униформна по* t.

Доказательство. Фиксируем произвольное натуральное число u. Рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. $u \in w_{hf(e)}$. Выберем n таким, чтобы $\alpha(n, t, e) = \ldots = \alpha(n, t+u, e) = hf(e) \,\&\, u \in w^{(n)}_{\alpha(n, t, e)}$. Это возможно по определению t_0. Покажем, что $u \in M^e_t \leftrightarrow u \in M^e_{t, n}$. Ясно, что $u \in M^e_{t, n} \rightarrow u \in M^e_t$. Теперь пусть $u \notin M^e_{t, n}$. Тогда, по определению $N^e_{t, n}$ $(\exists \hat{n} < n)\, [u \leqslant \max w^{(\hat{n})}_{\alpha(\hat{n}, t, e)} \,\&\, \alpha(\hat{n}, t, e) \neq hf(e)$ (для u условия а) и б) уже выполнены, а т. к. $u \notin N^e_{t, n}$, то в) ложно). Рассмотрим $m < n$ такое, что $u \notin M^e_{t, m-1}$. Если $\alpha(m, t, e) \neq hf(e)$, то $u \in w^{(n)}_{\alpha(n, t, e)}$ и $\alpha(n, t, e) \neq \alpha(m, t, e)$. Если $\alpha(m, t, e) = hf(e)$, то $\alpha(\hat{n}, t, e) \neq \alpha(m, t, e)$. В любом случае $(\exists \hat{m} < m)\, (u \leqslant \max w^{(\hat{m})}_{\alpha(\hat{m}, t, e)} \,\&\, \alpha(\hat{m}, t, e) \neq \alpha(m, t, e)$, так что в силу условия в) $u \notin N^e_{t, m}$ и, следовательно, $u \notin M^e_{t, m}$. По индукции $u \notin M^e_t$.

Случай 2. $u \notin w_{hf(e)}$. Выберем n такое, что $\alpha(n, t, e) = hf(e)$ и $\max w^{(n)}_{\alpha(n, t, e)} \geqslant u$. Это возможно по выбору t_0 и по тому, что $w_{hf(e)}$ бесконечно. Покажем, что $u \in M^e_t \leftrightarrow u \in M^e_{t, n}$. Ясно, что $u \in M^e_{t, n} \rightarrow u \in M^e_t$. Теперь пусть $u \notin M^e_{t, n}$. Рассмотрим $m > n$ такое, что $u \notin M^e_{t, m-1}$. Если $\alpha(m, t, e) \neq hf(e)$, тогда $u \leqslant \max w^{(n)}_{\alpha(n, t, e)}$ и $\alpha(n, t, e) \neq \alpha(m, t, e)$. Поэтому, по в) $u \notin N^e_{t, m}$ и, следовательно, $u \notin M^e_{t, m}$. Но если $\alpha(m, t, e) = hf(e)$, то $u \notin w^{(m)}_{\alpha(m, t, e)}$, так что по а) $u \notin N^e_{t, m}$ и, следовательно, $u \notin M^e_{t, m}$. По индукции $u \notin M^e_t$. Лемма доказана.

Лемма 6. $M^e \leqslant_T w_{hf(e)}$.

Доказательство. Так как $M^e = \bigoplus_t M^e_t$, то это следует из лемм 4 и 5.

Из лемм 2 и 6 теперь следует, что $M^e =_T w_{hf(e)} =_T w_{f(e)}$. Ясно по конструкции, что существует общерекурсивная функция g такая, что $\forall e\, (w_{g(e)} = M^e)$. Теперь, применяя к функции g теорему о неподвижной точке, получим $\exists e\, (w_e = w_{g(e)} =_T w_{f(e)})$, что и требовалась доказать.

Так как $\{x \mid w_x$ рекурсивно$\} =_T 0^{(3)}$, то существует функция степени $0^{(3)}$ без T-неподвижных точек. По обобщенной теореме о рекурсии из предыдущей теоремы вытекает

Теорема 9. *Любая функция, общерекурсивная относительно некоторой n-слабо рекурсивно перечислимой относительно* $0''$ *степени, меньшей* $0^{(3)}$, *имеет T-неподвижную точку.*

Отсюда, как и в предыдущих случаях, мы получим следующее утверждение.

Теорема 10 (критерий полноты рекурсивно перечислимых относительно $0''$ множеств). *Рекурсивно перечислимое относительно $0''$ множество A $0^{(3)}$-полно тогда и только тогда, когда существует общерекурсивная относительно A функция без T-неподвижных точек.*

Замечание. Очевидно, в теореме 8 неподвижная точка функции f находится эффективно по номеру функции f в нумерации $\varphi_0^{0''}$, $\varphi_1^{0''}$, ...

В заключение рассмотрим wtt-сводимость. По определению [5] $A \leqslant_{wtt} B$, если существует такая одноместная общерекурсивная функция f и такое натуральное число n, что $A = \varphi_n^B$ (т. е. $A \leqslant_T B$) и для любых x при вычислении $\varphi_n^B(x)$ спрашивается только об элементах B, меньших или равных $f(x)$. Ясно, что $\leqslant_{wtt} \rightarrow \leqslant_T$. Обратное неверно даже на рекурсивно перечислимых множествах [5].

Если в доказательстве теоремы 1 предположить, что заданная функция f без неподвижных точек не только T-сводится к A, но к нему сводится и wtt, то в результате, вместо $K \leqslant_T A$, получим $K \leqslant_{wtt} A$. Действительно, пусть $f \leqslant_{wtt} A$. Тогда определенная в ходе доказательства теоремы 1 функция g общерекурсивна и, следовательно, общерекурсивна функция gh. Так как при вычислении $r(x)$ (определение см. там же) оракулу A задаются только вопросы $\leqslant gh(x)$, то $r \leqslant_{wtt} A$. Отсюда, т. к. $x \in K \leftrightarrow x \in K^{(r(x))}$, $K \leqslant_{wtt} A$. Обратно, если A wtt-полно, то $\{x \mid w_x = \varnothing\} \equiv_{wtt} A$. Пусть по определению

$$w_{f(x)} = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } 0 \in w_x; \\ \{0\}, & \text{если } 0 \notin w_x. \end{cases}$$

Ясно, что $f \leqslant_{wtt} A$ и $\forall x (w_x \neq w_{f(x)})$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 11 (критерий wtt-полноты рекурсивно перечислимых множеств). *Рекурсивно перечислимое множество A wtt-полно тогда и только тогда, когда существует такая функция $f \leqslant_{wtt} A$, что $w_x \neq w_{f(x)}$ для всех x.*

Покажем, что эта теорема может быть использована для доказательства wtt-полноты классов рекурсивно перечислимых множеств. Сначала приведем необходимое определение.

Рекурсивно перечислимое множество с бесконечным дополнением называется эффективно простым (Р. Шмульян [6]), если существует такая общерекурсивная функция a, что $\forall x (w_x \subset N - A \rightarrow |w_x| \leqslant a(x))$, здесь $|w_x|$ означает мощность множества w_x. Д. Мартин [7] доказал, что каждое эффективно простое множество T-полно. Мы покажем, что каждое эффективно простое не гиперпростое множество wtt-полно (известно, что гиперпростые множества не могут быть wtt-полными).

Действительно, пусть S эффективно просто с общерекурсивной функцией a и $F_0, F_1, \ldots$ — сильная таблица, нарушающая гиперпростоту множества S (т. е. $F_x \cap \bar{S} \neq \varnothing$ для всех x). Определим общерекурсивную функцию h следующим образом: $w_{h(x)} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{a(x)}\}$, где $a_0 < a_1 < \ldots$ — прямой пересчет дополнения S. Так как S эффективно просто, то $w_{h(x)} \neq w_x$ для всех $x \in N$. $h \leqslant_{wtt} S$, т. к. в силу негиперпростоты S $a_x \leqslant \max(\bigcup F_i \mid i \leqslant x)$ и в качестве общерекурсивной функции, участвующей в определении wtt-сводимости, можно взять функцию $f(x) = \max(\bigcup F_i \mid i \leqslant a(x))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсланов М. М. Об одной иерархии степеней неразрешимости.—В сб.: Вероятностные методы и кибернетика. Казань, 1980, вып. 18, с. 10—18.

2. Арсланов М. М. Слабо рекурсивно перечислимые степени и предельная вычислимость.— В сб.: Вероятностные методы и кибернетика. Казань, 1979, вып. 15, с. 3—9.

3. Арсланов М. М., Надыров Р. Ф., Соловьев В. Д. Критерий полноты рекурсивно перечислимых множеств и некоторые обобщения теоремы о неподвижной точке. — Изв. вузов. Матем., 1977, № 4, с. 3—7.

4. Арсланов М. М. О T-неподвижных точках функции.— V Всесоюзн. конф. по матем. логике. Тезисы докл. Новосибирск, 1979, с. 6.

5. Friedberg R. M., Rogers H. Jr. Reducibility and completenness for sets of integers.— Z. math. Logik und Grundl. Math., 1959, Bd. 5, № 2, S. 117—125.

6. Smullyan R. M. Effectively simple sets.—Proc. Amer. Math. Soc., 1964, v. 15, № 6, p. 893—895.

7. Martin D. A. Completeness, the recursion, and effectiviely simple sets.— Proc. Amer. Math. Soc., 1966, v. 17, № 4, p. 838—842.

г. Казань

Поступила
18 XII 1980