К. М. Чудинов, О двойственности частичной и условной устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений, *Изв. вузов. Матем.*, 2006, номер 5, 73–82

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 5 (528)

УДК 517.929

К.М. ЧУДИНОВ

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ЧАСТИЧНОЙ И УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной статье раскрываются некоторые возможности, которые предоставляет для исследования асимптотических свойств решений линейных дифференциальных уравнений использование матрицы Коши. В этом мы следуем традициям монографий [1] и [2], где матрица Коши является основным объектом при исследовании устойчивости.

Обобщения классического понятия устойчивости решений уравнения: устойчивость по части переменных (или частичная устойчивость) и условная устойчивость ранее исследовались независимо. В данной работе выявляется связь между этими понятиями.

Первая часть статьи представляет собой развитие основных идей работы [3]. Показано, что для уравнений с постоянной матрицей и запаздыванием весьма общего вида взаимосвязь частичной и условной устойчивости имеет особенно простое выражение. Исследование каждого из этих видов устойчивости сводится к исследованию классической устойчивости уравнения того же вида. Доказаны теоремы о связи частичной и условной устойчивости относительно начальных данных с устойчивостью относительно правой части.

Во второй части вводится свойство, являющееся с позиций единого рассмотрения частичной и условной устойчивостей естественным обобщением обоих этих свойств. Для уравнений с постоянной матрицей и ограниченным запаздыванием изучение этого вида устойчивости также сводится к изучению классической устойчивости.

Используются следующие обозначения: $\mathbf{R}_s = [s, +\infty)$, $\Delta = \{(t,s) \in \mathbf{R}_0^2 : t \geq s\}$, $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{C}^{n\times n}$ — линейные пространства комплексных матриц размера соответственно $n \times 1$ и $n \times n$, $|\cdot|$ — согласованные нормы в $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{C}^{n\times n}$, I — единичная матрица и тождественное преобразование линейного пространства, $X^\top$ — транспонированная матрица X.

Если $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ — линейные подпространства некоторого пространства, то через $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ обозначается сумма $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$, т. е. минимальное подпространство, содержащее все элементы $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$. Для обозначения суммы нескольких подпространств используется символ $\sum$.

1. Частичная и условная устойчивость

Объектом исследования является уравнение

$$\dot{x}(t) - A(Rx)(t) = f(t), \tag{1}$$

где $t \in \mathbf{R}_0$, $x(t) \in \mathbf{C}^n$, $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, оператор R действует из пространства локально (на каждом конечном отрезке) абсолютно непрерывных функций в пространство локально суммируемых функций и представи́м в виде

$$(Rx)(t) = \int_0^t x(s)\, d_s r(t,s).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант РФФИ-Урал № 04-01-96069.

Здесь $r(t,s):\Delta\to\mathbf{C}$ — скалярная функция двух переменных, при фиксированном t имеющая ограниченную вариацию по s, при фиксированном s локально суммируемая по t; функция $\rho(t)=\bigvee_{s=0}^{t} r(t,s)$ локально суммируема. Решением уравнения считается локально абсолютно непрерывная функция $x:\mathbf{R}_0\to\mathbf{C}^n$, удовлетворяющая (1) почти всюду.

Зафиксируем произвольное число $s\in\mathbf{R}_0$ и положим

$$(R_s x)(t)=\int_s^t x(u)\,d_u r(t,u)$$

для любого $t\in\mathbf{R}_s$. В ([2], § 1.2) показано, что заданное на полуоси $\mathbf{R}_s$ уравнение

$$\dot{x}-AR_s x=0 \tag{2}$$

в сформулированных предположениях однозначно разрешимо при задании начального условия $x(s)=x_s$.

Определение 1. *Матрицей Коши* уравнения (1) будем называть такую матрицу-функцию двух переменных $C:\Delta^2\to\mathbf{C}^{n\times n}$, что при любом фиксированном $s\in\mathbf{R}_0$ столбцы заданной на множестве $\mathbf{R}_s$ матрицы-функции $C(t,s)$ от t являются решениями уравнения (2), определяемыми начальным условием $C(s,s)=I$.

Решение уравнения (1) записывается в виде ([2], с. 31)

$$x(t)=C(t,0)x(0)+\int_0^t C(t,s)f(s)\,ds. \tag{3}$$

Таким образом, $C(\cdot,s)$ является фундаментальной матрицей решений однородного уравнения (2). Формулу (3) будем называть *формулой Коши*.

Из определения матрицы Коши вытекает, что если $x(t)$ — решение уравнения (2), то для любого $t\geq s$ имеем

$$x(t)=C(t,s)x(s). \tag{4}$$

В терминах матрицы Коши легко переписываются традиционные определения устойчивости решений уравнения (1).

Определение 2. Уравнение (1) называется *равномерно устойчивым*, если $\sup\limits_{(t,s)\in\Delta}|C(t,s)|<\infty$; *равномерно асимптотически устойчивым*, если для любого $s\in\mathbf{R}_0$ $|C(t,s)|\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно относительно s; *равномерно экспоненциально устойчивым*, если существуют такие $N>0$ и $\gamma>0$, что $|C(t,s)|\leq Ne^{-\gamma(t-s)}$.

Устойчивость в смысле данного определения будем называть классической.

Ниже использование термина “устойчивость” без уточнения вида означает, что формулируемое утверждение в равной степени относится к любому из видов, указанных в определении 2.

Устойчивость по части переменных или *частичная устойчивость* есть по сути устойчивость проекций решений уравнения на некоторое подпространство фазового пространства [3]. Этой разновидности устойчивости, определенной еще А.М. Ляпуновым и исследовавшейся с середины XX столетия, к настоящему моменту посвящено немало работ (см. монографии [4] и [5] и библиографию к ним). С другой стороны, исследовалась непрерывная зависимость решений относительно начальных данных, изменение которых возможно только в рамках некоторого *устойчивого многообразия* фазового пространства уравнения. Это свойство получило название *условной устойчивости* ([6], с. 318). Использование матрицы Коши вскрывает тесную взаимосвязь этих понятий.

Пусть задано подпространство $\mathbf{S}$ фазового пространства $\mathbf{C}^n$ уравнения (1).

Определение 3. Уравнение (1) будем называть *α-устойчивым по подпространству* $\mathbf{S}$, если при любом $\alpha \in \mathbf{S}$ имеет место соответствующая оценка (см. определение 2) нормы строки $\alpha^\top C(t,s)$.

Определение 4. Уравнение (1) будем называть *β-устойчивым по подпространству* $\mathbf{S}$, если при любом $\beta \in \mathbf{S}$ имеет место соответствующая оценка столбца $C(t,s)\beta$.

Нетрудно заметить, что α-устойчивость есть устойчивость по компонентам, задающим базис подпространства $\mathbf{S}$, β-устойчивость — условная устойчивость с устойчивым многообразием $\mathbf{S}$.

Следующее свойство уравнения (1) является основополагающим для всех выводимых в этом разделе статьи результатов.

Лемма 1. *Матрица Коши $C(t,s)$ уравнения* (1) *перестановочна с матрицей A, т. е. $C(t,s)A = AC(t,s)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $s \in \mathbf{R}_0$. Если $x : \mathbf{R}_s \to \mathbf{C}^n$ — решение уравнения (2), то $y(t) = Ax(t)$ — также решение этого уравнения. Согласно (4) при любом $t \geq s$, с одной стороны, $y(t) = Ax(t) = AC(t,s)x(s)$, с другой, $y(t) = C(t,s)y(s) = C(t,s)Ax(s)$, откуда в силу произвольности $s \in \mathbf{R}_0$ и $x(s) \in \mathbf{C}^n$ следует $C(t,s)A = AC(t,s)$. $\square$

Раскроем простое соотношение между свойствами частичной и условной устойчивости уравнения (1). Назовем уравнение

$$\dot{x} - A^\top Rx = f, \tag{5}$$

двойственным уравнению (1).

Лемма 2. *Если $C(t,s)$ — матрица Коши уравнения* (1), *то матрицей Коши уравнения* (5) *является $C^\top(t,s)$.*

Доказательство. Рассмотрим $C(t,s)$ и $C^\top(t,s)$ как функции от t при фиксированном s. Имеем $\frac{\partial C}{\partial t} = AR_sC$. Используя лемму 1, получаем $\frac{\partial C^\top}{\partial t} = (R_sC)^\top A^\top = R_s(C^\top A^\top) = R_sA^\top C^\top = A^\top R_sC^\top$. $\square$

Очевидным следствием доказанного утверждения является

Теорема 1. *Уравнение* (1) *α-устойчиво по подпространству $\mathbf{S}$ тогда и только тогда, когда двойственное уравнение* (5) *β-устойчиво по подпространству $\mathbf{S}$.*

Покажем, каким образом вопрос обладания уравнением вида (1) α- и β-устойчивостью по заданному подпространству сводится к вопросу о классической устойчивости уравнения того же вида.

Пусть подпространство $\mathbf{S}$ размерности d задано своим базисом $\{e_k\}_{k=1}^d$. Рассмотрим подпространство $\mathbf{S}_\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n-d} (A^\top)^k \mathbf{S}$.

Лемма 3. *Уравнение* (1) *α-устойчиво по $\mathbf{S}$ тогда и только тогда, когда оно α-устойчиво по $\mathbf{S}_\alpha$.*

Доказательство. Используя лемму 1, получаем

$$|\alpha^\top AC(t,s)| = |\alpha^\top C(t,s)A| \leq |\alpha^\top C(t,s)|\,|A|.$$

Значит, α-устойчивость по подпространству $\mathbf{S}$ влечет α-устойчивость по подпространству $A^\top\mathbf{S}$. Очевидно, устойчивость по двум подпространствам влечет устойчивость по их сумме. Значит, в соответствии с определением $\mathbf{S}_\alpha$, α-устойчивость по подпространству $\mathbf{S}$ влечет α-устойчивость по подпространству $\mathbf{S}_\alpha$. Обратное очевидно. $\square$

Лемма 4. *Подпространство $\mathbf{S}_\alpha$ инвариантно относительно преобразования $A^\top$, т. е. $A^\top\mathbf{S}_\alpha \subseteq \mathbf{S}_\alpha$.*

Доказательство. Если лемма не верна, то для любого $k \in \{0, 1, \dots, n-d-1\}$ имеет место соотношение $\dim\big((A^\top)^k\mathbf{S}\big) < \dim\big((A^k)^\top\mathbf{S} + (A^\top)^{k+1}\mathbf{S}\big)$. Но тогда $\dim\mathbf{S}_\alpha - \dim\mathbf{S} > n-d$, что невозможно. $\square$

Обозначим $d_\alpha = \dim\mathbf{S}_\alpha$. Построим новый базис фазового пространства: дополним базис $\{e_k\}_{k=1}^{d}$ до базиса $\{e_k\}_{k=1}^{d_\alpha}$ пространства $\mathbf{S}_\alpha$ и затем до базиса $E = \{e_k\}_{k=1}^{n}$ пространства $\mathbf{C}^n$.

Матрица из n столбцов $e_1, \dots, e_n$ является матрицей перехода от базиса E к исходному базису пространства $\mathbf{C}^n$ (состоящему из столбцов единичной матрицы). В соответствии с леммой 4 матрица A при переходе к базису F, где α-устойчивость по $\mathbf{S}_\alpha$ является устойчивостью первых d_α компонент решений, переходит в матрицу $T^\top A(T^{-1})^\top = B = \left(\begin{smallmatrix} U & 0 \\ V & W \end{smallmatrix}\right)$, где $U \in \mathbf{C}^{d_\alpha \times d_\alpha}$.

Теорема 2. *Уравнение* (1) *α-устойчиво по подпространству* $\mathbf{S}$ *тогда и только тогда, когда устойчиво уравнение*

$$\dot{\xi} - UR\xi = 0. \tag{6}$$

Доказательство. В базисе F однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), имеет вид

$$\dot{y} - BRy = 0. \tag{7}$$

Вектор-функция $\xi(t) = \big(y_1(t), y_2(t), \dots, y_{d_\alpha}(t)\big)$ является решением уравнения (6) тогда и только тогда, когда существует решение уравнения (7) вида $y(t) = \big(y_1(t), y_2(t), ..., y_{d_\alpha}(t), y_{d_\alpha+1}(t), ..., u_n(t)\big)$. Таким образом, устойчивость первых d_α компонент решений уравнения (7) равносильна устойчивости всех компонент решений уравнения (6). $\square$

Сопоставляя полученный результат с теоремой 1, получаем двойственный результат.

Теорема 3. *Уравнение* (5) *β-устойчиво по подпространству* $\mathbf{S}$ *тогда и только тогда, когда устойчиво уравнение* (6).

В теории устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений одно из центральных мест занимают теоремы о связи устойчивостей относительно правой части и относительно начальных данных (теоремы Боля–Перрона). Покажем, как для уравнения (1) обобщаются некоторые результаты такого типа.

Зададим на пространстве локально суммируемых функций $f : \mathbf{R}_0 \to \mathbf{C}^n$ *оператор Коши* K равенством $(Kf)(t) = \int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds$.

Обозначим через $\mathbf{L}_p^n$, $1 \le p < \infty$, пространства суммируемых на $\mathbf{R}_0$ с p-й степенью вектор-функций $f : \mathbf{R}_0 \to \mathbf{C}^n$; через $\mathbf{L}_\infty^n$ — пространство ограниченных в существенном вектор-функций $f : \mathbf{R}_0 \to \mathbf{C}^n$.

Приведем в удобном для нас виде примененные к уравнению (1) результаты из ([2], § 3.3).

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение* (1) *было равномерно устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы* $Kf \in \mathbf{L}_\infty^n$ *при любом* $f \in \mathbf{L}_1^n$.

Теорема 5. *Пусть оператор* R *представи́м в виде*

$$(Rx)(t) = \int_{t-b}^{t} x(s)\,d_s r(t,s) \tag{8}$$

(*запаздывание ограничено*) *и* $\rho(t) = \bigvee\limits_{s=0}^{t} r(t,s)$ *есть функция ограниченной вариации. Тогда для того чтобы уравнение* (1) *было равномерно экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое* p, $1 < p \le \infty$, *что* $Kf \in \mathbf{L}_\infty^n$ *при любом* $f \in \mathbf{L}_p^n$.

Приведем два вида обобщения этих теорем для α- и β-устойчивости.

Обозначим через $\mathbf{L}_\infty$ пространство ограниченных в существенном скалярных функций $f : \mathbf{R}_0 \to \mathbf{C}$.

Лемма 5. *Пусть $f \in \mathbf{L}_p^n$, где $1 \le p \le \infty$. Тогда чтобы $\alpha^\top Kf \in \mathbf{L}_\infty$ при любых $\alpha \in \mathbf{S}$, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha^\top Kf \in \mathbf{L}_\infty$ при любых $\alpha \in \mathbf{S}_\alpha$.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $\alpha \in \mathbf{S}$ и $f \in \mathbf{L}_p^n$, то из $\alpha^\top Kf \in \mathbf{L}_\infty$ следует $\alpha^\top AKf \in \mathbf{L}_\infty$. Используя лемму 1, получаем

$$\alpha^\top A(Kf)(t) = \alpha^\top A \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds = \alpha^\top \int_0^t AC(t,s)f(s)\,ds =$$
$$= \alpha^\top \int_0^t C(t,s)Af(s)\,ds = \alpha^\top (K(Af))(t),$$

откуда $\alpha^\top AKf \in \mathbf{L}_\infty$, поскольку $Af \in \mathbf{L}_p^n$. $\square$

Сопоставляя теоремы 4 и 5 с теоремой 2 и леммой 5, получаем следующие утверждения.

Теорема 6. *Для того чтобы уравнение* (1) *было равномерно α-устойчивым по подпространству $\mathbf{S}$, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha^\top Kf \in \mathbf{L}_\infty$ при любых $\alpha \in \mathbf{S}$ и $f \in \mathbf{L}_1^n$.*

Теорема 7. *Пусть оператор R представи́м в виде* (8) *и вариация функции ρ ограничена. Тогда для того чтобы уравнение* (1) *было равномерно экспоненциально α-устойчивым по подпространству $\mathbf{S}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое p, $1 < p \le \infty$, что $\alpha^\top Kf \in \mathbf{L}_\infty$ при любых $\alpha \in \mathbf{S}$ и $f \in \mathbf{L}_p^n$.*

Зададим оператор K', *двойственный* оператору Коши, равенством $(K'f)(t) = \int\limits_0^t C^\top(t,s)f(s)ds$. Обозначим через $\mathbf{L}_p^{(\mathbf{T})}$, где $1 \le p \le \infty$ и $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{C}^n$, пространства таких вектор-функций $f \in \mathbf{L}_p^n$, что $f(t) \in \mathbf{T}$.

Лемма 6. *Из $f \in \mathbf{L}_p^{(\mathbf{S})}$ следует $K'f \in \mathbf{L}_\infty^n$ тогда и только тогда, когда из $f \in \mathbf{L}_p^{(\mathbf{S}_\alpha)}$ следует $K'f \in \mathbf{L}_\infty^n$.*

Доказательство. Если $f \in \mathbf{L}_p^{(\mathbf{S}_\alpha)}$, то $e_k^\top f \in \mathbf{L}_p$. Значит, всякую функцию $f \in \mathbf{L}_p^{(\mathbf{S}_\alpha)}$ можно представить в виде $f = \sum\limits_{k=0}^{n-d} f_k$, где $f_k \in \mathbf{L}_p^{\left((A^\top)^k\mathbf{S}\right)}$. Таким образом, достаточно показать, что из $K' : \mathbf{L}_p^{(\mathbf{S})} \to \mathbf{L}_\infty^n$ следует $K' : \mathbf{L}_p^{(A^\top\mathbf{S})} \to \mathbf{L}_\infty^n$. Пусть $K' : \mathbf{L}_p^{(\mathbf{S})} \to \mathbf{L}_\infty^n$. Если $f \in \mathbf{L}_p^{(A^\top\mathbf{S})}$, то существует такая функция $g \in \mathbf{L}_p^{(\mathbf{S})}$, что $f = A^\top g$. Имеем $(K'f)(t) = \int\limits_0^t C^\top(t,s)f(s)\,ds = \int\limits_0^t C^\top(t,s)A^\top g(s)\,ds = A^\top \int\limits_0^t C^\top(t,s)g(s)\,ds = A^\top(K'g)(t)$, откуда $(K'f) \in \mathbf{L}_\infty^n$. $\square$

Доказанное утверждение при сопоставлении с теоремой 2 дает другой вариант обобщения теорем 4 и 5.

Теорема 8. *Для того чтобы уравнение* (1) *было равномерно α-устойчиво по подпространству $\mathbf{S}$, необходимо и достаточно, чтобы $K'f \in \mathbf{L}_\infty^n$ при любом $f \in \mathbf{L}_1^{(\mathbf{S})}$.*

Теорема 9. *Пусть оператор R представи́м в виде* (8) *и вариация функции ρ ограничена. Тогда для того чтобы уравнение* (1) *было экспоненциально α-устойчиво по подпространству $\mathbf{S}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое p, $1 < p \le \infty$, что $K'f \in \mathbf{L}_\infty^n$ при любом $f \in \mathbf{L}_p^{(\mathbf{S})}$.*

Аналогичные теоремам 6–9 результаты для β-устойчивости получаются из теорем 4 и 5 с помощью теоремы 3.

2. α-β-устойчивость

В первом разделе были рассмотрены α- и β-устойчивости, определяемые оценками соответственно на линейные комбинации строк и столбцов матрицы Коши. Ниже рассмотрим устойчивость, включающую α- и β-устойчивости как частные случаи и являющуюся, по сути, устойчивостью проекций решений на определенное подпространство относительно начальных данных из другого определенного подпространства.

Для уравнений с постоянной матрицей удалось свести вопрос об экспоненциальной устойчивости рассматриваемого ниже общего вида к вопросу о классической устойчивости. Платой за это является некоторое сужение класса запаздываний.

Оператор запаздывания будем считать представимым в виде

$$(Rx)(t) = \int_{t-g(t)}^{t-h(t)} x(s)\,ds,$$

где функции $g, h : \mathbf{R}_0 \to [0, b]$ измеримы и $g(t) \geq h(t)$; $x(u) = 0$ при $u < 0$.

Матрицу Коши уравнения (1) доопределим нулем на множестве $\mathbf{R}_0^2 \setminus \Delta$.

Лемма 7. *Матрица Коши уравнения*

$$\dot{x}(t) - J(Rx)(t) = 0, \tag{9}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

— жорданова клетка размера $n \times n$, имеет треугольный вид

$$C(t,s) = \begin{pmatrix} c_1(t,s) & c_2(t,s) & \dots & c_{n-1}(t,s) & c_n(t,s) \\ & c_1(t,s) & \dots & c_{n-2}(t,s) & c_{n-1}(t,s) \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & c_1(t,s) & c_2(t,s) \\ & & & & c_1(t,s) \end{pmatrix},$$

$c_k(t,s)$ — скалярные функции двух переменных, связанные соотношениями

$$c_k(t,s) = \int_s^t c_1(t,u) \int_{u-g(u)}^{u-h(u)} c_{k-1}(v,s)\,dv\,du, \quad 2 \leq k \leq n. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим элемент матрицы Коши, находящийся в i-й строке и j-м столбце, через $c_{i,j}(t,s)$. Зафиксируем $s \in \mathbf{R}_0$ и рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - J(R_s x)(t) = 0, \tag{11}$$

где $(R_s x)(t) = \int\limits_{t-g(t)}^{t-h(t)} x(u)\,du$, $x(u) = 0$ при $u < s$. Пусть $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$ — некоторое решение уравнения (11). В силу формулы (4)

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}(t,s) x_j(s). \tag{12}$$

Так как $x_n(t) = c_{n,n}(t,s)x_n(s)$ и $\dot{x}_n(t) - \lambda(R_s x_n)(t) = 0$, то $c_{n,n}(t,s)$ — функция Коши скалярного уравнения

$$\dot{y}(t) - \lambda(R_s y)(t) = f(t). \tag{13}$$

Из (12) с учетом того, что $c_{i,j}(t,s)=0$ при $t<s$, получаем

$$(R_s x_{i+1})(t)=\int_{t-g(t)}^{t-h(t)}\sum_{j=1}^{n}c_{i+1,j}(u,s)x_j(s)\,du.$$

В силу единственности решения уравнения (13), формулы Коши (3) и соотношения $\dot{x}_i(t)-\lambda(R_s x_i)(t)=(R_s x_{i+1})(t)$ при $t\geq s$ имеем

$$x_i(t)=c_{n,n}(t,s)x_i(s)+\int_s^t c_{n,n}(t,u)(Rx_{i+1})(u)\,du=$$
$$=c_{n,n}(t,s)x_i(s)+\int_s^t c_{n,n}(t,u)\int_{u-g(u)}^{u-h(u)}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{i+1,j}(v,s)x_j(s)\right]dv\,du=$$
$$=c_{n,n}(t,s)x_i(s)+\sum_{j=1}^{n}\left[\int_s^t c_{n,n}(t,u)\int_{u-g(u)}^{u-h(u)}c_{i+1,j}(v,s)\,dv\,du\,x_j(s)\right].$$

Сопоставляя полученное выражение с (12), получаем $c_{i,i}(t,s)=c_{n,n}(t,s)$, $c_{i,j}=0$ при $j\in\{1,2,\dots,i-1\}$ и $c_{i,j}(t,s)=\int\limits_s^t c_{n,n}(t,u)\int\limits_{u-g(u)}^{u-h(u)}c_{i+1,j}(v,s)\,dv\,du$ при $j\in\{i+1,\dots,n\}$. Отсюда, вводя обозначения $c_1(t,s)=c_{n,n}(t,s)$ и (10), получаем требуемый вид матрицы Коши. □

Лемма 8. *Если найдутся такие $m\in\{1,2,\dots,n\}$ и $N_m,\gamma_m>0$, что $|c_m(t,s)|\leq N_m e^{-\gamma_m(t-s)}$ при всех $(t,s)\in\Delta$, то для каждого $k\in\{1,2,\dots,n\}$ найдутся такие $N_k,\gamma_k>0$, что $|c_k(t,s)|\leq N_k e^{-\gamma_k(t-s)}$.*

Доказательство. Сначала покажем, что если $|c_1(t,s)|\leq N_1 e^{-\gamma_1(t-s)}$ и $|c_m(t,s)|\leq N_m e^{-\gamma_m(t-s)}$, где $1\leq m\leq n-1$ и $N_1,\gamma_1,N_m,\gamma_m>0$, то существуют такие $N_{m+1},\gamma_{m+1}>0$, что $|c_{m+1}(t,s)|\leq N_{m+1}e^{-\gamma_{m+1}(t-s)}$. Имеем

$$|c_{m+1}(t,s)|\leq\int_s^t|c_1(t,u)|\int_{u-g(u)}^{u-h(u)}|c_m(v,s)|\,dv\,du\leq$$
$$\leq N_1N_m e^{-\gamma_1 t+\gamma_m s}\int_s^t e^{\gamma_1 u}\int_{u-g(u)}^{u-h(u)}e^{-\gamma_m v}dv\,du\leq$$
$$\leq N_1N_m e^{-\gamma_1 t+\gamma_m s}\int_s^t e^{\gamma_1 u+\gamma_m g(u)-\gamma_m u}(g(u)-h(u))\,du\leq$$
$$\leq N_1N_m e^{-\gamma_1 t+\gamma_m s}be^{\gamma_m b}\,\frac{e^{(\gamma_1-\gamma_m)t}-e^{(\gamma_1-\gamma_m)s}}{\gamma_1-\gamma_m}=$$
$$=N_{m+1}\left|e^{-\gamma_m(t-s)}-e^{-\gamma_1(t-s)}\right|\leq N_{m+1}e^{\gamma_{m+1}(t-s)}.$$

Теперь покажем, что если $|c_m(t,s)|\leq N_m e^{-\gamma_m(t-s)}$, где $2\leq m\leq n$, то $|c_{m-1}(t,s)|\leq N_{m-1}e^{-\gamma_{m-1}(t-s)}$. Достаточно показать, что для любого решения $x(t)$ уравнения (11) из оценки $|x_1(t)|\leq N_1 e^{-\gamma_1(t-s)}$ следует $|x_2(t)|\leq N_2 e^{-\gamma_2(t-s)}$. Действительно, при начальном условии $x(s)=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, где $x_m(s)=1$, имеем $x_1(t)=c_m(t,s)x_m(s)=c_m(t,s)$ и $x_2(t)=c_{m-1}(t,s)$.

Положим $y_1=\lambda^{n-1}x_1$, $y_2=\lambda^{n-2}x_2,\dots,y_n=x_n$. Имеем (далее пишем $\mathbf{R}$ вместо $\mathbf{R}_s$)

$$\begin{aligned}
&\lambda Ry_1=\dot{y}_1-\dot{y}_2+\dot{y}_3-\dots+(-1)^{n-1}y_n,\\
&\lambda Ry_2=\dot{y}_2-\dot{y}_3+\dot{y}_4-\dots+(-1)^{n-2}y_n,\\
&\quad\vdots\\
&\lambda Ry_n=\dot{y}_n.
\end{aligned}$$

Через $p_k(y)$ и $q_k(y)$, $k=\overline{1,n}$, будем обозначать линейные комбинации скалярных функций $y_i(t)$, через $p_k(\dot y)$ и $q_k(\dot y)$ — аналогичные (с теми же коэффициентами) линейные комбинации функций $\dot y_i(t)$.

Положим $p_1(y)=y_1$ и $q_1(\dot y)=\lambda R p_1(y)=\dot y_1-\dot y_2+\dots+(-1)^{n-1}\dot y_n$. Отсюда $q_1(y)=y_1-y_2+\dots+(-1)^{n-1}y_n$. Далее положим

$$p_k(y)=p_{k-1}(y)-q_{k-1}(y),\quad q_k(\dot y)=\lambda R p_k(y),\quad k=\overline{2,n}.$$

По индукции нетрудно доказать, что линейные коэффициенты при y_i комбинаций $p_k(y)$ и $q_k(y)$ равны 0, если $i<k$, и равны 1, если $i=k$. Таким образом, $p_n(y)=q_n(y)=y_n$.

Обозначим через Γ множество всех таких заданных на $\mathbf{R}_s$ скалярных функций $f(t)$, для которых найдутся такие положительные N и γ, что $|f(t)|\le Ne^{-\gamma(t-s)}$. Дальнейшие рассуждения опираются на два простых факта: 1) если $f\in\Gamma$, то $Rf\in\Gamma$, 2) если $p(t)$ — многочлен k-степени и $(f-p)\in\Gamma$, то существует многочлен $P(t)$ $(k+1)$-й степени такой, что $(f-P)\in\Gamma$.

Итак, пусть $x_1\in\Gamma$. Требуется доказать, что $x_2\in\Gamma$. Содержателен случай $\lambda\ne0$. Так как $p_1(y)=y_1=x_1$, то $p_1(y)\in\Gamma$. Значит, $q_1(\dot y)=\lambda R p_1(y)\in\Gamma$, откуда $(q_1(y)-\mu)\in\Gamma$ и $(p_2(y)-\mu)\in\Gamma$, где $\mu\in\mathbf{C}$. Если $\mu=0$, то переходим к аналогичной системе порядка на 1 меньше. Пусть $\mu\ne0$. Имеем $(q_2(\dot y)-\lambda\mu)\in\Gamma$. Значит, $q_2(y(t))$ при $t\to\infty$ есть бесконечно большая функция первого порядка относительно t. Тот же порядок роста имеют $p_3(y(t))$ и $q_3(\dot y(t))$. Следовательно, функция $q_3(y(t))$ есть бесконечно большая второго порядка относительно t. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что функции $q_n(y(t))$ и $p_n(y(t))$ (обе равные $y_n(t)$) являются бесконечно большими разного порядка относительно t. Значит, случай $\mu\ne0$ невозможен. Таким образом, $p_k(y)\in\Gamma$ при каждом $k\in\{1,2,\dots,n\}$, откуда $x_2\in\Gamma$. □

Заметим, что леммы 7 и 8 справедливы и для случая сосредоточенного запаздывания — доказательства проводятся без изменений.

Покажем, что требование ограниченности запаздывания в лемме 8 существенно, причем при неограниченном запаздывании нельзя делать, вообще говоря, ни одного из двух переходов: ни в сторону уменьшения номера k элемента $c_k(t,s)$, ни в сторону увеличения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $\dot x(t)=Jx(h(t))$, где

$$J=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad h(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,1];\\ 1, & t\in(1,2];\\ \frac12, & t\in(2,\infty).\end{cases}$$

Фундаментальная матрица уравнения имеет вид $X(t)=\left(\begin{smallmatrix}x_1(t) & x_2(t)\\ 0 & x_1(t)\end{smallmatrix}\right)$. Нетрудно построить решение с начальными данными $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$:

$$x_2(t)=\begin{cases}1-t, & t\in[0,1];\\ 0, & t\in(1,2];\\ 1-\frac{t}{2}, & t\in(2,\infty),\end{cases}\qquad x_1(t)=\begin{cases}t, & t\in[0,1];\\ 2-t, & t\in(1,2];\\ 0, & t\in(2,\infty).\end{cases}$$

Видим, что $|x_2(t)|\to\infty$ при $t\to\infty$, хотя $|x_1(t)|=0$ при $t>2$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $\dot x(t)=Jx(h(t))$, где

$$J=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad h(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,1];\\ 1, & t\in(1,\infty).\end{cases}$$

Имеем $x_2(t)=0$ при $t\ge1$, $\dot x_1(t)=x_1(1)\ne0$ при $t\ge1$. Таким образом, $x_1(t)\to\infty$ и $x_2(t)\to0$ при $t\to\infty$.

Итак, в случае неограниченного запаздывания экспоненциальная оценка элемента матрицы Коши не влечет, вообще говоря, аналогичную оценку элементов, находящихся как ближе к главной диагонали, так и дальше от нее.

Таким образом, запаздывание рассматриваемого вида замечательно тем, что наличие экспоненциальной оценки одного элемента матрицы Коши влечет экспоненциальную оценку нормы подматрицы, отвечающей соответствующей жордановой клетке. Это свойство играет первостепенную роль в исследовании определяемой ниже разновидности устойчивости.

Пусть заданы подпространства $\mathbf{L}, \mathbf{R} \in \mathbf{C}^n$.

Определение 5. Уравнение (1) будем называть $(\mathbf{L}, \mathbf{R})$-*устойчивым*, если при любых $\alpha \in \mathbf{L}$ и $\beta \in \mathbf{R}$ имеет место соответствующая оценка $|\alpha^\top C(t,s)\beta|$.

Положим $\mathbf{L}_\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} (A^\top)^k \mathbf{L}$, $\quad \mathbf{R}_\beta = \sum\limits_{k=0}^{n} A^k \mathbf{R}$, $\quad \mathbf{S}_{\alpha\beta} = \mathbf{L}_\alpha \cap \mathbf{R}_\beta$.

Лемма 9. *Уравнение* (1) $(\mathbf{L}, \mathbf{R})$-*устойчиво тогда и только тогда, когда оно* $(\mathbf{S}_{\alpha\beta}, \mathbf{S}_{\alpha\beta})$-*устойчиво.*

Доказательство. Перейдем в базис, где матрица A имеет жорданов вид. Поскольку корневые подпространства преобразования A инвариантны относительно преобразований A и $A^\top$, достаточно рассмотреть случай одной жордановой клетки.

Равносильность $(\mathbf{L}, \mathbf{R})$- и $(\mathbf{L}_\alpha, \mathbf{R}_\beta)$-устойчивости следует из леммы 8.

Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_n$ — жорданов базис: $Jh_1 = \lambda h_1$, $Jh_2 = \lambda h_2 + h_1, \ldots, Jh_n = \lambda h_n + h_{n-1}$. Обозначим через $\mathbf{S}(i,j)$, где $1 \le i \le j \le n$, линейную оболочку множества векторов $\{h_i, h_{i+1}, \ldots, h_j\}$. Из определений $\mathbf{L}_\alpha$ и $\mathbf{R}_\beta$ следует, что $\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{S}(l,n)$, где $l = \max\limits_{\mathbf{L} \subseteq \mathbf{S}(m,n)} m$, и $\mathbf{R}_\beta = \mathbf{S}(1,r)$, где $r = \min\limits_{\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}(1,m)} m$. Отсюда $\mathbf{S}_{\alpha\beta} = \mathbf{S}(l,r)$. Учитывая треугольный вид матрицы Коши (лемма 7), получаем: если $\alpha \in \mathbf{L}_\alpha$, $\beta \in \mathbf{R}_\beta$, но $\alpha \notin \mathbf{S}_{\alpha\beta}$ или $\beta \notin \mathbf{S}_{\alpha\beta}$, то $\alpha^\top C(t,s)\beta = 0$. Значит, $(\mathbf{L}_\alpha, \mathbf{R}_\beta)$-устойчивость равносильна $(\mathbf{S}_{\alpha\beta}, \mathbf{S}_{\alpha\beta})$-устойчивости. $\square$

Обозначим $d = \dim \mathbf{S}_{\alpha\beta}$. Дополним базис $\{e_k\}_{k=1}^d$ пространства $\mathbf{S}_{\alpha\beta}$ до базиса $E = \{e_k\}_{k=1}^n$ фазового пространства. Пусть T — $n \times n$-матрица, k-й столбец которой задается вектором e_k. Рассмотрим матрицу

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} P & U \\ V & Q \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где P — $d \times d$-матрица.

Теорема 10. *Уравнение* (1) $(\mathbf{L}, \mathbf{R})$-*устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво уравнение*

$$\dot{\xi} - PR\xi = 0. \tag{15}$$

Доказательство. Соответствующее уравнению (1) однородное уравнение в базисе E имеет вид $\dot{y} - BRy = 0$, где B имеет вид (14). Последнее уравнение $(S_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta})$-устойчиво тогда и только тогда, когда уравнение (15) устойчиво в классическом смысле. Остается применить лемму 9. $\square$

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость уравнений с обыкновенными производными.* – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. – 230 с.
3. Чудинов К.М. *Об устойчивости по подпространству решений линейных систем с переменным запаздыванием* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 4. – С. 51–56.

4. Воротников В.И. *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных.* – М.: Наука, 1991. – 288 с.
5. Воротников В.И., Румянцев В.В. *Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения.* – М.: Научный мир, 2001. – 320 с.
6. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 480 с.

Пермский государственный
технический университет

Поступила
25.03.2005