



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. L. Ershov, Decidability of the theory of the class of fields \mathfrak{F}_*^f , *Dokl. Akad. Nauk*, 1994, Volume 336, Number 6, 733–736

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

February 15, 2025, 20:44:33



УДК 518.5

РАЗРЕШИМОСТЬ ТЕОРИИ КЛАССА ПОЛЕЙ \mathfrak{F}_*^f

© 1994 г. Академик Ю. Л. Ершов

Поступило 18.02.94 г.

В настоящей работе подтверждается гипотеза, высказанная в работе автора [1], знакомство с которой предполагается.

Напомним (см. Г), [1], что через \mathfrak{F}_* обозначается класс всех полей F характеристики 0, которые удовлетворяют следующим условиям: существует элемент $\pi \in F$ такой, что:

- а) $\langle F, W_\pi \rangle \in RC_\pi$,
- б) Γ_R – Z-группа для любого $R \in W_\pi$,
- в) $\pi p^{-1} \in R(F) = R_\pi(F)$ для всех простых $p \in Z \leq \mathbb{Q} \leq F$,
- д) $\bar{R}(F) \cong R(F)/J(R(F))$ – элементарное регулярное кольцо (см. Г) [2].
- е) $\langle F, W_\pi \rangle$ максимально, т.е. не существует собственного сепарабельного алгебраического расширения $F_0 > F$ такого, что для любого $R \in W_\pi$ $F_0 \leq H_R(F)$.

В работе [1] дан критерий элементарной эквивалентности двух полей из \mathfrak{F}_* (теорема 3). Ниже мы дадим переформулировку этого критерия в терминах аксиоматизируемости полной теории поля из \mathfrak{F}_* .

Пусть $F \in \mathfrak{F}_*$ и π – соответствующий элемент. Пусть $F_0 \cong \text{Abs} F$ – алгебраическое замыкание \mathbb{Q} в F , $R_0 \cong R(F) \cap F_0$; $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in R_0$; $\beta_0, \dots, \beta_k \in F_0 \setminus R_0$; $\Phi(x_0, \dots, x_n)$ – формула сигнатуры σ_f такая, что

$$\begin{aligned} \bar{R}(F) &= R(F)/J(R(F)) \models \\ &\models \Phi(\alpha_0 + J(R(F)), \dots, \alpha_n + J(R(F))). \end{aligned}$$

Пусть K – конечное расширение Галуа поля \mathbb{Q} такое, что $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_k \in K$; $K_0 \cong K \cap F_0$; $h(x) \in Z[x]$ – унитарный неприводимый над \mathbb{Q} многочлен такой, что $K_0 = \mathbb{Q}(\alpha_h)$, где α_h – один из корней многочлена h . Если $K \neq K_0$, то пусть K_1, \dots, K_s – все минимальные промежуточные поля $K_0 < K_i \leq K$,

$i = 1, \dots, s$. Пусть $f_i \in Z[x]$ унитарный неприводимый, такой, что $K_i = \mathbb{Q}(\alpha_{f_i})$, $i = 1, \dots, s$; $f \cong \prod_{i=1}^s f_i$ (если $K = K_0$, то $f \cong 1$). Для элементов $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_k (\in K_0)$ существует многочлены $g_0, \dots, g_n, h_0, \dots, h_k \in \mathbb{Q}[x]$ степени меньшей, чем степень многочлена h , такие, что $\alpha_0 = g_0(\alpha_h), \dots, \alpha_n = g_n(\alpha_h)$; $\beta_0 = h_0(\alpha_h), \dots, \beta_k = h_k(\alpha_h)$. Полагаем

$$\begin{aligned} \Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi} &\cong \forall x (f(x) \neq 0) \wedge \\ &\wedge \exists x (h(x) = 0 \wedge \bigwedge_{i \leq n} cR(g_i(x)) \wedge \bigwedge_{i \leq k} \neg R(h_i(x)) \wedge \\ &\wedge \Phi^*(g_0(x), \dots, g_n(x)), \end{aligned}$$

где Φ^* связана с Φ так, что для любой пары $\langle F', R' \rangle$, где F' – поле частных кольца $R' \leq F'$, $a_0, \dots, a_n \in R'$, имеет место эквивалентность

$$\begin{aligned} \langle F', R' \rangle \models \Phi^*(a_0, \dots, a_n) &\Leftrightarrow a_0, \dots, a_n \in R' \wedge R'/J(R') \models \\ &\models \Phi(a_0 + J(R'), \dots, a_n + J(R')). \end{aligned}$$

Предложение 1. Элементарная теория поля F определяется следующей системой аксиом:

$$\text{Th}(\mathfrak{F}_*) \cup \{ \Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi} \mid F \models \Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi} \}.$$

Это, по существу, переформулировка теоремы 3 из [1].

Замечание. Если $F \models \Psi_{K^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\beta}^0, \Phi^0}$, $F \models \Psi_{K^1, \bar{\alpha}^1, \bar{\beta}^1, \Phi^1}$, то существуют $K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi$ такие, что $F \models \Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ и для любого $F' \in \mathfrak{F}_*$

$$F' \models \Psi_{K, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi} \rightarrow \Psi_{K^0, \bar{\alpha}^0, \bar{\beta}^0, \Phi^0} \wedge \Psi_{K^1, \bar{\alpha}^1, \bar{\beta}^1, \Phi^1}.$$

Действительно, если $K \cong K^0 K^1$; $\bar{\alpha} \cong \bar{\alpha}^0, \bar{\alpha}^1$; $\bar{\beta} \cong \bar{\beta}^0, \bar{\beta}^1$ и

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, \dots, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+n_1+1}) &\cong \\ &\cong \Phi^0(x_0, \dots, x_{n_0}) \wedge \Phi^1(x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+n_1+1}), \end{aligned}$$

то $\Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ удовлетворяет сформулированному условию.

Класс \mathfrak{F}_*^f состоит из всех таких $F \in \mathfrak{F}_*$, что $R(F)/J(R(F))$ является элементарным произведением конечных полей (заметим, что это равносильно тому, что $R(F)/J(R(F))$ есть \exists -произведение конечных полей).

Используя результаты из [1, 2], можно эффективно выписать систему аксиом для класса $[\mathfrak{F}_*^f]$ полей F из \mathfrak{F}_* таких, что $R(F)/J(R(F))$ принадлежит аксиоматическому замыканию класса элементарных произведений конечных полей (т.е. для любого предложения Φ , истинного в $R(F)/J(R(F))$, существует элементарное произведение R_* конечных полей такое, что $R_* \models \Phi$).

Для разрешимости теории класса полей \mathfrak{F}_*^f ($[\mathfrak{F}_*^f]$) достаточно установить, что для любого предложения вида $\Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ можно эффективно узнать, существует ли $F \in [\mathfrak{F}_*^f]$ такое, что $F \models \Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$. Укажем, как это можно сделать.

Пусть заданы $h, f, g_0, \dots, g_n, h_0, \dots, h_k \in \mathbb{Q}[x]$, $\Phi(\bar{x})$; предполагаем (проверив) непроводимость $h \in Z[x]$; пусть K – поле разложения многочлена $h \cdot f$; $K_0 \cong \mathbb{Q}(\alpha_h)$; $\alpha_i \cong g_i(\alpha_h)$, $i = 0, \dots, n$; $\beta_i \cong h_i(\alpha_h)$, $i = 0, \dots, k$.

Если f имеет корень в K_0 , то $\Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ несовместно $\text{Th}([\mathfrak{F}_*^f])$.

Пусть f не имеет корней в K_0 .

Пусть N – наименьшее общее кратное всех знаменателей ненулевых коэффициентов многочленов $g_i, h_j \in \mathbb{Q}[x]$, $i \leq n, j \leq k$; тогда $Ng_i, Nh_j \in Z[x]$, $i \leq n, j \leq k$. Пусть S – множество всех простых делителей числа N ; $\pi_S \cong \prod_{p \in S} p$. Пусть $W \cong \{R \mid R \text{ – кольцо } \pi_S\text{-нормирования поля } K_0 \text{ и } \alpha_0, \dots, \alpha_n \in R\}$.

Для формулы $\Phi(x_0, \dots, x_n)$ выберем определяющую последовательность [2].

$$\langle \Psi(X_0, \dots, X_t); \Psi_0(x_0, \dots, x_n), \dots, \Psi_t(x_0, \dots, x_n) \rangle$$

так, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\Psi(\bar{X}) \rightarrow \text{Part}(\bar{X})$;
- 2) существует $0 \leq u \leq t + 1$ такое, что $\Psi_i \rightarrow \pi_S = 0$, $i < u$; $\Psi_i \rightarrow \pi_S \neq 0$, $u \leq i \leq t$.

Не уменьшая общности, можно предполагать также справедливость условий:

$$3) \Psi(\bar{X}) \rightarrow \bigwedge_{i \leq t} (X_i \neq 0);$$

4) существуют $I \subseteq \{0, \dots, t\}$; $0 \neq n_i \in \omega, i \in I$ такие, что $\Psi(\bar{X}) \rightarrow |X_i| = n_i, i \in I$, и для любого $n > 0$

$\Psi(\bar{X})$ выполнима в некоторой булевой алгебре такой, что $|X_i| \geq n$ для всех $i \in \{0, \dots, t\} \setminus I$.

Пусть $I_0 \cong I \cap \{0, \dots, u\}$. Для $0 \leq i < u$ пусть $W_i \cong \{R \mid R \in W, \text{ существует конечное расширение } G \geq F_R \text{ такое, что } G \models \Psi_i, (\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_n)\}$; здесь $\bar{\alpha}_j \cong \alpha_j + m(R), j \leq n$.

З а м е ч а н и е 1. Алгоритмически разрешима проблема: по конечному полю G , формуле $\Phi(x_0, \dots, x_n)$, элементам $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in G$ узнать, существует ли конечное расширение $G_0 \geq G$ такое, что $G_0 \models \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$.

З а м е ч а н и е 2. Указанная выше проблема равносильна проблеме: по конечному полю G , формуле $\Phi(x_0, \dots, x_n)$, элементам $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in G$ узнать, существует ли поле $F' \in [\mathfrak{F}_*^f]$ такое, что $F' \geq G$ и $F' \models \Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$.

Ищем теперь подмножество $\bar{W} \subseteq W$ такое, чтобы выполнялись следующие условия:

1) для любого $j \leq k$ существует $R \in \bar{W}$ такое, что $\beta_j \notin R$;

2) для любого $i < u$ можно выбрать подмножество $\bar{W}_i \subseteq W_i$ так, что $\bar{W}_i \neq \emptyset$; $|\bar{W}_i| \leq n_i$, если $i \in I_0$; $\bigcup_{i < u} \bar{W}_i = \bar{W}$.

Если такого \bar{W} не существует, то $\Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ не выполнима в $[\mathfrak{F}_*^f]$.

Действительно, пусть $F \in [\mathfrak{F}_*^f]$ и $F \models \Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$; пусть $\bar{W} \cong \{R' \cap K_0 \mid R' \in W_\pi, \pi_S \in m(R')\}$. Пусть $j \leq k$; так как $\beta_j \notin R_\pi \cong \bigcap \{R' \mid R' \in W_\pi\}$, то существует $R' \in W_\pi$ такое, что $\beta_j \notin R'$; тогда $R' \cap K_0 \neq K_0$ и существует простое p такое, что $p \in m(R')$; если $p \nmid \pi_S$, то β_j целое над R' и, следовательно, $\beta_j \in R'$, что невозможно. Тогда $p \mid \pi_S, \pi_S \in m(R'), R \cong R' \cap K \in \bar{W}$ и $\beta_j \notin R$.

Пусть $i < u$ и $\bar{W}_i \cong \{R' \cap K_0 \mid R' \in W_\pi, \pi_S \in m(R'), F_R \models \Psi_i(\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_n)\}$; тогда по условиям 2) и 3) на определяющую последовательность $\bar{W}_i \neq \emptyset$ и $\bigcup_{i < u} \bar{W}_i = \bar{W}$; кроме того, из условия 4) на определяющую последовательность следует, что

$$|\bar{W}_i| \leq |\{R' | R' \in W_{\pi_s}, \pi_s \in \mathfrak{m}(R'), \\ F_{R'} \models \Psi_i(\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_n)\}| = n_i$$

для $i \in I_0$.

З а м е ч а н и е. Проверка существования \bar{W} , $\bar{W}_i \subseteq W, i < u$, таких, что выполнены условия 1) и 2), может быть осуществлена эффективно.

Итак, если таких $\bar{W}, \bar{W}_i, i < u$, нет, то $\Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ не совместна с $\text{Th}(\mathfrak{F}'_*)$.

Пусть $\bar{W}, \bar{W}_i, i < u$, удовлетворяющие условиям 1) и 2), выбраны.

Проверим для каждого $i, u \leq i \leq t$, совместно ли с $\text{Th}(\mathfrak{F}'_p)$ предложение $\Psi_i^* \Leftrightarrow \exists x(h(x)=0 \wedge \Psi_i(g_0(x), \dots, g_n(x)))$. Если для некоторого $i, u \leq i \leq t$, Ψ_i^* не совместно с $\text{Th}(\mathfrak{F}'_p)$, то $\Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$, очевидно, не совместно с $\text{Th}(\mathfrak{F}'_*)$.

Если же все $\Psi_i^*, u \leq i \leq t$, совместны с $\text{Th}(\mathfrak{F}'_p)$ (что проверяется эффективно), то предложение $\Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ совместно с $\text{Th}(\mathfrak{F}'_*)$. Более того, существует поле $F \in \mathfrak{F}'_*$ такое, что $\bar{R}(F) \simeq \prod_{i \leq T} G_i^{\beta_i}$

для подходящих $T \in \omega$, конечных полей $G_i, i \leq T$, и булевых алгебр $V_i, i \leq T$.

Действительно, если выполнены все условия, то можно найти такое конечное расширение $\bar{K} \geq K_0$, что K и \bar{K} линейно разделены над K_0 ($\bar{K} \parallel_{K_0} K$), существуют конечные непустые множества $W_i, i \leq t$, колец нормирований поля K такие, что для $W \Leftrightarrow \bigcup_{i \leq t} W_i, \alpha_0, \dots, \alpha_n \in R_W \Leftrightarrow \cap \{R | R \in W\}; \beta_0, \dots, \beta_k \in R_W; W_i \cap W_j = \emptyset, 0 \leq i < j \leq t; |W_i| = n_i$ для $i \in I$; если $R \in W_i$, то $F_R \models \Psi_i(\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_n)$, и если $R \in W$, то существует простое $p \in R$ такое, что $v_R(p) = 1$; можно добиться того, что для $i < u$

$$\{R \cap K_0 | R \in W_i\} = \bar{W}_i.$$

Построение такого расширения \bar{K} осуществляется с помощью теоремы 2 из § 3 статьи [3].

Далее с помощью теоремы 1 из [4] можно построить такое регулярное расширение $\bar{F} \geq \bar{K}$ и булево семейство \bar{W} колец нормирований поля \bar{F} такие, что $\langle \bar{F}, \bar{W} \rangle \in RC^*$; для любого $\bar{R} \in \bar{W}$ $\bar{R} \cap \bar{K} \in W$ и \bar{R} – надстройка $\bar{R} \cap \bar{K}$ и для любого $R \in W$ $\bar{W}_R \Leftrightarrow \{\bar{R} | \bar{R} \cap \bar{K} = R\}$ гомеоморфно за-

данному булеву пространству X_R . Выберем булевы пространства $X_R, R \in W$, так, что если

$$X_i \Leftrightarrow \bigcup_{R \in W_i} X_R, \quad i \leq t, \quad X \Leftrightarrow \bigcup_{i \leq t} X_i,$$

то

$$\mathbb{B}(X) \models \Psi(X_0, \dots, X_t),$$

где $\mathbb{B}(X)$ – булева алгебра открыто-замкнутых подмножеств булева пространства X ; заметим, что $X_0, \dots, X_t \in \mathbb{B}(X)$. Кольцо $R_{\bar{W}}/J(R_{\bar{W}})$ изоморфно

кольцу $\prod_{R \in W} F_R^{\beta(x_R)}$, т.е. является элементарным произведением конечных полей.

З а м е ч а н и е. Если через π_* обозначить произведение всех простых p таких, что существует $R \in W$, для которого $p \in \mathfrak{m}(R)$, то $W \subseteq W_{\pi_*} = W_{\pi_*}(\bar{K})$. Для этого же π_* будет выполнено и $\bar{W} \subseteq W_{\pi_*}(\bar{F})$ (на самом деле $\bar{W} = W_{\pi_*}(\bar{F})$).

Для завершения построения нужны следующие два утверждения, представляющие и самостоятельный интерес.

Предложение 2. Пусть W – булево семейство колец нормирований поля F и F плотно в $\mathbb{H}_R(F)$ для любого $R \in W$. Тогда существуют сепарабельное алгебраическое расширение F_0 поля F и булево семейство колец нормирований W_0 поля F_0 такие, что отображение $R_0 \mapsto R_0 \cap F, R_0 \in W_0$ есть гомеоморфизм W_0 и W ; $R_0 \cap F \leq R_0 \leq (R_0 \cap F)^h$ для всех $R_0 \in W_0$ и $\langle F_0, W_0 \rangle$ максимально.

Предложение 3. Если $\langle F, W \rangle$ – RC-поле и W независимо, а $\langle F_0, W_0 \rangle$, как в предложении 2, то $\langle F_0, W_0 \rangle$ – RC-поле.

С помощью предложения 2 находим для $\langle \bar{F}, \bar{W} \rangle$ максимальное сепарабельное алгебраическое расширение $\langle F_0, W_0 \rangle$ такое, что отображение $R_0 \mapsto R_0 \cap \bar{F}, R_0 \in W_0$ есть гомеоморфизм W_0 и \bar{W} ; $R_0 \cap \bar{F} \leq R_0 \leq (R_0 \cap \bar{F})^h$ для любого $R_0 \in W_0$. По предложению 3 $\langle F_0, W_0 \rangle \in RC$ (по следствию предложения 8 из [4], так как $W_0 = W_{\pi_*}(F_0)$, то $\langle F_0, W_0 \rangle \in RC^*$). Так как $R_0 \leq (R_0 \cap \bar{F})^h$ и $R_0 \cap \bar{F}$ – надстройка $R_0 \cap \bar{K}$, то Γ_{R_0} есть Z-группа и, следовательно, из

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\pi_*}(F_0) &= R_{\pi_*}(F_0)/J(R_{\pi_*}(F_0)) \simeq \bar{R}_{\pi_*}(\bar{F}) = \\ &= R_{\pi_*}(\bar{F})/J(R_{\pi_*}(\bar{F})) \simeq \prod_{R \in W} F_R^{\beta(x_R)} \end{aligned}$$

следует, что $\langle F_0, W_0 \rangle \in \mathfrak{F}'_*$. $F_0 \models \Psi_{\kappa, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \Phi}$ по построению.

Из проведенных выше рассмотрений и вытекает

Теорема. *Класс полей \mathfrak{F}_*^f имеет разрешимую элементарную теорию.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-011-16014).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ершов Ю.Л. // Алгебра и логика. 1993. Т. 32. № 6. С. 643 - 664.
2. Ершов Ю.Л. // Там же. № 4. С. 452 - 460.
3. Ершов Ю.Л. // Успехи матем. наук. 1983. Т. 37. № 3. С. 55 - 93.
4. Ершов Ю.Л. // Алгебра и логика. 1993. Т. 33. № 4. С. 457 - 471.
5. Ершов Ю.Л. // Там же. 1992. Т. 31. № 6. С. 592 - 623.