ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1958 МАТЕМАТИКА № 4 (5)

Ф. М. Кириллова

О КОРРЕКТНОСТИ ПОСТАНОВКИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В заметке доказана непрерывная зависимость решения задачи оптимального регулирования [1 — 4] от начальных данных и параметров системы (при некоторых предположениях).

§ 1. Пусть система регулирования описывается дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t, c_1, \ldots, c_e)\, x_k(t)+\sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t, c_1, \ldots, c_e)\, u_k(t)\ (i=1, \ldots, n), \quad (1.1)$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты изображающей точки в фазовом пространстве, $c_1, \ldots, c_e$ — параметры, $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ — управляющие функции. Функции $a_{ik}(t, c_1, \ldots, c_e)$, $b_{ik}(t, c_1, \ldots, c_e)$ непрерывны по времени t и параметрам системы $c_1, \ldots, c_e$.

Будем предполагать, что $u_k(t)$ — кусочно-непрерывные функции, на которые наложено ограничение $\max|u_k(t)|\leqslant N$, $k=1, \ldots, r$, N — некоторая постоянная величина. При вычислении $\max|u_k(t)|$ не будем учитывать значения $|u_k(t)|$ в отдельных точках, если эти точки составляют множество нулевой меры [1].

При заданных неизменных параметрах $c_1, \ldots, c_e$ системы (1.1) задача заключается в следующем: пусть дан момент времени t_0, точка $x_i(t_0)=x_{i0}$, нужно выбрать функции управления $u_k(t)$ так, чтобы движущаяся по траектории системы точка $x_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, u_1, \ldots, u_r, t)$ достигла из начального положения $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ начала координат за кратчайшее время T.

Функции $u_k(t)$, удовлетворяющие требованиям этой задачи, будем называть оптимальными управляющими функциями, а время T — оптимальным временем переходного процесса.

В работах [1—4] показано, что решение данной задачи (при некоторых ограничениях) существует. Представляет интерес исследование зависимости оптимальных управляющих функций и оптимального времени управления от начальных данных $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ и параметров системы $c_1, \ldots, c_e$.

В настоящей заметке будет доказана непрерывная зависимость решения $u_k(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, c_1, \ldots, c_e, t)$, $T(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, c_1, \ldots, c_e)$ от начальных данных $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ и параметров $c_1, \ldots, c_e$ (при некоторых предположениях). Иначе говоря, ниже выясняется вопрос о корректности постановки задачи оптимального регулирования.

---

[1] В таких случаях принято говорить: соотношение $\max|u_k(t)|\leqslant N$ имеет место почти всюду на множестве $t_0\leqslant t\leqslant\tau$. Практически можно считать, что неравенство $|u_k(t)|>N$ справедливо лишь в изолированных точках, число которых на каждом отрезке $t_0\leqslant t\leqslant\tau$ конечно и которыми в данной задаче следует просто пренебречь.

Введем обозначения. Если z — некоторая функция начальных данных и параметров системы $z = z(x_{10},..., x_{n0}, t_0, c_1,..., c_e)$, то будем в дальнейшем писать $z = z(x_0, t_0, c)$. В частности, вместо $u_k(x_{10},..., x_{n0}, t_0, c_1,..., c_e, t)$, $T(x_{10},..., x_{n0}, t_0, c_1,..., c_e)$ будем употреблять символы $u_k(x_0, t_0, c, t)$, $T(x_0, t_0, c)$.

Задачу оптимального регулирования можно считать поставленной корректно, если оптимальные управляющие функции $u_k(x_0, t_0, c, t)$ и время $T(x_0, t_0, c)$ (при фиксированных значениях параметров $c_1,..., c_e$) непрерывны по начальным данным $x_{10},..., x_{n0}$, то есть для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенства

$$\operatorname{mes}(|u_k(x_0, t_0, c, t) - u_k(x_0', t_0, c, t)| \geqslant \sigma) < \varepsilon, \ \sigma > 0,$$
$$|T(x_0, t_0, c) - T(x_0', t_0, c)| < \varepsilon$$

выполняются, как только $|x_{i0} - x_{i0}'| < \delta$.

Также при заданных начальных условиях $x_{10},..., x_{n0}$ решение $u_k(x_0, t_0, c, t)$ $T(x_0, t_0, c)$ будем называть непрерывным по параметрам $c_1,..., c_e$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенства

$$\operatorname{mes}(|u_k(x_0, t_0, c, t) - u_k(x_0, t_0, c', t)| \geqslant \sigma) < \varepsilon, \ \sigma > 0,$$
$$|T(x_0, t_0, c) - T(x_0, t_0, c')| < \varepsilon$$

справедливы, как только $|c_i - c_i'| < \delta$.

Доказательство таких свойств решения оптимальной задачи будет изложено в §§ 3, 4. В § 2 излагается некоторый вспомогательный материал.

§ 2. Пусть в уравнениях (1.1), $u_k(t) = \eta_k(t)$, $k = 1,..., r$, $\eta_k(t)$ — кусочно-непрерывные, почти всюду ограниченные функции.

Решение системы (1.1) имеет вид (согласно [6])

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(c, t) x_{k0} + \int_{t_0}^{t} \sum_{s, l=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \varphi_{is}(c, t) \psi_{sl}(c, \tau) b_{lk}(c, \tau) \eta_k(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

где $\varphi_{ik}(c, t)$ — функции фундаментальной матрицы решений системы (1.1) при $b_{lk} = 0$, а $\psi_{sl}(c, \tau)$ — функции матрицы, обратной к фундаментальной матрице.

Умножая соотношение (2.1) на $\psi_{ml}(c, t)$ и суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_{ml}(c, t) x_i(t) = x_{m0} + \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{n} \psi_{ml}(c, \tau) b_{lk}(c, \tau) \eta_k(\tau) d\tau \quad (m = 1,..., n).$$

Пусть при некотором $t > t_0$ точка $x_i(x_0, t_0, c, \eta_1,..., \eta_k, t)$ траектории системы (1.1) попадает в начало координат. Тогда функции $\eta_k(\tau)$ должны быть решением системы

$$-x_{m0} = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \gamma_{mk}(c, \tau) \eta_k(\tau) d\tau \quad (m = 1,..., n), \quad (2.2)$$

где

$$\gamma_{mk}(c, \tau) = \sum_{l=1}^{n} \psi_{ml}(c, \tau) b_{lk}(c, \tau).$$

---

[1]) Символ $\operatorname{mes}(|u_k(x_0, t_0, c, t) - u_k(x_0', t_0, c, t)| \geqslant \sigma)$ означает: мера множества, где выполняется неравенство $|u_k(x_0, t_0, c, t) - u_k(x_0', t_0, c, t)| \geqslant \sigma$. Иначе говоря, речь идет о сходимости управляющих функций по мере, что связано со спецификой задачи, решение которой $u_k(x_0, t_0, c, t)$ — функции разрывные.

Рассмотрим пространство $L(t_0, t)$ систем функций $\gamma(\tau)=\{(\gamma_1(\tau),\ldots, \gamma_r(\tau))\}$, то есть пространство суммируемых по Лебегу функций

$$\gamma_k(\tau)\left(\int_{t_0}^{t}|\gamma_k(\tau)|\,d\tau<+\infty\right).$$

Пусть символ $\|\gamma(\tau)\|$ означает норму элемента $\gamma(\tau)$, а именно:

$$\|\gamma(t)\|=\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{r}|\gamma_k(\tau)|\,d\tau.$$

Тогда общий вид линейных функционалов, определенных над данным линейным нормированным пространством, будет таким:

$$f(\gamma)=\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{r}\gamma_k(\tau)\,\eta_k(\tau)\,d\tau,$$

где $\eta_k(\tau)$ — кусочно-непрерывные, почти всюду ограниченные функции. Причем, норма функционала f определяется по формуле

$$\|f\|=\max|\eta_k(\tau)|,\quad t_0\leqslant\tau\leqslant t,\ k=1,\ldots, r.$$

Возвращаясь к соотношению (2.2), задачу оптимального регулирования можем сформулировать так: среди линейных функционалов, определенных над пространством $L(t_0, t)$ систем функций $\gamma(c,\tau)=\{(\gamma_1(c,\tau),\ldots,\gamma_r(c,\tau))\}$ с нормой

$$\|\gamma(c, t)\|=\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{r}|\gamma_k(c,\tau)|\,d\tau,$$

где $c_1,\ldots, c_e$ — данные неизменные параметры, найти функционал f, минимальный по норме, являющийся решением системы (2.2); если существуют значения t, для которых $\min\|f\|\leqslant N$, то при данных начальных условиях $x_{10},\ldots, x_{n0}$ и ограничениях $|u_k(\tau)|\leqslant N$ начало координат достижимо [1] за время $\theta=t-t_0$; если среди значений θ, для которых $\min\|f\|\leqslant N$, есть наименьшее, то существует оптимальное управление.

Данную задачу рассмотрим для случая, когда системы функций $\{(\gamma_{i1}(c,\tau),\ldots,\gamma_{ir}(c,\tau))\}$ вполне независимы [7], то есть будем полагать, что соотношения

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\gamma_{ik}(c,\tau)=0,\ k=1,\ldots, r,\quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\neq 0$$

имеют место только на множестве меры нуль.

Элемент

$$\gamma(c,\tau)=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\gamma_{i1}(c,\tau),\ldots,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\gamma_{ir}(c,\tau)\right),$$

следуя [7], назовем минимизирующим на отрезке $t_0\leqslant\tau\leqslant t$, если норма его удовлетворяет условию

$$\min\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\gamma_{ik}(c,\tau)\right|d\tau=\|\gamma(c, t)\|,$$

[1] Это, например, всегда будет иметь место, если $a_{ik}=\text{const}$ и собственные значения матрицы (a_{ik}) имеют отрицательные действительные части.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{i0} = -1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2 \neq 0.$$

Как показано в [7], решение системы (2.2) (если системы функций $\{(\gamma_{i1}(c, \tau), \ldots, \gamma_{ir}(c, \tau))\}$ вполне независимы) существует тогда и только тогда, когда $\| f \| \geqslant \lambda(x_0, t_0, c, t)$, где функция $\lambda(x_0, t_0, c, t)$ определяется из условия

$$\frac{1}{\lambda(x_0, t_0, c, t)} = \min \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{i0} = -1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2 \neq 0.$$

Так как при значениях $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{i0} = -1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2 \neq 0,$$

$$\min \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau$$

всегда достигается [7], то можно рассмотреть функционал f, являющийся решением системы (2.2) и обладающий нормой, равной $\lambda(x_0, t_0, c, t)$. Пусть $\| f \| = \lambda(x_0, t_0, c, t)$ и функционал f — решение системы (2.2). Если элемент

$$\gamma(c, \tau) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{i1}(c, \tau), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ir}(c, \tau) \right)$$

является минимизирующим на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0$, то, очевидно,

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau) \eta_k(\tau) \, d\tau = 1 \quad \text{и}$$

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau = \frac{1}{\lambda(x_0, t_0, c, t)}.$$

Значит: $f(\gamma) = \| \gamma \| \, \| f \|$. Следовательно, если функционал f является решением системы (2.2) и $\| f \| = \lambda(x_0, t_0, c, t)$, то для всякого минимизирующего на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ элемента

$$\gamma(c, \tau) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{i1}(c, \tau), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ir}(c, \tau) \right)$$

имеем

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau) \eta_k(\tau) \, d\tau = \lambda(x_0, t_0, c, t) \cdot \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau.$$

Отсюда следует, что, пренебрегая множеством нулевой меры, функции $\eta_k(\tau)$ можем найти по формулам [3]:

$$\eta_k(x_0, t_0, c, \tau) = \lambda(x_0, t_0, c, t) \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{i0} = -1, \; k = 1, \ldots, r. \tag{2.3}$$

Таким образом, если из точки $(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ можно попасть в начало координат, то функции управления определяются единственным образом соотношениями (2.3).

Можно показать, что функция $\lambda(x_0, t_0, c, t)$ является непрерывной и строго монотонной по t (при фиксированных $x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, c_1, \ldots, c_e$). Действительно, если элемент

$$\gamma_1(c, \tau) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \gamma_{i1}(c, \tau), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \gamma_{ir}(c, \tau) \Big)$$

является минимизирующим на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$, а элемент

$$\gamma_2(c, \tau) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{i1}(c, \tau), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{ir}(c, \tau) \Big)$$

является минимизирующим на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_2$, то, очевидно, справедливо следующее неравенство:

$$\int_{t_0}^{t_2} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau.$$

Пусть $t_1 < t_2$, тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau > \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau.$$

Значит

$$\int_{t_0}^{t_2} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau > \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau,$$

то есть $F(x_0, t_0, c, t_2) > F(x_0, t_0, c, t_1)$, $F(x_0, t_0, c, t) = \dfrac{1}{\lambda(x_0, t_0, c, t)}$, что и доказывает монотонность $F(x_0, t_0, c, t)$ (а, следовательно, и $\lambda(x_0, t_0, c, t)$).

Докажем теперь непрерывность $F(x_0, t_0, c, t)$. Так как

$$\int_{t_0}^{t_2} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau = \min \int_{t_0}^{t_2} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{i0} = -1,$$

то

$$\int_{t_0}^{t_2} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t_2} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau,$$

отсюда

$$F(x_0, t_0, c, t_2) - F(x_0, t_0, c, t_1) \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau.$$

Если $t_2 \to t_1$, то $F(x_0, t_0, c, t_2) \to F(x_0, t_0, c, t_1)$. Непрерывность справа функции $F(x_0, t_0, c, t)$ доказана. Для доказательства непрерывности $F(x_0, t_0, c, t)$ слева воспользуемся неравенством

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau.$$

Если $t_2 < t_1$, то

$$F(x_0, t_0, c, t_1) - F(x_0, t_0, c, t_2) \leqslant \int_{t_2}^{t_1} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau$$

и при $t_2 \to t_1$ получаем $F(x_0, t_0, c, t_2) \to F(x_0, t_0, c, t_1)$.

Из непрерывности $F(x_0, t_0, c, t)$ по t следует: если по крайней мере для одного t при начальных данных $x_{10},\ldots, x_{n0}$ и ограничениях $|u_k(\tau)| \leqslant N$ начало координат достижимо[1], то существует единственное оптимальное управление, определяемое формулами, получаемыми из (2.3):

$$u_k(x_0, t_0, c, \tau) = N \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{i0} = -1, \quad (k = 1,\ldots, r). \tag{2.4}$$

§ 3. Доказательство основных положений, сформулированных в § 1, основывается на одном вспомогательном утверждении. Обозначим символом $\gamma_{im}(\tau)_t$, $m = 1,\ldots, r$, непрерывные функции аргумента τ, определенные на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \theta$.

Лемма 3.1. *Пусть нормы элементов последовательности*

$$\gamma_k(\tau)_t = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \gamma_{i1}^k(\tau)_t, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \gamma_{ir}^k(\tau)_t\Big)$$

ограничены, $\|\gamma_k(\tau)_t\| \leqslant K$, K — *постоянная величина. Если* $\gamma_{im}^k(\tau)_t$, $m = 1,\ldots, r$, $k = 1, 2, \ldots$, — *непрерывные функции и* $\gamma_{im}^k(\tau)_t \to \gamma_{im}^0(\tau)_t$ *при* $k \to \infty$, *а системы функций* $\{(\gamma_{i1}^0(\tau)_t, \ldots, \gamma_{ir}^0(\tau)_t)\}$ *вполне независимы, то совокупность* $\{\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\}$ *ограничена равномерно по* t *на каждом отрезке* $0 < t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant \theta$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда ввиду неравенства $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ существует такая подпоследовательность $t_s \to t$ при $s \to \infty$, что

$$c_{k_s} = |\lambda_1^{k_s}| + \ldots + |\lambda_n^{k_s}| \to \infty.$$

Нормы элементов $\gamma_{k_s}(\tau)_{t_s}$ ограничены по условию, следовательно, последовательность норм элементов

$$\bar{\gamma}_{k_s}(\tau)_{t_s} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{k_s}}{c_{k_s}} \gamma_{i1}^{k_s}(\tau)_{t_s}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{k_s}}{c_{k_s}} \gamma_{ir}^{k_s}(\tau)_{t_s}\Big)$$

стремится к нулю. А так как

$$\left|\frac{\lambda_1^{k_s}}{c_{k_s}}\right| + \ldots + \left|\frac{\lambda_n^{k_s}}{c_{k_s}}\right| = 1,$$

то существует такая подпоследовательность t_{s_e} последовательности t_s (при этом, не ограничивая общности рассуждений, можем считать ее монотонной), что

$$\frac{\lambda_i^{k_s^1}}{c_{k_s^1}} \to \alpha_i$$

для всех i при $t_{s_e} \to t$.

Рассмотрим элемент

$$\gamma_0(\tau)_t = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{i1}^0(\tau)_t, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_{ir}^0(\tau)_t\Big).$$

---

[1] См. сноску на странице 115.

Пусть последовательность t_{s_e} возрастающая. Тогда

$$\left|\int_{t_0}^{t_{s_e}}\sum_{m=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^{k_s'}}{c_{k_s}^1}\gamma_{im}^{k_s^1}(\tau)_{t_{s_e}}\right|d\tau-\int_{t_0}^{t}\sum_{m=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_{im}^0(\tau)_t\right|d\tau\right|\leqslant$$

$$\int_{t_0}^{t_{s_e}}\sum_{m=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\left\{\left|\frac{\lambda_i^{k_s'}}{c_{k_s'}}\right|\left|\gamma_{im}^{k_s^1}(\tau)_{t_{s_e}}-\gamma_{im}^0(\tau)_{t_{s_e}}\right|+\left|\gamma_{im}^0(\tau)_{t_{s_e}}\right|\left|\frac{\lambda_i^{k_s'}}{c_{k_s'}}-\alpha_i\right|\right\}d\tau+$$

$$+\int_{t_{s_e}}^{t}\sum_{m=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_{im}^0(\tau)_t\right|d\tau$$

(аналогичную оценку разности норм элементов $\gamma_0(\tau)_t$, $\gamma_{k_s'}(\tau)_{t_{s_e}}$ получаем для случая, когда последовательность t_{s_e} убывающая).

Так как функции $\gamma_{im}^{k_s'}(\tau)$ непрерывны по τ и

$$\lim\gamma_{im}^{k_s'}(\tau)_t=\gamma_{im}^0(\tau)_t \text{ при } s\to\infty,$$

то

$$\|\bar{\gamma}_{k_s}^1(\tau)_{t_{s_e}}\|\to\|\gamma_0(\tau)_t\| \text{ при } t_{s_e}\to t.$$

Но $|\alpha_1|+\ldots+|\alpha_n|=1$, и системы функций

$$\left\{(\gamma_{i1}^0(\tau)_t,\ldots,\gamma_{ir}^0(\tau)_t)\right\}$$

вполне независимы, а, значит,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\gamma_{ik}^0(\tau)_t\neq 0.$$

Противоречие и доказывает лемму.

Покажем теперь, что при фиксированных параметрах $c_1,\ldots,c_e$ решение оптимальной задачи $u_k(x_0,t_0,c,\tau)$, $T(x_0,t_0,c)$ непрерывно по начальным данным $x_{10},\ldots,x_{n0}$.

Теорема 1. *Если системы функций* $\{(\gamma_{i1}(c,\tau),\ldots,\gamma_{ir}(c,\tau))\}$ (2.2) *вполне независимы и при некоторых начальных условиях* $x_{10},\ldots,x_{n0}$ *существует оптимальное управление* $u_k(x_0,t_0,c,\tau)$ *с оптимальным временем* $T(x_0,t_0,c)$, *то для каждого* $\varepsilon>0$ *существует такое* δ, *что неравенства*

$$\operatorname{mes}(|u_k(x_0,t_0,c,\tau)-u_k(x_0',t_0,c,\tau)|\geqslant\sigma)<\varepsilon,\ \sigma>0,$$
$$|T(x_0,t_0,c)-T(x_0',t_0,c)|<\varepsilon$$

выполняются, если $|x_{i0}-x_{i0}'|<\delta$.

Доказательство. Пусть T — оптимальное время управления при начальных условиях $x_{10},\ldots,x_{n0}$. По определению функции $F(x_0,t_0,c,t)$ имеем $F(x_0,t_0,c,T)=\frac{1}{N}$. Как показано в § 2, функция $F(x_0,t_0,c,t)$ строго монотонна и непрерывна по t, следовательно, для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $\beta>0$, что выполняются неравенства:

$$F(x_0,t_0,c,T-\varepsilon)<\frac{1}{N}-\beta,\ F(x_0,t_0,c,T+\varepsilon)>\frac{1}{N}+\beta.$$

В статье [7] показано, что при фиксированных $c_1,\ldots,c_e$, t функция $F(x_0,t_0,c,t)$ непрерывна по $x_{10},\ldots,x_{n0}$, поэтому для последователь-

ности начальных данных $x_{10}^m, \ldots, x_{1n}^m$, сходящейся к $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, справедливы неравенства

$$|F(x_0, t_0, c, T-\varepsilon) - F(x_0^m, t_0, c, T-\varepsilon)| < \beta,$$
$$|F(x_0, t_0, c, T+\varepsilon) - F(x_0^m, t_0, c, T+\varepsilon)| < \beta,$$

если $m > M$. Учитывая предыдущие неравенства, заключаем:

$$F(x_0^m, t_0, c, T-\varepsilon) < \frac{1}{N}, \quad F(x_0^m, t_0, c, T+\varepsilon) > \frac{1}{N}$$

для $m > M$. Но функция $F(x_0^m, t_0, c, t)$ при фиксированном m строго монотонна и непрерывна по t, следовательно, для каждого $m > M$ существует такое единственное $\theta_m = T(x_0^m, t_0, c)$, что

$$F(x_0^m, t_0, c, \theta_m) = \frac{1}{N},$$

и, значит, $|T(x_0, t_0, c) - T(x_0^m, t_0, c)| < \varepsilon$ для $m > M$, что вследствие произвольного выбора $\varepsilon > 0$ и доказывает непрерывную зависимость оптимального времени $T(x_0, t_0, c)$ от $x_{10}, \ldots, x_{n0}$.

Заметим, что из непрерывности оптимального времени регулирования по начальным данным следует, что множество точек фазового пространства при данном моменте времени $t = t_0$, для которых начало координат достижимо, является открытым множеством. Этот факт для систем уравнений с постоянными коэффициентами отмечен в статье [2].

Докажем теперь сходимость по мере оптимальных управляющих функций $u_k(x_0^m, t_0, c, \tau)$ к функциям $u_k(x_0, t_0, c, \tau)$ при $x_{i0}^m \to x_{i0}$. Как показано выше:

$$u_k(x_0, t_0, c, \tau) = N \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau) \quad (k = 1, \ldots, r),$$
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^0 x_{i0} = -1, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T,$$
$$u_k(x_0^m, t_0, c, \tau) = N \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n \lambda_i^m \gamma_{ik}(c, \tau) \quad (k = 1, \ldots, r),$$
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^m x_{i0}^m = -1, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T_m$$

(символы T, T_m означают соответственно $T(x_0, t_0, c)$, $T(x_0^m, t_0, c)$).

Элемент

$$\gamma_0(c, \tau) = \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i^0 \gamma_{i1}(c, \tau), \ldots, \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 \gamma_{i1}(c, \tau) \Big)$$

является минимизирующим для условия $\sum_{i=1}^n \lambda_i^0 x_{i0} = -1$ на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T$. Элементы

$$\gamma_m(c, \tau) = \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i^m \gamma_{i1}(c, \tau), \ldots, \sum_{i=1}^n \lambda_i^m \gamma_{ir}(c, \tau) \Big)$$

являются минимизирующими соответственно для условий

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^m x_{i0}^m = -1$$

на отрезках $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T_m$.

Так как

$$\| \gamma_0(c, \tau) \| = \frac{1}{N}, \quad \| \gamma_m(c, \tau) \| = \frac{1}{N} \text{ для } m > M,$$

то на основании леммы 3.1 заключаем, что совокупность $\{\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m\}$ ограничена равномерно по m. Пусть $\lambda_i^{m_s}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности λ_i^m:

$$\lambda_i^{m_s} \to \bar{\lambda}_i \text{ при } s \to \infty,$$

тогда элемент

$$\bar{\gamma}(c, \tau) = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \gamma_{i1}(c, \tau), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \gamma_{ir}(c, \tau) \right),$$

очевидно, является минимизирующим для условия $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{i0} = -1$ на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T$. Следовательно,

$$\operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau) = \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \gamma_{ik}(c, \tau), \quad k = 1, \ldots, r,$$

почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T$ [7].

Но это значит, что, начиная с некоторого номера $m > M$, все нули функций

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \gamma_{ik}(c, \tau), \quad k = 1, \ldots, r,$$

попадут в какую угодно малую ε-окрестность нулей функций

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau)$$

(соответственно).

Действительно, если бы для некоторого $\varepsilon > 0$ не нашлось номера M, удовлетворяющего предыдущему условию, то из ограниченности $\{\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m\}$ следовало бы существование сходящейся подпоследовательности $\{\lambda_1^{m_e}, \ldots, \lambda_n^{m_e}\}$. А так как для

$$\lambda_i^{m_e} \to \lambda_i^1 \quad \text{при} \quad e \to \infty,$$

имеем

$$\operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(e, \tau) = \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 \gamma_{ik}(c, \tau), \quad k = 1, \ldots, r,$$

почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T$, то это предположение приводит к противоречию. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер M, начиная с которого все нули функций

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \gamma_{ik}(c, \tau)$$

попадут в ε-окрестность нулей функций

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau),$$

а вне этой ε-окрестности знаки функций

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \gamma_{ik}(c, \tau) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau) \quad \text{для } m > M$$

совпадают, но это означает

$$\operatorname{mes}(|u_k(x_0, t_0, c, \tau) - u_k(x_0^m, t_0, c, \tau)| \geqslant \sigma) < \varepsilon, \quad m > M.$$

Итак, оптимальное время регулирования $T(x_0, t_0, c)$ и функции управления $u_k(x_0, t_0, c, \tau)$ при фиксированных параметрах $c_1, \ldots, c_e$ непрерывны по начальным данным $x_{10}, \ldots, x_{n0}$.

Замечание. Поскольку реальная система автоматического регулирования никогда не тождественна идеализированной, то, в частности, всегда имеет место погрешность в измерении начальных данных $x_{10}, \ldots, x_{n0}$. Поэтому представляет интерес рассмотрение следующей задачи: пусть оптимальным управлением $u_k(x_0, t_0, \tau)$ за время $T(x_0, t_0) = T$ достигается начало координат. Будет ли точка траектории системы (1.1) в момент времени $t = t_0 + T$ (t_0 — начальный момент времени) лежать вблизи точки $x_i = 0$, если начальные данные те же самые $x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0$, а функции управления соответствуют начальным условиям $x'_{10}, \ldots, x'_{n0}$, близким к $x_{10}, \ldots, x_{n0}$.

Доказанная выше теорема позволяет ответить на этот вопрос положительно (при наших предположениях).

Действительно, если $u_k(x_0, t_0, \tau)$ — оптимальные управляющие функции для начальных условий $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, а T — время регулирования, то, согласно формулам [6], имеем

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ik}(t_0 + T) x_{k0} + \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=1}^{r} \sum_{s, l=1}^{n} \varphi_{is}(t_0 + T) \psi_{sl}(\tau) b_{lk}(\tau) u_k(x_0, t_0, \tau)\, d\tau. \tag{3.2}$$

Положение точки $x_i(x_0, t_0, u_1, \ldots, u_r, t)$, движущейся по траектории системы (1.1) при управлении $u_k(x'_0, t_0, \tau)$ в момент $t = t_0 + T$, определяется соотношениями (по формулам [6]):

$$x_i(t_0 + T) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ik}(t_0 + T) x_{k0} + \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=1}^{r} \sum_{s, e=1}^{n} \varphi_{is}(t_0 + T) \psi_{se}(\tau) b_{ek}(\tau) u_k(x'_0, t_0, \tau)\, d\tau. \tag{3.3}$$

Из равенств (3.2) и (3.3) получаем

$$x_i(t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=1}^{r} \sum_{s, e=1}^{n} \varphi_{is}(t_0 + T) \psi_{se}(\tau) b_{ek}(\tau) (u_k(x_0, t_0, \tau) - u_k(x'_0, t_0, \tau))\, d\tau. \tag{3.4}$$

Оценим $x_i(t_0 + T)$. Так как функции $\varphi_{is}(\tau)$, $\psi_{se}(\tau)$, $b_{ek}(\tau)$ непрерывны по τ и, следовательно, ограничены на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T$, то из (3.4) следует

$$|x_i(t_0 + T)| \leqslant A \sum_{k=1}^{r} \int_{t_0}^{t_0+T} |u_k(x_0, t_0, \tau) - u_k(x'_0, t_0, \tau)|, d\tau,$$

где A — некоторая постоянная величина.

Разобьем отрезок $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T$ на подмножества:

$$E_k^1 = \operatorname{mes}(|u_k(x_0, t_0, \tau) - u_k(x_0', t_0, \tau)| \geqslant \sigma),$$

$$E_k^2 = \operatorname{mes}(|u_k(x_0, t_0, \tau) - u_k(x_0', t_0, \tau)| < \sigma), \quad \sigma > 0.$$

Тогда

$$|x_l(t_0 + T)| \leqslant A \sum_{k=1}^{r} \Big[\int\limits_{E_k^1} |u_k(x_0, t_0, \tau) - u_k(x_0', t_0, \tau)| d\tau +$$

$$+ \int\limits_{E_k^2} |u_k(x_0, t_0, \tau) - u_k(x_0', t_0, \tau)| d\tau \Big].$$

Пусть теперь β — произвольное сколь угодно малое положительное число. Для $\varepsilon = \frac{\beta}{4ArN}$, в силу теоремы 1, можно указать такое $\delta > 0$, что будут выполняться неравенства:

$$\operatorname{mes}(|u_k(x_0, t_0, \tau) - u_k(x_0', t_0, \lambda)| \geqslant \sigma) < \varepsilon, \quad k = 1, .. r, \ |x_{i0} - x_{i0}'| < \delta.$$

Если $\sigma = \frac{\beta}{2AT}$, то

$$|x_l(t_0 + T)| \leqslant A[2N\varepsilon r + \sigma \cdot T],$$

или окончательно получаем

$$|x_l(t_0 + T)| < \beta, \text{ если } |x_{i0} - x_{i0}'| < \delta.$$

Итак, если управляющие функции системы регулирования вводятся с некоторой ошибкой, зависящей от начальных данных ($|x_{i0} - x_{i0}'| < \delta$), то получается процесс, близкий к оптимальному процессу.

§ 4. Пусть при начальных данных $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ изменяются параметры системы $c_1, \ldots, c_e$. Докажем, что оптимальные управляющие функции $u_k(x_0, t_0, c, \tau)$ и оптимальное время управления $T(x_0, t_0, c)$ непрерывны по параметрам системы $c_1, \ldots, c_e$.

Теорема 2. *Если системы функций*

$$\{(\gamma_{i1}(c, \tau), \ldots, \gamma_{ir}(c, \tau))\} \tag{2.2}$$

вполне независимы и при некоторых значениях параметров $c_1, \ldots, c_e$ существует оптимальное управление $u_k(x_0, t_0, c, \tau)$ с оптимальным временем $T(x_0, t_0, c)$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенства

$$\operatorname{mes}(|u_k(x_0, t_0, c, \tau) - u_k(x_0, t_0, c', \tau)| \geqslant \sigma) < \varepsilon, \ \sigma > 0,$$

$$|T(x_0, t_0, c) - T(x_0, t_0, c')| < \varepsilon$$

выполняются, если $|c_i - c_i'| < \delta$.

Докажем предварительно одно свойство функции $F(x_0, t_0, c, t)$.

Лемма 4.1. *Функция $F(x_0, t_0, c, t)$ при фиксированных $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, t_0, t непрерывна по параметрам системы $c_1, \ldots, c_e$.*

Доказательство. Пусть c_i^m — последовательность параметров, сходящаяся к c_i при $m \to \infty$. Так как

$$F(x_0, t_0, c, t) = \min \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau) \Big| d\tau$$

при условии $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{i0} = -1$,

$$F(x_0, t_0, c^m, t) = \min \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik}(c^m, \tau) \right| d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \gamma_{ik}(c^m, \tau) \right| d\tau$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m x_{i0} = -1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i0}^2 \neq 0,$$

то

$$0 < F(x_0, t_0, c^m, t) \leqslant \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c^m, \tau) \right| d\tau.$$

Из ограниченности $F(x_0, t_0, c^m, t)$ и непрерывности $\gamma_{ik}(c, \tau)$ по параметрам $c_1, \ldots, c_e$ получается, что из формул (2.2) по теоремам о непрерывной зависимости решений системы (1.1) от параметров [6], следует существование подпоследовательности $c_i^{m_s}$, для которой

$$\lim \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{ms} \gamma_{ik}(c^{ms}, \tau) \right| d\tau = \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau, \; s \to \infty.$$

Ввиду справедливости неравенства (по определению $F(x_0, t_0, c, t)$)

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau,$$

возможно только

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau,$$

но

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c^{m_s}, \tau) \right| d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{m_s} \gamma_{ik}(c^{m_s}, \tau) \right| d\tau.$$

Переходя к пределу под знаком интегралов, получаем

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau.$$

Следовательно, при $s \to \infty$

$$F(x_0, t_0, c^{m_s}, t) \to \int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \gamma_{ik}(c, \tau) \right| d\tau = F(x_0, t_0, c, t).$$

Очевидно, для каждой сходящейся подпоследовательности значений функции $F(x_0, t_0, c^{m_e}, t)$ получаем в пределе $F(x_0, t_0, c, t)$. А так как $F(x_0, t_0, c^m, t)$ ограничена равномерно по m, то любая подпоследовательность значений $F(x_0, t_0, c^m, t)$ сходится к $F(x_0, t_0, c, t)$.

Значит, функция $F(x_0, t_0, c, t)$ непрерывна (при фиксированных $x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, t$) по параметрам $c_1, \ldots, c_e$.

Непрерывность оптимального времени $T(x_0, t_0, c)$ и функций управления $u_k(x_0, t_0, c, \tau)$ по параметрам $c_1, \ldots, c_e$ теперь получается из лемм 3.1 и 4.1 подобно тому, как это сделано при доказательстве теоремы 1. Поэтому приведем только краткое доказательство теоремы 2.

Пусть T — оптимальное время регулирования, тогда из монотонности и непрерывности $F(x_0, t_0, c, t)$ по t следует справедливость неравенств:

$$F(x_0, t_0, c, T-\varepsilon) < \frac{1}{N} - \beta, \quad F(x_0, t_0, c, T+\varepsilon) > \frac{1}{N} + \beta,$$

ε — произвольное, как угодно малое положительное число.

Если $c_i^m \to c_i$ при $m \to \infty$, то

$$|F(x_0, t_0, c, T \pm \varepsilon) - F(x_0, t_0, c^m, T \pm \varepsilon)| < \beta$$

для $m > M$ (лемма 4.1).

Из приведенных неравенств получаем

$$|T(x_0, t_0, c) - T(x_0, t_0, c^m)| < \varepsilon \text{ для } m > M.$$

Функции управления (согласно (2.4)) вычисляются по формулам:

$$u_k(x_0, t_0, c, \tau) = N \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 x_{i0} = -1, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T_0,$$

$$u_k(x_0, t_0, c^m, \tau) = N \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \gamma_{ik}(c^m, \tau), \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m x_{i0} = -1, \quad t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T_m.$$

Так как $\gamma_{ik}(c, \tau)$ непрерывны по параметрам $c_1, \ldots, c_e$, то на основании леммы 3.1 заключаем, что λ_i^m ограничены равномерно по m. Поэтому, повторяя с незначительными изменениями рассуждения из теоремы 1, убеждаемся, что все нули функций

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \gamma_{ik}(c^m, \tau),$$

начиная с некоторого номера $m > M$, попадут в ε-окрестность нулей функций

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau),$$

а вне ее — знаки функций

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m \gamma_{ik}(c^m, \tau) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \gamma_{ik}(c, \tau) \text{ для } m > M$$

совпадают, то есть,

$$\operatorname{mes}(|u_k(x_0, t_0, c, \tau) - u_k(x_0, t_0, c^m, \tau)| \geqslant \sigma) \to 0$$

при $m \to \infty$.

Этим доказательство нашего утверждения завершается. Автор считает своим долгом отметить, что с задачами оптимального регулирования он познакомился у Н. Н. Красовского.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
24 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин, К теории оптимальных процессов, ДАН СССР, т. CX, в. 1, 1956.

2. Р. В. Гамкрелидзе, К теории оптимальных процессов, ДАН СССР, т. 116, в. 1, 1957.

3. Н. Н. Красовский, К теории оптимального регулирования, Автоматика и телемеханика, т. XVIII, № 11, 1957.

4. Н. Н. Красовский, Об одной задаче оптимального регулирования, ППМ, т. XXI, в. 5, 1957.

5. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

6. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, 1949.

7. Н. Ахиезер, М. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, ст. IV, ГОНТИЗ НТВУ, 1938.