



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Бычков, В. А. Дрёмов, Е. М. Епифанов, Вычисление пар Белого шести-
рёберных рисунков рода 3 с группой автоморфизмов порядка 2,
Фундамент. и прикл. матем., 2013, том 18, выпуск 6, 77–89

<https://www.mathnet.ru/fpm1553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.81

25 апреля 2025 г., 12:11:33



Вычисление пар Белого шестирёберных рисунков рода 3 с группой автоморфизмов порядка 2

Б. С. БЫЧКОВ

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: bbychkov57@yandex.ru

В. А. ДРЁМОВ

ООО «Яндекс»
e-mail: dremov@mccme.ru

Е. М. ЕПИФАНОВ

ГОУ ЦО № 57
e-mail: eepifanov57@gmail.com

УДК 512.772

Ключевые слова: теория детских рисунков Гротендика, пары Белого.

Аннотация

В статье перечислены все шестирёберные рисунки рода 3 с единственной вершиной, имеющие группу автоморфизмов порядка 2. Для каждого из них вычислена пара Белого.

Abstract

B. S. Bychkov, V. A. Dremov, E. M. Epifanov, The computation of Belyi pairs of 6-edged dessins d'enfants of genus 3 with symmetries of order 2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 6, pp. 77–89.

In this article, we present all six-edged dessins d'enfants of genus 3 with only one vertex that have a symmetry of order 2. For each of them the Belyi pair is computed.

1. Введение

В работе рассматриваются шестирёберные *детские рисунки* (см. [9]) рода 3 с единственной вершиной. Они получаются в результате склеек двенадцатиугольников, таких что из склеенной поверхности нельзя вырезать лист Мёбиуса. Здесь и далее под склейкой понимается отождествление пар сторон многоугольника. При этом если каждой паре склеиваемых сторон приписать какую-нибудь букву (для разных пар выберем различные буквы), то каждой склейке будет соответствовать *гауссово слово*. Если зафиксировать начальную сторону и направление обхода (например, против хода часовой стрелки), то

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 6, с. 77–89.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

каждой склейке будет соответствовать единственное слово и разным склейкам будут соответствовать разные слова. В результате такого склеивания получается компактная ориентированная поверхность без края (см. [6]); граф получается как след от границы двенадцатиугольника, если при этом считать, что вершины многоугольника перейдут в чёрные вершины графа, а «середины сторон» — в белые, то граф будет двукрашенным. Всего таких склеек 131, полный список склеек и соответствующих слов получен в [4, приложение 2] и независимо в [5].

Работа посвящена \mathbb{Z}_2 -симметричным рисункам рода 3 с единственной вершиной. Главным результатом работы является нахождение пар Белого всех таких рисунков.

Отметим, что согласно [2] группа автоморфизмов циклическая. Таким образом, учитывая [3], где перечислены и найдены пары Белого рисунков с группами автоморфизмов порядка больше 3, вычислены пары Белого всех рисунков с нетривиальными группами автоморфизмов.

Разделы 1 и 2 вводные, в разделе 3 перечислены все \mathbb{Z}_2 -симметричные рисунки рода 3 с единственной вершиной. В разделе 4 сформулирован основной результат данной работы. В последнем, пятом разделе приведено подробное доказательство полученных результатов.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Г. Б. Шабату за конструктивные замечания и постоянное внимание к работе и Н. М. Адрианову, которому принадлежит идея применённого в данной работе метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 07-01-00441-а.

2. Определения и обозначения

Следуя [2, 10], дадим следующие определения.

Определение 2.1. *Детский рисунок* (часто мы будем называть его просто *рисунком*) — это пара (X, Γ) , где X — компактная ориентированная поверхность без края, Γ — граф, вложенный в X так, что дополнение $X \setminus \Gamma$ гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков.

Определение 2.2. Пусть дана алгебраическая кривая \mathcal{X} над \mathbb{C} . Функция β на \mathcal{X} называется *функцией Белого*, если определяемое ей накрытие $\beta: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ не разветвлено вне множества $\{0, 1, \infty\}$. Пара (\mathcal{X}, β) называется *парой Белого*.

Определение 2.3. *Морфизмом* μ пар Белого (\mathcal{X}_1, β_1) и (\mathcal{X}_2, β_2) называется морфизм алгебраических кривых $\mu: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\mu} & X_2 \\ & \searrow \beta_1 & \swarrow \beta_2 \\ & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \end{array}$$

коммутативной.

Определение 2.4. Пары Белого вместе с морфизмами из определения 2.3 образуют *категорию пар Белого*. Все необходимые утверждения и доказательства можно найти в [7].

Каждому рисунку взаимно-однозначно ставится в соответствие пара Белого как прообраз отрезка $[0, 1]$ при отображении β (см. [1, 2]).

Определение 2.5. Функция Белого называется *чистой*, если все её ветвления над 1 ровно двукратны.

Определение 2.6. Множество чистых пар Белого с морфизмами из определения 2.3 образует *категорию чистых пар Белого над полем \mathbb{C}* (см. [7]).

Категория чистых пар Белого является полной подкатегорией категории пар Белого над \mathbb{C} .

Определение 2.7. *Универсальной группой вращений рёбер ER* назовём свободную группу $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ с двумя образующими a и b .

Определим действие универсальной группы вращений рёбер на множестве рёбер $E(D)$ рисунка D следующим образом: для каждого $e \in E(D)$ $a(e)$ — это следующее ребро при повороте против часовой стрелки вокруг белой вершины, $b(e)$ — следующее ребро при повороте вокруг чёрной вершины. Таким образом задаётся гомоморфизм $\pi_D: ER \rightarrow \text{Aut}(E(D))$, где $\text{Aut}(E(D))$ — множество всех перестановок рёбер рисунка D .

Определение 2.8. Группа перестановок $\pi_D(ER)$ рёбер рисунка D называется *группой вращений рёбер рисунка D* и обозначается $ER(D)$.

Говоря категорным языком, определён функтор из категории рисунков в категорию конечных однородных ER -множеств (подробнее см. в [1]).

Обозначение 2.9. Обозначим следующие торические рисунки (т. е. рисунки с отождествлёнными противоположными сторонами) через T_1, T_2, T_3 .

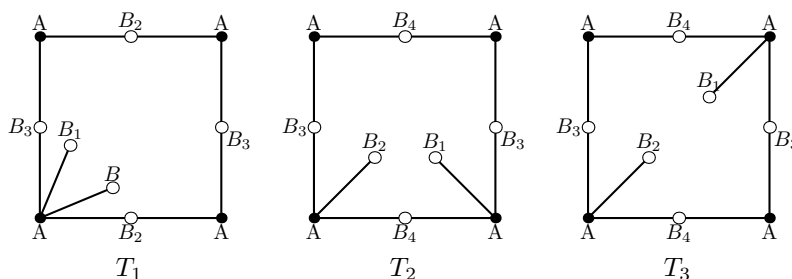


Рис. 2.1

Рассмотрим фактор детского рисунка D по группе автоморфизмов G , не обязательно состоящей из всех автоморфизмов. В [3] сформулировано и доказано следующее утверждение.

Утверждение 2.10. Для любого детского рисунка D и любой группы его автоморфизмов G (не обязательно состоящей из всех автоморфизмов) существует морфизм $u: D \rightarrow F$ ($F := D/G$), для которого выполняются следующие условия:

- 1) для любого рисунка H и для любых морфизмов f, g из F в H из равенства $f \circ u = g \circ u$ следует $f = g$ (u — эпиморфизм);
- 2) для любого $g \in G$ выполняется $u \circ g = u$ (u согласован с морфизмами группы);
- 3) для любого рисунка H и для любого морфизма $u': D \rightarrow H$, удовлетворяющего условию 2), существует такой морфизм $u'': F \rightarrow H$, что $u' = u'' \circ u$.

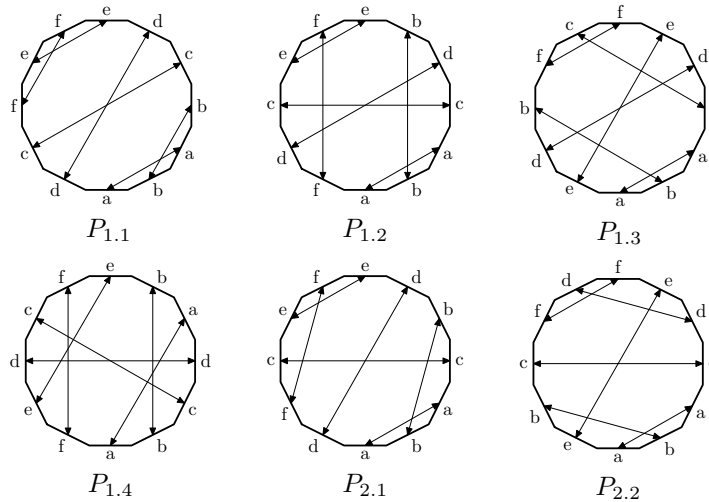
Определение 2.11. Из утверждения 2.10 следует, что фактор рисунка по группе автоморфизмов действительно является рисунком. Будем называть его *фактор-рисунком*.

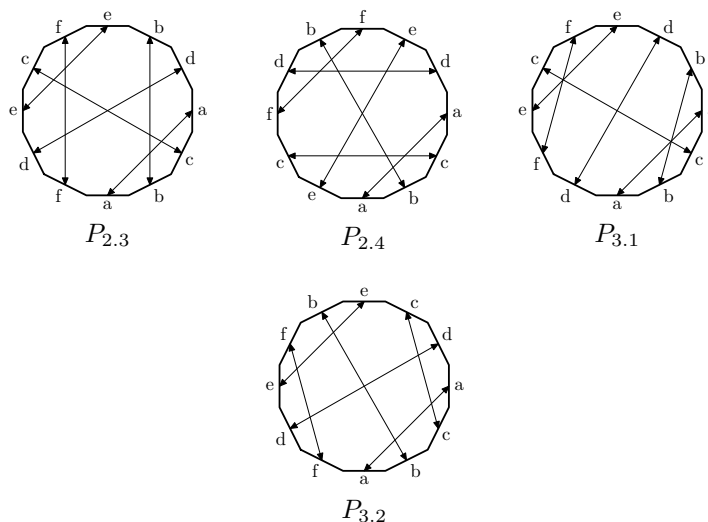
3. Рисунки рода 3 с группой автоморфизмов второго порядка

Перейдём к основному объекту данной работы: двенадцатирёберным склейкам рода 3 с единственной вершиной, обладающим группой автоморфизмов второго порядка. Перечислим их, основываясь на [4].

Заметим, что если рисунок D имеет автоморфизм второго порядка, т. е. $\text{Aut}(D) = \mathbb{Z}_2$, то склейка правильного 12-угольника инвариантна относительно поворота на π , а гауссово слово W рисунка D с точностью до переименования букв 6-периодично (т. е. если на местах i, j стоят одинаковые буквы, то одинаковые буквы стоят и на местах $i + 6 \pmod{12}, j + 6 \pmod{12}$)).

Теорема 3.1. Существует ровно десять склеек с инволюцией.





Доказательство. Пусть на местах i и j ($i < j$) в гауссовом слове W стоит буква a . Так как слово 6-периодично, то $j - i \leq 6$. Случай, когда $|i - j| = 6$ и в W нет пары одинаковых букв, расположенных ближе друг к другу, разобран в [4]. Поэтому считаем, что $j - i < 6$. Заметим, что равенство $|i - j| = 5$ не может выполняться, так как в этом случае $W = a * * * * ab * * * * b$, а у этой склейки не меньше двух вершин. Поэтому $|i - j| < 5$. Рассмотрим оставшиеся случаи.

1. Пусть $j - i = 2$. Тогда слово имеет вид $a * a * * * b * b * * *$. Предположим, что другая буква, c , стоит на местах k, l .

Пусть $|k - l| = 2$. Тогда $W = acac * * bdbd * *$, и далее получаем единственную возможность — $acacefdbbdef$, $P_{1.1}$.

Если $|k - l| = 3$, то единственная возможность $acaecfdbbedf$, $P_{2.1}$. Однако заметим, что у этой склейки нет зеркальной симметрии относительно главных диагоналей 12-угольника, следовательно, нашим условиям удовлетворяет зеркально-симметричная ей склейка с гауссовым словом $W = acafdebdbfce$, $P_{2.2}$.

Если $|k - l| = 4$, то аналогично предыдущему случаю получаем две симметричные относительно главной диагонали склейки, соответствующие словам $acaefcbdbefd$, $P_{1.2}$, и $abacdefcfbde$, $P_{1.3}$.

2. Пусть $j - i = 3$. Для значения $|k - l|$ остаётся две возможности: 3 и 4.

Если $|k - l| = 3$, то слово имеет вид $ac * ac * bd * bd * = aceacfdbbedf$ и соответствует $P_{3.1}$ или вид $a * ca * cb * db * d = aecafcbbedbfd$ и соответствует $P_{3.2}$.

Если $|k - l| = 4$, то слово имеет вид $ac * a * cbd * b * d = aceacfdbbedf$ и соответствует $P_{2.3}$. Опять же заметим, что эта склейка не является зеркально-симметричной относительно главных диагоналей, и следовательно, получаем ещё одно гауссово слово, $abcadefdbfce$, $P_{2.4}$.

3. Пусть $j - i = 4$. Тогда, исключая из рассмотрения уже полученные слова, приходим к $abcdabefcdef$, $P_{1.4}$.

Перечислены все склейки 12-угольника рода 3 с единственной вершиной и с автоморфизмом порядка 2. \square

4. Основная теорема

Нетрудно показать, что фактор-рисунок каждого из полученных в предыдущем разделе рисунков — это один из рисунков T_1 , T_2 , T_3 . Таким образом, десять рисунков $P_{i,j}$ естественным образом делятся на три группы (в одну группу попадают рисунки с одинаковым фактором). Результаты сгруппированы в три пункта теоремы.

Теорема 4.1.

1. Пара Белого рисунка $P_{1.1}$ — это функция Белого

$$\beta = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left(\frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right) \quad (4.1)$$

на кривой

$$y^2 = (z+1)(z^3 - 3z^2 - 4), \quad w^2 = z - 3.$$

Пары Белого рисунков $P_{1.2}$, $P_{1.3}$, $P_{1.4}$ — это выраженная той же формулой функция Белого на кривых

$$y^2 = (z+1)(z^3 - 3z^2 - 4), \quad w^2 = f_i, \quad i = 2, 3, 4, \quad f_{2,3,4} = (z-3)(z+1)(z-\alpha),$$

где $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0$.

2. Пары Белого рисунков $P_{2.1}$, $P_{2.2}$, $P_{2.3}$, $P_{2.4}$ — это функция Белого

$$\beta = -1 - \frac{135}{8}z^6 + \frac{81}{4}z^5 - \frac{135}{8}z^4 - \frac{9}{8}z^4y - \frac{3}{4}z^2y + \frac{9}{8}z^3y \quad (4.2)$$

на кривых

$$y^2 = 225z^4 - 90z^3 + 69z^2 + 108z + 60, \quad w^2 = \left(\pm y + \frac{15}{4}z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{15}{4} \right) (z-\alpha),$$

где $5\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0$.

3. Пары Белого рисунков $P_{3.1}$ и $P_{3.2}$ — это функция

$$\beta = z^3$$

на кривой

$$y^2 = \frac{z}{3}(z^2 + z + 1), \quad w^2 = (y+z)(z-1)$$

и функция

$$\beta = z^3$$

на кривой

$$y^2 = -z(z^2 + z + 1), \quad w^2 = (y+z)(z-1).$$

5. Доказательство основной теоремы

Утверждение 5.1. Существует алгебраическое накрытие

$$p_{1.1}: \mathcal{X}_{i,j} \rightarrow \widetilde{\mathcal{X}}_{i,j} \tag{5.1}$$

степени 2, разветвлённое над четырьмя точками, где $\mathcal{X}_{i,j}$ — кривая рисунка $P_{i,j}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}_{i,j}$ — кривая рисунка T_i рода 1.

При факторизации по группе автоморфизмов второго порядка происходит склеивание противоположных сторон 12-угольника. При этом каждое ребро «ломается в середине» (потому что стороны мы считаем ориентированными) и его половинки склеиваются в одно ребро. На рис. 5.1 изображён фактор-рисунок рисунка $P_{1.1}$. Это двукрашенный рисунок на кривой рода 1. Отметим, что это и есть рисунок T_1 , A, B, B_1 и центр грани рисунка C — это точки ветвления накрытия $p_{1.1}$.

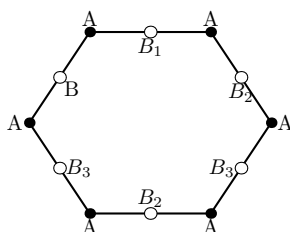


Рис. 5.1

Аналогично строятся фактор-рисунки (совпадающие с T_1, T_2, T_3) остальных девяти рисунков с группой автоморфизмов второго порядка.

Утверждение 5.2. Существует отображение кривой рода 1 на кривую рода 0, являющееся композицией $p_2 \circ f \circ g$, где $f(t) = (4t)/(t + 1)^2$, $g(t) = 1/t$ и p_2 — это двулистное накрытие, разветвлённое в четырёх точках.

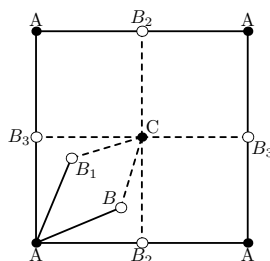


Рис. 5.2. \hat{T}_1

Доказательство. Отображение кривых g соответствует переходу к объединению рисунка с двойственным к нему рисунком. В частности, для T_1 полученный рисунок изображён на рис. 5.2.

Отображение f соответствует переходу к двойственному рисунку ST_1 (рис. 5.3), так как нули \hat{T}_1 переходят в точки бесконечность ST_1 и наоборот.

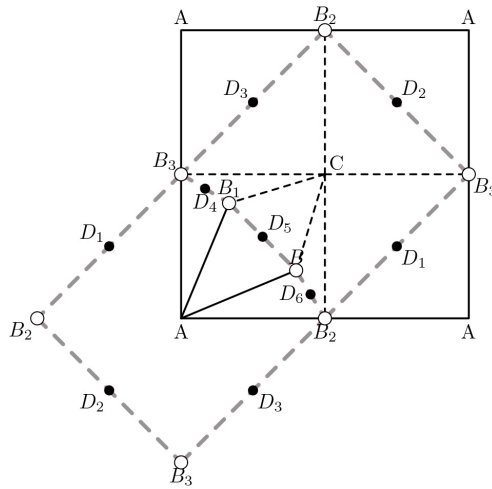


Рис. 5.3. Рисунок ST_1 , двойственный к \hat{T}_1

Заметим, что группа автоморфизмов ST_1 равна \mathbb{Z}_2 , следовательно, можно рассмотреть фактор-рисунок (рис. 5.4).

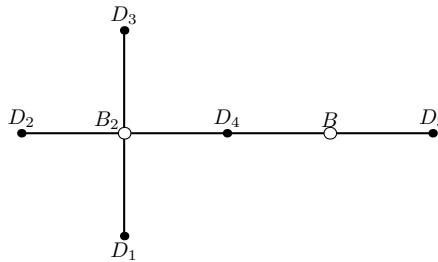


Рис. 5.4

Отображение факторизации — двулистное накрытие, разветвлённое в точках D_1, D_2, D_3 и D_5 , — это и есть p_2 . \square

Следствие 5.3. Функция Белого β_i рисунка T_i есть композиция $f \circ g \circ \beta_{si}$, где β_{si} — это функция Белого рисунка ST_i .

Замечание 5.4. Формула для функции Белого $\beta_{i,j}$ рисунка $P_{i,j}$ во всех девяти случаях совпадает с формулой для β_i .

Далее приведены вычисления всех десяти пар Белого рисунков $P_{i,j}$.

Утверждение 5.5. $z^4(z-3)^2$ — обобщённый многочлен Чебышёва рисунка, изображённого на рис. 5.4.

Утверждение 5.6. Пара Белого рисунка ST_1 — это функция Белого

$$\beta_{s1} = 1 - \frac{1}{16}z^4(z-3)^2$$

на кривой $y^2 = z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4$.

Замечание 5.7. Результаты утверждений 5.5 и 5.6 совпадают с результатами в [8].

Доказательство. Формула для функции Белого сразу получается из условия на критические значения функции Белого (см. определение 2.2). Далее, $z^4(z-3)^2 - 16 = (z-2)^2 P_4(z)$, где значение 2 как раз соответствует вершине D_4 валентности 2. Отсюда следует, что

$$P_4(z) = z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4 = y^2. \quad \square$$

Утверждение 5.8.

$$\beta_1 = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left(\frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right).$$

Доказательство. Обозначим через $\beta_{\hat{T}_1}$ функцию Белого рисунка \hat{T}_1 (см. рис. 5.2). Тогда из утверждений 5.1 и 5.2 получаем, что

$$\beta_{\hat{T}_1} = \frac{4\beta_1}{(\beta_1 + 1)^2} = \frac{1}{\beta_{s1}}.$$

Таким образом, получаем уравнение на β_1 :

$$(\beta_1 + 1)^2 = 4\beta_1\beta_{s1}.$$

Решая его, получаем функцию

$$\beta_1 = -\frac{1}{8}z^6 + \frac{3}{4}z^5 - \frac{9}{8}z^4 + 1 + y \left(\frac{1}{8}z^4 - \frac{5}{8}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right). \quad \square$$

Рассмотрим накрытие $p_{1,1}$ (см. (5.1)) в случае рисунка $P_{1,1}$. Оно имеет вид $(z, w) \rightarrow z, w^2 \mapsto f$. Дивизор функции f равен

$$(f) = A + C + B + B_1 + 2D. \quad (5.2)$$

Функция f определена с точностью до умножения на квадрат, $\deg(D) = -2$. Дивизор D может быть представлен в виде

$$(D) = -2A - 2C + T + X, \quad (5.3)$$

где $y(T) = 0, z(T) = -1, X$ — некоторая точка. Заметим, что точки ветвления A и C находятся в бесконечности, а B и B_2 — в $z = 3$.

Утверждение 5.9. Либо $w^2 = f_1 = z - 3$, либо $w^2 = f_i = (z - 3)(z + 1)(z - \alpha)$, где $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0$, $i = 2, 3, 4$.

Доказательство. Используя (5.2) и (5.3), мы можем представить дивизор функции f в виде

$$(f) = -3A - 3C + B_1 + B_2 + 2T + 2X.$$

Далее, $(z - 3) = B + B_1 - A - C$ и $(z + 1) = 2T - A - C$. Следовательно,

$$\left(\frac{f}{(z - 3)(z + 1)} \right) = -A - C + 2X.$$

Но такие функции есть просто $z - z_j$, где z_j — корень уравнения

$$z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 4z - 4 = 0.$$

Получаем либо $f_1 = z - 3$, либо $f_{2,3,4} = (z - 3)(z + 1)(z - \alpha)$, где $\alpha^3 - 3\alpha^2 - 4 = 0$. \square

Таким образом, получены четыре кривые рода 3, которые соответствуют четырём рисункам $P_{1.1}$, $P_{1.2}$, $P_{1.3}$, $P_{1.4}$. Заметим, что у рисунков $P_{1.2}$, $P_{1.3}$, $P_{1.4}$ одинаковый порядок группы вращений ребёр, равный 1152, и следовательно (см. [1]), они лежат в одной орбите действия группы Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ и им соответствуют решения $f_{2,3,4}$. Таким образом, доказан первый пункт теоремы 4.1.

Рассмотрим рисунки $P_{2.1}$, $P_{2.2}$, $P_{2.3}$, $P_{2.4}$ и их фактор-рисунок T_2 .

Отображение факторизации с фактор-рисуном T_2 также можно понимать как алгебраическое накрытие $p_{2.1}$ степени 2: $(z, w) \rightarrow z$, $w^2 \mapsto f$, разветвлённое в точках A , C , B_1 , B_2 , где C — это бесконечно удалённая точка.

Применив утверждения 5.1 и 5.2, получим рисунок ST_2 (рис. 5.5).

После факторизации по автоморфизму второго порядка получаем рисунок рода 0 (рис. 5.6).

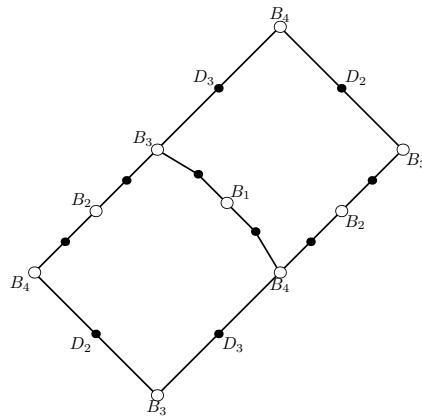


Рис. 5.5. ST_2

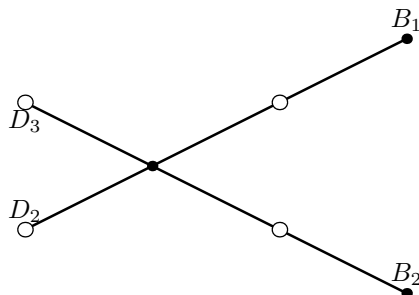


Рис. 5.6

Это отображение факторизации можно понимать как алгебраическое накрытие степени 2, разветвлённое в точках B_1, B_2, D_2, D_3 . Можно считать, что обобщённый многочлен Чебышёва полученного дерева — это многочлен

$$P(z) = z^4(z - (a + i))(z - (a - i)) = z^4((z - a)^2 + 1).$$

Коэффициенты многочлена должны быть рациональны, и единственное a , удовлетворяющее такому условию, — это

$$a = \pm \frac{3}{4}.$$

Утверждение 5.10. Пара Белого рисунка ST_2 — это функция

$$\beta_{s2} = -\frac{27}{16}z^4(5z^2 - 6z + 5)$$

на кривой

$$y^2 = 225z^4 - 90z^3 + 69z^2 + 108z + 60.$$

Доказательство. Формула для функции Белого сразу получается из условия на критические значения функции Белого (см. определение 2.2):

$$\beta_{s2} - 1 = -\frac{1}{16}(15z^2 + 12z + 4)(3z^2 - 3z + 2)^2,$$

следовательно,

$$y^2 = 3(5z^2 - 6z + 5)(15z^2 + 12z + 4). \quad \square$$

Аналогично предыдущему случаю получаем уравнение на функцию Белого β_2 рисунка T_2 :

$$\beta_2^2 + 2\beta_2(1 - 2\beta_{s2}) + 1.$$

Решая его, получаем

$$\beta_{T_2} = -1 - \frac{135}{8}z^6 + \frac{81}{4}z^5 - \frac{135}{8}z^4 - \frac{9}{8}z^4y - \frac{3}{4}z^2y + \frac{9}{8}z^3y. \quad (5.4)$$

Как уже отмечалось, накрытие $p_{2,1}$ имеет вид $w^2 = f$, где функция f определена с точностью до умножения на квадрат и дивизор функции f равен

$$(f) = A + C + B_1 + B_2 + 2D,$$

где $\deg(D) = -2$, причём дивизор D можно представить в виде

$$(D) = -2A - 2C + B_1 + X.$$

Введём функцию g , такую что дивизор (g) удовлетворяет условию

$$(f) = (z - z(B_1))(g).$$

Тогда $g = y + kQ(z)$, где $Q(z) = (z - z(B_1))(z - z(B_2))$. Находим k из условия равенства нулю дискриминанта уравнения $(y + kQ(z))(-y + kQ(z)) = 0$:

$$k = \pm \frac{3}{4}.$$

Соответственно

$$g_1 = y + \frac{15}{4}z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{15}{4}, \quad g_2 = y - \frac{15}{4}z^2 + \frac{9}{2}z - \frac{15}{4}.$$

Таким образом, получается четыре варианта для функции f : $f_{1,2,3,4} = g_{1,2}\alpha_{1,2}$, где $\alpha_{1,2}$ — корни уравнения $5x^2 - 6x + 5 = 0$, что доказывает пункт 2 теоремы 4.1.

Перейдём к рисункам $P_{3,1}$, $P_{3,2}$ и их фактор-рисунку T_3 .

Заметим, что сам T_3 обладает \mathbb{Z}_2 -симметрией, и следовательно, по тем же причинам, что и в предыдущих случаях, можем рассмотреть факторизацию по группе автоморфизмов \mathbb{Z}_2 . Это алгебраическое накрытие степени 2, разветвлённое в точках A , B_3 , B_4 и в точке C (центре грани квадрата, см. рис. 2.1). Фактор-рисунком является «ёж» с тремя рёбрами. Его обобщённым многочленом Чебышёва является многочлен $P(z) = z^3$.

Как уже отмечалось, алгебраическое накрытие степени 2, разветвлённое в точках A , C , B_1 и B_2 (см. рис. 2.1), при котором $P_{3,1}$ или $P_{3,2}$ накрывает T_3 , имеет вид

$$(z, w) \rightarrow z, \quad w^2 \mapsto f,$$

где дивизор функции f равен

$$(f) = A + C + B_1 + B_2 + 2D.$$

Кратности точек A , C , B_1 , B_2 равны 1, $\deg(D) = -2$. Можно считать, что $D = X - 3C$. Тогда

$$(f) = A + B_1 + B_2 + 2X - 5C.$$

Из топологических соображений видно, что

$$(z - 1) = B_1 + B_2 - 2C.$$

Введём функцию

$$g = \frac{f}{z - 1}.$$

Тогда $(g) = A + 2X - 3C$. Исходя из общей теории, можно записать g в виде $g = y + P(z)$, где $\deg(P) = 1$, т. е. $g = y + kz + l$. Значение g в точке A равно 0, но $z(A) = y(A) = 0$, следовательно, $l = 0$. Найдём k . Для этого потребуем равенства нулю дискриминанта уравнения $(y + kz)(-y + kz) = 0$. Вычисляя, получаем, что либо $k = \pm 3$, либо $k = \pm i$. Таким образом, $g_1 = y + z\sqrt{3}$, $g_2 = y + iz$. Получились следующие кривые рода 3:

$$w^2 = (y + z\sqrt{3})(z-1), \quad y^2 = z(z^2 + z + 1), \quad w^2 = (y + iz)(z-1), \quad y^2 = z(z^2 + z + 1).$$

Заметим, что если в первой кривой сделать замену $y = Y\sqrt{3}$, $w = w$, а во второй $y = iY$, $w = w$, то получится в точности формулировка третьего пункта теоремы 4.1.

Литература

- [1] Адрианов Н. М. Классификация примитивных групп вращений плоских рёбер // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 1069—1083.
- [2] Амбург Н. Я. Симметрии графов на поверхностях и алгебраические кривые: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 2005.
- [3] Бычков Б. С., Епифанов Е. М., Дрёмов В. А. Вычисление пар Белого шестирёберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3 // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2007. — Т. 13, вып. 6. — С. 137—148.
- [4] Епифанов Е. М. Шестирёберные рисунки рода 3 с единственной вершиной: Дипломная работа. — М., 2006.
- [5] Кочетков Ю. Ю. Список склеек рода 3 с единственной вершиной: Препринт. — 2007.
- [6] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Факториал Пресс, 2000.
- [7] Шабат Г. Б. Комбинаторно-топологические методы в теории алгебраических кривых: Дис... докт. физ.-мат. наук. — М., 1998.
- [8] Betrema J., Pere D., Zvonkin A. Plane trees and their Shabat polynomials // *Discrete Math.* — 1996. — Vol. 153, no. 1-3. — P. 47—58.
- [9] Lando S. K., Zvonkin A. K. *Graphs on Surfaces and Their Application.* — Berlin: Springer, 2004.
- [10] Shabat G. B., Voevodsky V. A. Drawing curves over number fields // *The Grothendieck Festschrift.* — Basel: Birkhäuser, 1990. — P. 199—227.

