



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. V. Kovalev, Estimates for conformal radius and distortion theorems for univalent functions, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2000, Volume 263, 141–156

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

February 8, 2025, 04:14:59



Л. В. Ковалев

ОЦЕНКИ КОНФОРМНОГО РАДИУСА И ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $r(D, a)$ конформный радиус области D относительно конечной точки $a \in D$ и положим $r(D, \infty) = r(\{1/z : z \in D\}, 0)$. Пусть $\mathcal{D}(R)$ – семейство всех односвязных областей $D \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющих условиям $0, 1 \in D$, $r(D, 0) = R$. Через $\mathcal{D}^c(R)$ обозначим множество всех выпуклых областей семейства $\mathcal{D}(R)$.

В статье [1] была решена следующая экстремальная задача.

Задача 1. В семействе $\mathcal{D}(R)$ найти область с наибольшим значением $r(D, 1)$.

Более простое решение этой задачи, не использующее теорем об экстремальном разбиении, приводится в §1 (теорема 1). Так как экстремальная область задачи 1 не является выпуклой, естественно рассмотреть аналогичную проблему в классе $\mathcal{D}^c(R)$.

Задача 2. В семействе $\mathcal{D}^c(R)$ найти область с наибольшим значением $r(D, 1)$.

Решение задачи 2 приведено в §1 (теорема 2). Важность оценок конформного радиуса обусловлена их связью с теоремами искажения, которые рассматриваются во втором параграфе.

В дальнейшем $\mathbb{U}_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, $\mathbb{U}_r = \mathbb{U}_r(0)$, $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1$, S – класс регулярных и однолистных в \mathbb{U} функций f , нормированных условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$; $S_M = \{f \in S : |f(z)| < M \text{ при } |z| < 1\}$, $M > 1$. Функции Кебе и Пика обозначаем через k и k_M , обратные им, соответственно, l и l_M . Таким образом,

$$\begin{aligned} k(z) &= z(1-z)^{-2}, & l(w) &= (1+2w - \sqrt{1+4w})/2w, \\ k_M(z) &= Ml(k(z)/M), & l_M(w) &= l(Mk(w/M)). \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00443) и ISSEP (грант s99-406).

Известны многочисленные теоремы искажения для функций из классов S и S_M (см., например, [2–5]). Некоторые из них могут быть непосредственно перенесены на функции, обратные элементам этих классов. Например, из оценки $|f(z)|$ в классе S_M следует, что при $g^{-1} \in S_M$ и $|w_0| = \rho < -M l(-1/(4M))$ выполняется неравенство

$$l_M(\rho) \leq |g(w_0)| \leq -l_M(-\rho). \quad (1)$$

Равенство в левой (соответственно, в правой) части неравенства (1) достигается только при $g(w) = w_0 \rho^{-1} l_M(\rho w_0^{-1} w)$ (соответственно, только при $g(w) = -w_0 \rho^{-1} l_M(-\rho w_0^{-1} w)$).

Тем не менее, многие теоремы искажения для обратных функций не сводятся к соответствующим оценкам для прямых функций. Например, используя классическую теорему Бибербаха

$$k'(-|z|) \leq |f'(z)| \leq k'(|z|), \quad f \in S, \quad |z| < 1,$$

вместе с неравенством $-k(-|z|) \leq |f(z)| \leq k(|z|)$, $f \in S$, $|z| < 1$, для оценки модуля производной обратной функции, получим

$$\frac{1}{k'(-l(-\rho))} \leq |g'(w_0)| \leq l'(-\rho), \quad g^{-1} \in S, \quad |w_0| = \rho < \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Равенство достигается в правой части (2) тогда и только тогда, когда $g(w) = -w_0 \rho^{-1} l(-\rho w_0^{-1} w)$. В левой части (2) равенство не имеет места ни при каком $\rho > 0$. Точная оценка $|g'(w)|$ снизу будет дана в §2 (следствие 2).

Изучение аналогичной проблемы для класса S_M показывает (см. следствие 1), что функция l_M не дает минимума модуля производной при $M < 8/7$. Вопрос о точной оценке $|g'(w)|$ снизу в этом случае остается открытым.

§1. Оценки конформного радиуса

Решение задач 1 и 2 основывается на следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, имеющая более одной граничной точки, $z_0 \in D$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} (r(D, z_0 + \varepsilon) - r(D, z_0)) \leq 4, \quad (3)$$

где равенство достигается только при $D = \mathbb{C} \setminus \{z_0 + x : x \leq c\}$, где $c < 0$.

Если, дополнительно, D – выпуклая область, то

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} (r(D, z_0 + \varepsilon) - r(D, z_0)) \leq 2, \quad (4)$$

где равенство достигается только при $D = \{z : \operatorname{Re} z > c\}$, где $c < \operatorname{Re} z_0$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $z_0 = 0$. Пусть $r = r(D, 0)$. Существует такая функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots \in S$, что $z \mapsto rf(z)$ отображает \mathbb{U} на D . Ввиду равенств

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} (r(D, \varepsilon) - r) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} (r|f'(f^{-1}(\varepsilon/r))|(1 - |f^{-1}(\varepsilon/r)|^2) - r) = \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} r(|1 + 2c_2 \varepsilon/r| - 1) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} r \operatorname{Re}(2c_2 \varepsilon/r) = 2 \operatorname{Re} c_2, \quad (5) \end{aligned}$$

оба утверждения леммы следуют из известных оценок для $\operatorname{Re} c_2$ (см., например, [2, с.50, 204]).

Теорема 1 (Е. Г. Емельянов, [1, с.100]). При $D \in \mathcal{D}(R)$ выполняется неравенство

$$r(D, 1) \leq R + 4.$$

Равенство достигается только при $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -R/4]$.

Доказательство. Предположим, что $[0, 1] \subset D$. Тогда, интегрируя неравенство (3) вдоль отрезка $[0, 1]$, получим

$$r(D, 1) - r(D, 0) \leq 4$$

с соответствующим утверждением о случае равенства. В случае $[0, 1] \not\subset D$ с учетом теоремы Кебе о покрытии получаем

$$r(D, 1) \leq 4 \operatorname{dist}(1, \partial D) < 4.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. При $D \in \mathcal{D}^c(R)$ выполняется неравенство

$$r(D, 1) \leq R + 2.$$

Равенство достигается только при $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -R/2\}$.

Доказательство. В силу условий теоремы $[0, 1] \subset D$. Интегрируя неравенство (4) вдоль отрезка $[0, 1]$, получим $r(D, 1) -$

$r(D, 0) \leq 2$ с требуемым утверждением о знаке равенства. Теорема доказана.

С использованием дополнительных геометрических характеристик области $D \in \mathcal{D}^c(R)$ теорема 2 может быть уточнена следующим образом.

Теорема 3. Пусть $D \in \mathcal{D}^c(R)$.

а) Если $z_0 \in \partial D \cap (-\infty, 0)$ и выходящие из точки z_0 касательные к ∂D образуют с положительным направлением вещественной оси углы $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$, то

$$r(D, 1) \leq R + \frac{2}{\pi}(\varphi_1 + \varphi_2) \sin \frac{\pi\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}.$$

Равенство достигается в том и только том случае, если D – внутренность угла с вершиной на луче $(-\infty, 0)$.

б) Если $(-\infty, 0) \subset D$, то

$$r(D, 1) \leq R.$$

Равенство достигается в том и только в том случае, если D – горизонтальная полоса или полуплоскость, ограниченная горизонтальной прямой.

Доказательство. а) Пусть G – внутренность угла, образованного касательными к ∂D в точке z_0 , $G \supset D$. При $k > 0$ положим

$$D(k) = \{z_0 + k(z - z_0) : z \in D\}.$$

В силу выпуклости области D при $k_1 < k_2$ имеем $D(k_1) \subset D(k_2)$, где равенство возможно только при $D = G$. Следовательно, функция

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} r(D, z_0 + x)/x = r(D(1/x), z_0 + 1)$$

строго убывает при $x > 0$, за исключением случая $D = G$, когда она постоянна. Учитывая, что $\bigcup_{x>0} D(x) = G$, находим

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = r(G, z_0 + 1) = \frac{2}{\pi}(\varphi_1 + \varphi_2) \sin \frac{\pi\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} r(D, 1) &= (|z_0| + 1)f(|z_0| + 1) \leq (|z_0| + 1)f(|z_0|) = R + f(|z_0|) \leq \\ &\leq R + \frac{2}{\pi}(\varphi_1 + \varphi_2) \sin \frac{\pi\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_2}, \end{aligned}$$

где равенство достигается только при $D = G$.

б) Легко видеть, что $\{z-1 : z \in D\} \subset D$, где равенство возможно только в случаях, указанных в формулировке. Следовательно,

$$r(D, 1) = r(\{z-1 : z \in D\}, 0) \leq R.$$

Теорема доказана.

В заключение первого параграфа приведем пример приложения оценок конформного радиуса.

Теорема 4. Если $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots \in S^c$, то при $|z| < 1$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}(c_2 f(z)) > -\frac{1}{2}. \quad (6)$$

Константа $-1/2$ является наибольшей возможной.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. Если $D \subset \mathbb{C}$ - выпуклая область, $D \neq \mathbb{C}$, то $r(D, a)$ - вогнутая функция от a при $a \in D$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $0 \in D$, $r(D, 0) = 1$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$ лежит в D . Для доказательства леммы достаточно установить неравенство

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-2} (r(D, \varepsilon) + r(D, -\varepsilon) - 2) \leq 0. \quad (7)$$

Пусть функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots \in S^c$ отображает \mathbb{U} на D . Пусть $z_1 = f^{-1}(\varepsilon)$, $z_2 = f^{-1}(-\varepsilon)$. Из соотношений $z_1 + c_2 z_1^2 + o(\varepsilon^2) = \varepsilon$ и $z_2 + c_2 z_2^2 + o(\varepsilon^2) = -\varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$z_1 + z_2 = -c_2(z_1^2 + z_2^2) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

С учетом разложения $|1+w| = 1 + \operatorname{Re} w + (\operatorname{Im} w)^2/2 + o(|w|^2)$, $w \rightarrow 0$, находим

$$|f'(z_i)| = 1 + \operatorname{Re}(2c_2 z_i + 3c_3 z_i^2) + 2(\operatorname{Im}(c_2 z_i))^2 + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Из (9), (8) и соотношений $z_1 = \varepsilon + o(1)$, $z_2 = -\varepsilon + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, следует

$$|f'(z_1)| + |f'(z_2)| = 2 + 2\varepsilon^2 \operatorname{Re}(3c_3 - 2c_2^2) + 4\varepsilon^2 (\operatorname{Im} c_2)^2 + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} r(D, \varepsilon) + r(D, -\varepsilon) &= |f'(z_1)|(1 - |z_1|^2) + |f'(z_2)|(1 - |z_2|^2) = \\ &= 2 + 2\varepsilon^2 (\operatorname{Re}(3c_3 - 2c_2^2) + 2(\operatorname{Im} c_2)^2 - 1) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-2} (r(D, \varepsilon) + r(D, -\varepsilon) - 2) = 2(\operatorname{Re}(3c_3 - 2c_2^2) + 2(\operatorname{Im} c_2)^2 - 1),$$

и остается показать, что $\operatorname{Re}(3c_3 - 2c_2^2) + 2(\operatorname{Im} c_2)^2 \leq 1$.

В силу условия $f \in S^c$ функция

$$g(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = 1 + 2c_2z + (6c_3 - 4c_2^2)z^2 + \dots = 1 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

удовлетворяет условию $\operatorname{Re} g(z) > 0$, $z \in \mathbb{U}$. Тогда при $\alpha \in \mathbb{R}$ функция

$$\begin{aligned} g_\alpha(z) &= \frac{(1 + e^{i\alpha})g(z) + 1 - e^{i\alpha}}{(1 - e^{i\alpha})g(z) + 1 + e^{i\alpha}} = \\ &= 1 + e^{i\alpha}a_1z + e^{i\alpha}(a_2 - (1 - e^{i\alpha})a_1^2/2)z^2 + \dots \end{aligned}$$

также имеет положительную вещественную часть в \mathbb{U} . Следовательно (см. [2, с. 109]), $|a_2 - (1 - e^{i\alpha})a_1^2/2| \leq 2$. Учитывая, что

$$\max_{\alpha \in \mathbb{R}} |a_2 - a_1^2/2 + e^{i\alpha}a_1^2/2| = |a_2 - a_1^2/2| + |a_1|^2/2 = 6|c_3 - c_2^2| + 2|c_2|^2,$$

получаем неравенство $3|c_3 - c_2^2| + |c_2|^2 \leq 1$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}(3c_3 - 2c_2^2) + 2(\operatorname{Im} c_2)^2 = 3\operatorname{Re}(c_3 - c_2^2) + |c_2|^2 \leq 1.$$

Неравенство (7), из которого следует утверждение леммы, доказано.

Доказательство теоремы 4. Пусть $D = \{f(z) : |z| < 1\}$. Из (5) следует асимптотическое равенство

$$r(D, w) = 1 + 2\operatorname{Re}(c_2w) + o(|w|), \quad w \rightarrow 0.$$

В силу леммы 2 имеет место неравенство

$$r(D, w) \leq 1 + 2\operatorname{Re}(c_2w), \quad w \in D.$$

Учитывая, что конформный радиус положителен, приходим к утверждению (6). Так как при $0 < p \leq 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ функция

$$f_{p,\alpha}(z) = \frac{e^{-i\alpha}}{2p} \left\{ \left(\frac{1 + e^{i\alpha}z}{1 - e^{i\alpha}z} \right)^p - 1 \right\} = z + pe^{i\alpha}z^2 + \dots,$$

принадлежит классу S^c и

$$\lim_{r \uparrow 1} p e^{i\alpha} f_{p,\alpha}(-r e^{-i\alpha}) = -\frac{1}{2},$$

то константа $-1/2$ в (6) является наибольшей возможной при любом $c_2 \neq 0$.

§2. ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Начнем со вспомогательного утверждения, устанавливающего связь между конформными радиусами областей, образующих экстремальное разбиение области D , и конформным радиусом области D . Через $g_D(z, z_0)$ обозначаем функцию Грина области D с полюсом в точке $z_0 \in D$.

Лемма 3. Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — односвязная область, дополнение которой содержит не менее двух точек; $a_1, \dots, a_n \in D$ — различные точки, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$. Пусть $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал, круговые области D_1, \dots, D_n которого реализуют максимум произведения $\prod_{k=1}^n r^{\alpha_k}(G_k, a_k)$ по всем непересекающимся односвязным областям $G_k \subset D$. Если $Q(z)dz^2$ не имеет в D нулей нечетного порядка, то найдутся такие числа $j_1, \dots, j_n \in \{-1, 1\}$, что:

- а) если $k \neq l$ и $D \cap \partial D_k \cap \partial D_l \setminus \bigcup_{m \neq k,l} \partial D_m \neq \emptyset$, то $j_k + j_l = 0$;
- б) при $k = 1, \dots, n$

$$r(D_k, a_k) = r(D, a_k) \exp \left\{ \frac{1}{j_k \sqrt{\alpha_k}} \sum_{l \neq k} j_l \sqrt{\alpha_l} g_D(a_k, a_l) \right\}.$$

Доказательство. С помощью конформного отображения сведем задачу к случаю $D = \mathbb{U}$. Нормируем $Q(z)$ из условия $Q(z) \sim -\alpha_k(z - a_k)^{-2}$, $z \rightarrow a_k$. Условия леммы обеспечивают существование в области D однозначной ветви функции $Q^{1/2}(z)$. Определим j_1, \dots, j_n соотношениями

$$Q^{1/2}(z) \sim i \frac{j_k \sqrt{\alpha_k}}{z - a_k}, \quad z \rightarrow a_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда функция

$$Q^{1/2}(z) - i \sum_{k=1}^n \frac{j_k \sqrt{\alpha_k}}{z - a_k}$$

регулярна в D . Следовательно, функция

$$\operatorname{Im} \int Q^{1/2}(z) dz - \sum_{k=1}^n j_k \sqrt{\alpha_k} \log |z - a_k|$$

является гармонической в D . Множество $\Phi = \bigcup_{k=1}^n \partial D_k$ связно, содержит границу ∂D области D и состоит из замыканий траекторий квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$. Следовательно, $\operatorname{Im} \int Q^{1/2}(z) dz = \text{const}$ на Φ ; без ограничения общности эту константу можно считать равной нулю. Обозначая

$$h(z) = \sum_{k=1}^n j_k \sqrt{\alpha_k} g_D(z, a_k),$$

по принципу максимума получим $\operatorname{Im} \int Q^{1/2}(z) dz = -h(z)$, $z \in D$.

Следовательно, $\Phi = \{z \in \bar{D} : h(z) = 0\}$. Пусть $k \neq l$, $z_0 \in D \cap \partial D_k \cap \partial D_l \setminus \bigcup_{m \neq k, l} \partial D_m$. Тогда при малых $r > 0$ имеем $\mathbb{U}_r(z_0) \subset \bar{D}_k \cup \bar{D}_l$. Так как функция $h(z)$ принимает в $\mathbb{U}_r(z_0)$ значения разных знаков, то с учетом равенств $\operatorname{sign} h(z) = j_m$, $z \in D_m$, $m = k, l$, получаем $j_k + j_l = 0$. Утверждение (а) доказано.

По принципу максимума $g_{D_k}(z, a_k) = h(z)/j_k \sqrt{\alpha_k}$, $z \in D_k$. Прибавляя к обеим частям этого равенства $\log |z - a_k|$ и переходя к пределу при $z \rightarrow a_k$, получим (б). Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть область D , точки a_1, a_2 и числа α_1, α_2 удовлетворяют условиям леммы 3. Если B — односвязная область, $b_1, b_2 \in B$ и $g_B(b_1, b_2) = g_D(a_1, a_2)$, то область B , точки b_1, b_2 и числа α_1, α_2 также удовлетворяют условиям леммы 3.

Действительно, в этом случае существует конформное отображение D на B , переводящее a_1, a_2 в b_1, b_2 соответственно.

Перед формулировкой основных результатов заметим, что по теореме Кебе о покрытии область определения функции g , удовлетворяющей условию $g^{-1} \in S$, заведомо содержит круг $\mathbb{U}_{1/4}$, но не всегда содержит круг \mathbb{U}_r при $r > 1/4$ (в случае $g^{-1} \in S_M$ число $1/4$ следует заменить на $-M l(-1/(4M))$). Следовательно, ограничения, налагаемые в нижеследующих формулировках на переменную ρ , не могут быть ослаблены.

Теорема 5. Пусть $g^{-1} \in S_M$, $0 < \rho < -Ml(-1/(4M))$. Тогда для любого $\delta \leq \delta(\rho, M) = 1 + \frac{1 - 2Mk(\rho/M)}{\sqrt{1 + 4Mk(\rho/M)}}$ при $|w_0| = \rho$ имеет место неравенство

$$\frac{|g'(w_0)|}{|g(w_0)|^\delta} \geq \frac{l'_M(\rho)}{l_M(\rho)^\delta}. \quad (10)$$

Равенство в (10) достигается только при $g(w) = w_0 \rho^{-1} l_M(\rho w_0^{-1} w)$. При $\delta > \delta(\rho, M)$ неравенство (10) в общем случае неверно.

Доказательство. Зафиксируем $\rho \in (0, -Ml(-1/(4M)))$ и введем константы $\rho' = Mk(\rho/M)$, $\rho'' = -Mk(-\rho/M)$, $\alpha_1 = 1/\sqrt{1 + 4\rho'}$, $\alpha_2 = 1/\sqrt{1 - 4\rho''}$, $R = M/\rho$, $A = (R + 1)/(R - 1)$. Заметим, что $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ в силу неравенства $\rho'' < 1/4$, вытекающего из условия $\rho < -Ml(-1/(4M))$. Рассмотрим квадратичный дифференциал $Q_\alpha(w)dw^2$, где

$$Q_\alpha(w) = -P_\alpha(w) (z(z - 1)(z - R^2))^{-2},$$

$$P_\alpha(w) = \begin{cases} (z + R)^2 (z^2 + ((\frac{R-1}{\alpha})^2 - R^2 - 1)z + R^2), & \alpha_1 \leq \alpha \leq A^{-1}, \\ (z^2 + ((R^2 - 1)/\alpha^2 - R^2 - 1)z + R^2)^2, & A^{-1} \leq \alpha \leq A, \\ (z - R)^2 (z^2 + ((\frac{R+1}{\alpha})^2 - R^2 - 1)z + R^2), & A \leq \alpha \leq \alpha_2. \end{cases}$$

Критические траектории этого дифференциала разбивают \mathbb{U}_R на две круговые области $D_0(\alpha)$, $D_1(\alpha)$, причем

$$r^{\alpha^2}(D_0(\alpha), 0)r(D_1(\alpha), 1) \geq r^{\alpha^2}(G_0, 0)r(G_1, 1)$$

для любых непересекающихся односвязных областей $G_i \subset \mathbb{U}_R$.

При $\alpha_1 \leq \alpha < A^{-1}$ полином P_α имеет в \mathbb{U}_R один нуль $c < 0$. Обозначим $B(\alpha) = \mathbb{U}_R \setminus [-1, c]$. Учитывая равенство

$$c + R^2/c = R^2 + 1 - (R - 1)^2/\alpha^2,$$

вытекающее из формулы Виета, нетрудно вычислить

$$r(B(\alpha), 0) = \frac{4R^2}{2R - c - R^2/c} = \frac{4\alpha^2}{1 - \alpha^2} \frac{1}{(1 - \rho/M)^2},$$

$$g_{B(\alpha)}(0, 1) = \log \frac{\sqrt{R^2 - (c + R^2/c) + 1} + R - 1}{\sqrt{R^2 - (c + R^2/c) + 1} - R + 1} = \log \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

При $A^{-1} \leq \alpha \leq A$ положим $B(\alpha) = \mathbb{U}_R$. В этом случае $r(B(\alpha), 0) = R$, $g_{B(\alpha)}(0, 1) = \log R$.

Наконец, при $A < \alpha \leq \alpha_2$ обозначим $B(\alpha) = \mathbb{U}_R \setminus [c, 1]$, где c – единственный нуль полинома P_α в \mathbb{U}_R . Аналогично первому случаю, находим

$$r(B(\alpha), 0) = \frac{4\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \frac{1}{(1 + \rho/M)^2}, \quad g_{B(\alpha)}(0, 1) = \log \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.$$

Заметим, что $r(B(\alpha_1), 0) = r(B(\alpha_2), 0) = 1/\rho$, что в силу возрастания функции $r(B(\alpha), 0)$ на отрезке $[\alpha_1, A^{-1}]$ и ее убывания на $[A, \alpha_2]$ влечет неравенство $r(B(\alpha), 0) \geq 1/\rho$ при всех α .

По аналогии с [1, с.95] введем в рассмотрение семейство областей $\{D(\alpha) : \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$, определяемых следующими условиями:

- (1) $D(\alpha) \in \mathcal{D}(1/\rho)$;
- (2) $D_0(\alpha) \cup D_1(\alpha) \subset D(\alpha) \subset B(\alpha)$;
- (3) $D(\alpha)$ симметрична относительно вещественной оси.

Найдем явное выражение для функции $r(\alpha) = \exp(-g_{D(\alpha)}(0, 1))$. Применяя лемму 3 к области $D(\alpha)$ и дифференциалу $Q_\alpha(w)dw^2$, находим

$$r(D_0(\alpha), 0) = r(\alpha)^{1/\alpha}/\rho. \quad (11)$$

Применяя эту же лемму к области $B(\alpha)$ и квадратичному дифференциалу $Q_\alpha(w)dw^2$, получим

$$r(D_0(\alpha), 0) = \begin{cases} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/\alpha} \frac{4\alpha^2}{1-\alpha^2} \frac{1}{(1-\rho/M)^2}, & \alpha_1 \leq \alpha < A^{-1}, \\ (M/\rho)^{1-1/\alpha}, & A^{-1} \leq \alpha \leq A, \\ \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)^{1/\alpha} \frac{4\alpha^2}{\alpha^2-1} \frac{1}{(1+\rho/M)^2}, & A < \alpha \leq \alpha_2. \end{cases}$$

Из двух последних равенств немедленно следует

$$r(\alpha) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \left(\frac{4\alpha^2\rho'}{1-\alpha^2}\right)^\alpha, & \alpha_1 \leq \alpha < A^{-1}, \\ M^{\alpha-1}\rho, & A^{-1} \leq \alpha \leq A, \\ \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \left(\frac{4\alpha^2\rho''}{\alpha^2-1}\right)^\alpha, & A < \alpha. \end{cases} \quad (12)$$

В силу соотношений

$$(\log r(\alpha))' = \begin{cases} \log \frac{4\alpha^2 \rho'}{1-\alpha^2} > \log \frac{4\alpha_1^2 \rho'}{1-\alpha_1^2} = 0, & \alpha_1 < \alpha < A^{-1}, \\ \log M > 0, & A^{-1} < \alpha < A, \\ \log \frac{4\alpha^2 \rho''}{\alpha^2-1} > \log \frac{4\alpha_2^2 \rho''}{\alpha_2^2-1} = 0, & A < \alpha < \alpha_2 \end{cases}$$

функция $r(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ и строго возрастает от $r(\alpha_1) = l_M(\rho)$ до $r(\alpha_2) = -l_M(-\rho)$.

Пусть $|w_0| = \rho$, $\delta \leq \delta(\rho, M)$. Обозначим $f = g^{-1} \in S_M$ и положим $G = \{f(z)/w_0 : |z| < 1\}$. Легко видеть, что $r(G, 0) = 1/\rho$ и $g_G(0, 1) = -\log |g(w_0)|$. Из (1) следует, что уравнение $r(\alpha) = |g(w_0)|$ имеет единственный корень $\gamma \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Пусть G_0, G_1 – непересекающиеся односвязные области, лежащие в G и реализующие максимум произведения $r^{\gamma^2}(G_0, 0)r(G_1, 1)$ по всем областям данного вида. Из условия $G \subset \mathbb{U}_R$ следует $r^{\gamma^2}(G_0, 0)r(G_1, 1) \leq r^{\gamma^2}(D_0(\gamma), 0)r(D_1(\gamma), 1)$. Применяя лемму 3 с учетом равенств $g_G(0, 1) = g_{D(\gamma)}(0, 1)$, $r(G, 0) = r(D(\gamma), 0)$ и замечания 1, получим $r(G, 1) \leq r(D(\gamma), 1)$. Следовательно,

$$\frac{\rho |g'(w_0)|}{|g(w_0)|^\delta} = \frac{1 - |g(w_0)|^2}{|g(w_0)|^\delta r(G, 1)} \geq \frac{1 - r(\gamma)^2}{r(\gamma)^\delta r(D(\gamma), 1)}. \quad (13)$$

В силу леммы 4, приведенной ниже,

$$\frac{1 - r(\gamma)^2}{r(\gamma)^\delta r(D(\gamma), 1)} \geq \frac{1 - r(\alpha_1)^2}{r(\alpha_1)^\delta r(D(\alpha_1), 1)},$$

причем равенство достигается только при $\gamma = \alpha_1$, т.е. $|g(w_0)| = l_M(\rho)$, что влечет $g(w) = w_0 \rho^{-1} l_M(\rho w_0^{-1} w)$. Нетрудно видеть, что в последнем случае $G = B(\alpha_1) = D(\alpha_1)$, поэтому в (13) также достигается равенство. Суммируя вышесказанное, заключаем, что имеет место неравенство

$$\frac{\rho |g'(w_0)|}{|g(w_0)|^\delta} \geq \frac{1 - r(\alpha_1)^2}{r(\alpha_1)^\delta r(D(\alpha_1), 1)},$$

со знаком равенства только для функции $g(w) = w_0 \rho^{-1} l_M(\rho w_0^{-1} w)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Предположим, что $\delta > \delta(\rho, M)$, и покажем, что в этом случае (10) неверно. Действительно, по лемме 4 существует $\alpha' \in (\alpha_1, \alpha_2)$

такое, что

$$\frac{1 - r(\alpha')^2}{r(\alpha')^\delta r(D(\alpha'), 1)} < \frac{1 - r(\alpha_1)^2}{r(\alpha_1)^\delta r(D(\alpha_1), 1)}.$$

Пусть $f \in S_M$ отображает $\{z : |z| < 1\}$ на $\{\rho z : z \in D(\alpha')\}$. Нетрудно убедиться, что для функции $g = f^{-1}$ при $w_0 = \rho$ неравенство (10) не выполняется. Теорема доказана полностью.

Следствие 1. При $M \geq 8/7$ и $g^{-1} \in S_M$ имеет место неравенство

$$l'_M(\rho) \leq |g'(w_0)| \leq l'_M(-\rho), \quad (14)$$

где $|w_0| = \rho < -M l(-1/(4M))$. Равенство в левой (соответственно, в правой) части неравенства (14) достигается только при $g(w) = w_0 \rho^{-1} l_M(\rho w_0^{-1} w)$ (соответственно, только при $g(w) = -w_0 \rho^{-1} l_M(-\rho w_0^{-1} w)$).

При $M < 8/7$ справедлива только оценка сверху.

Доказательство. Правая часть неравенства (14) доказывается аналогично (2) при всех $M > 1$. Оценка снизу следует из теоремы 5 и легко проверяемого соотношения

$$\text{sign } \delta(-M l(-1/(4M)), M) = \text{sign}(M - 8/7), \quad M > 1.$$

Лемма 4. При $\delta \leq \delta(\rho, M)$ функция

$$\Phi(\alpha) = \log(1 - r(\alpha)^2) - \delta \log r(\alpha) - \log r(D(\alpha), 1)$$

строго возрастает на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$.

При $\delta > \delta(\rho, M)$ точка минимума $\Phi(\alpha)$ на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ не совпадает с α_1 .

Доказательство. В силу строгого возрастания функции $r(\alpha)$ при доказательстве первого утверждения достаточно рассмотреть случай $\delta = \delta(\rho, M) = 1 + \frac{1 - 2\rho'}{\sqrt{1 + 4\rho'}}$. С учетом леммы 3 находим

$$\frac{d}{d\alpha} \log r(D(\alpha), 1) = \frac{d}{d\alpha} \log r(D_1(\alpha), 1) - \log r(\alpha) - \alpha \frac{r'(\alpha)}{r(\alpha)}. \quad (15)$$

Из экстремального свойства областей $D_0(\alpha)$, $D_1(\alpha)$ следует равенство

$$\alpha^2 \frac{d}{d\alpha} \log r(D_0(\alpha), 0) + \frac{d}{d\alpha} \log r(D_1(\alpha), 1) = 0.$$

Ввиду (11) это равенство влечет

$$\frac{d}{d\alpha} \log r(D_1(\alpha), 1) = \log r(\alpha) - \frac{\alpha r'(\alpha)}{r(\alpha)}. \quad (16)$$

Используя (15) и (16), получим

$$\begin{aligned} \Phi'(\alpha) &= \left\{ \frac{-2r(\alpha)}{1-r(\alpha)^2} - \frac{\delta}{r(\alpha)} + \frac{2\alpha}{r(\alpha)} \right\} r'(\alpha) = \\ &= \left\{ \frac{\alpha - \delta/2}{1 + \alpha - \delta/2} - r(\alpha)^2 \right\} \frac{2r'(\alpha)}{r(\alpha)(1-r(\alpha)^2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем вспомогательную функцию

$$f(\alpha) = \log r(\alpha) - \log \sqrt{\frac{\alpha - \delta/2}{1 + \alpha - \delta/2}}, \quad \alpha \geq \alpha_1,$$

где $r(\alpha)$ определяется формулами (12). Заметим, что $f \in S^1(\alpha_1, +\infty)$ в силу непрерывной дифференцируемости $r(\alpha)$ и легко проверяемого неравенства $\alpha_1 > \delta(\rho, M)/2$. Остается показать, что $f(\alpha) < 0$ при $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Для этого достаточно установить следующие свойства функции $f(\alpha)$:

$$f(\alpha_1) = 0; \quad (18)$$

$$f(\alpha) - \alpha \log(4\rho'') \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow +\infty; \quad (19)$$

$$f''(\alpha) > 0, \quad \alpha_1 < \alpha < A, \quad \alpha \neq A^{-1}; \quad (20)$$

$$\text{если } \rho'' \geq 1/5, \text{ то } f''(\alpha) < 0, \quad \alpha > A; \quad (21)$$

$$\text{если } \rho'' \leq 1/5, \text{ то } f(\alpha) < 0, \quad A \leq \alpha \leq \alpha_2. \quad (22)$$

Действительно, в случае $\rho'' \geq 1/5$ из (19) и (21) следует, что $f(\alpha) - \alpha \log(4\rho'') < 0$ при $\alpha \geq A$. Так как $\rho'' < 1/4$, получаем $f(\alpha) < 0$, $\alpha \geq A$. Ввиду (22) неравенство $f(\alpha) < 0$, $A \leq \alpha \leq \alpha_2$ имеет место вне зависимости от значения ρ'' . Учитывая (18), (20) и условие $f(A) < 0$, получим, что $f(\alpha) < 0$ при $\alpha_1 < \alpha < A$.

Проверка свойств (18) и (19) элементарна. Утверждение (20) немедленно следует из равенства

$$f''(\alpha) = \frac{2\chi(\alpha)}{\alpha(1-\alpha^2)} + \frac{1+2(\alpha-\delta/2)}{2(\alpha-\delta/2)^2(1+\alpha-\delta/2)^2}, \quad \alpha \notin \{A^{-1}, A\},$$

где χ — характеристическая функция множества $[\alpha_1, A^{-1}] \cup [A, +\infty)$.

Обозначим $\tilde{\delta} = 1 + \frac{1 - 2\rho''}{\sqrt{1 + 4\rho''}}$. Из неравенства $\rho'' < \rho'$ следует, что $\tilde{\delta} > \delta$. Отсюда

$$f''(\alpha) < \frac{2}{\alpha(1 - \alpha^2)} + \frac{1 + 2(\alpha - \tilde{\delta}/2)}{2(\alpha - \tilde{\delta}/2)^2(1 + \alpha - \tilde{\delta}/2)^2}, \quad \alpha > A.$$

Следовательно, при $\alpha > A$ имеем $\text{sign } f''(\alpha) \leq \text{sign } p(\alpha)$, где

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= (1 + 2(\alpha - \tilde{\delta}/2))\alpha(\alpha^2 - 1) - 4(\alpha - \tilde{\delta}/2)^2(1 + \alpha - \tilde{\delta}/2)^2 = \\ &= -2(\alpha - 1)^4 + (7\tilde{\delta} - 15)(\alpha - 1)^3 + (-6\tilde{\delta}^2 + 33\tilde{\delta} - 39)(\alpha - 1)^2 + \\ &\quad + 2(\tilde{\delta} - 3)(\tilde{\delta}^2 - 6\tilde{\delta} + 7)(\alpha - 1) - (\tilde{\delta} - 2)^2(\tilde{\delta} - 4)^2/4. \end{aligned}$$

Заметим, что при $1/5 \leq \rho'' < 1/4$ выполняется $1 + 2^{-3/2} < \tilde{\delta} \leq 1 + 1/\sqrt{5}$ и потому все коэффициенты в последнем разложении отрицательны. Следовательно, $p(\alpha) < 0$ при $\alpha > 1$ и (21) доказано. В силу неравенства

$$\begin{aligned} f(\alpha) &\leq \log r(\alpha_2) - \log \sqrt{\frac{1 - \delta/2}{2 - \delta/2}} < \\ &< \log r(\alpha_2) - \log \sqrt{\frac{1 - \tilde{\delta}/2}{2 - \tilde{\delta}/2}}, \quad 1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \end{aligned}$$

для доказательства (22) достаточно проверить, что в случае $0 < \rho'' \leq 1/5$ выполняется

$$\begin{aligned} r(\alpha_2)^2 &< \frac{1 - \tilde{\delta}/2}{2 - \tilde{\delta}/2}, \\ \frac{1 - 2\rho'' - \sqrt{1 - 4\rho''}}{1 - 2\rho'' + \sqrt{1 - 4\rho''}} &< \frac{\sqrt{1 + 4\rho''} - 1 + 2\rho''}{3\sqrt{1 + 4\rho''} - 1 + 2\rho''}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство преобразуется к виду

$$(1 - 2\rho'')(\sqrt{1 + 4\rho''} + \sqrt{1 - 4\rho''}) < 2\sqrt{1 - 16\rho''^2}.$$

Остается заметить, что при $0 < \rho'' \leq 1/5$

$$\begin{aligned} (1 - 2\rho'')(\sqrt{1 + 4\rho''} + \sqrt{1 - 4\rho''}) &< 2(1 - 2\rho'') = 2\sqrt{1 - 4\rho'' + 4\rho''^2} = \\ &= 2\sqrt{1 - 16\rho''^2 + 4\rho''(5\rho'' - 1)} \leq 2\sqrt{1 - 16\rho''^2}. \end{aligned}$$

Справедливость предложений (18)–(22), а вместе с тем и первого утверждения леммы, установлена.

Докажем второе утверждение леммы. Из (18) следует, что при $\delta > \delta(\rho, M)$ выполняется $f(\alpha_1) > 0$. Ввиду (17), при достаточно малых $\alpha > \alpha_1$ имеет место неравенство $\Phi'(\alpha) < 0$. Лемма доказана.

Замечание 2. В статье [1] для нахождения производной функции $\log r(D(\alpha), 1)$ привлекается вспомогательное конформное отображение и формулы дифференцирования, данные в [6, 7]. Подход, основанный на применении леммы 3, в данном случае позволяет упростить вычисления и избежать обращения к формулам [6, 7].

Хотя при помощи предельного перехода $M \rightarrow \infty$ из теоремы 5 можно получить аналогичную оценку для функций, обратных элементам класса S , доказать таким образом утверждение о случае равенства не удастся. Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $g^{-1} \in S$, $0 < \rho < 1/4$. Тогда для любого $\delta \leq \delta(\rho) = 1 + (1 - 2\rho)/\sqrt{1 + 4\rho}$ при $|w_0| = \rho$ имеет место неравенство

$$\frac{|g'(w_0)|}{|g(w_0)|^\delta} \geq \frac{l'(\rho)}{l(\rho)^\delta} = \left(\frac{1 + 2\rho - \sqrt{1 + 4\rho}}{2\rho} \right)^{1-\delta} \frac{1}{\rho\sqrt{1 + 4\rho}}. \quad (23)$$

Равенство в (23) достигается только при $g(w) = w_0\rho^{-1}l(\rho w_0^{-1}w)$.

При $\delta > \delta(\rho)$ неравенство (23) в общем случае неверно.

Доказательство является упрощенным вариантом доказательства теоремы 5. Ограничимся описанием отличий: функции k_M и l_M следует заменить на k и l соответственно; $\delta(\rho, M)$ следует заменить на $\delta(\rho)$; $\rho' = \rho'' = \rho$; $A = 1$;

$$Q_\alpha(w)dw^2 = -\frac{1 - w/c(\alpha)}{w^2(1 - w)^2}dw^2, \quad c(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}.$$

Из двух критических траекторий этого дифференциала одна является лучом $\{c(\alpha)t : t \geq 1\}$, а другая в обоих направлениях стремится к $c(\alpha)$. Кроме того, $B(\alpha) = \mathbb{C} \setminus \{c(\alpha)t : t \geq 1\}$;

$$r(\alpha) = \frac{|\alpha - 1|}{\alpha + 1} \left(\frac{4\alpha^2\rho}{|\alpha^2 - 1|} \right)^\alpha.$$

С учетом этих изменений доказательства теоремы 5 и леммы 4 остаются в силе и в данном случае.

Следствие 2. При $g^{-1} \in S$ имеет место неравенство

$$l'(\rho) \leq |g'(w_0)| \leq l'(-\rho), \quad |w_0| = \rho < 1/4. \quad (24)$$

Равенство в левой (соответственно, в правой) части неравенства (24) достигается только при $g(w) = w_0 \rho^{-1} l(\rho w_0^{-1} w)$ (соответственно, только при $g(w) = -w_0 \rho^{-1} l(-\rho w_0^{-1} w)$).

Доказательство. Оценка сверху установлена в (2). Левая часть (24) следует из теоремы 6 и очевидного неравенства

$$\delta(\rho) > 1 + 2^{-3/2} > 0, \quad 0 < \rho < 1/4.$$

Последний результат можно сформулировать в виде, подобном теореме об обратной функции.

Следствие 3. Пусть $w = f(z)$ – отображение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ в \mathbb{C} , дифференцируемое по переменной z . Пусть $a \in \Omega$, $b = f(a)$ и f инъективно в $\mathbb{U}_\varepsilon(a)$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $r = \varepsilon |f'(a)|/4$ обратное отображение g дифференцируемо в $\mathbb{U}_r(b)$, причем

$$|f'(a)|^{-1} l' \left(\frac{|w-b|}{4r} \right) \leq |g'(w)| \leq |f'(a)|^{-1} l' \left(-\frac{|w-b|}{4r} \right), \quad w \in \mathbb{U}_r(b).$$

Оценки являются точными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Емельянов, О максимуме конформного радиуса в семействах областей, удовлетворяющих дополнительным условиям, Зап. научн. семин. ЛОМИ **226** (1996), 93–108.
2. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2-ое изд. М., 1966.
3. Дж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения, М., 1962.
4. Н. А. Лебедев, Принцип площадей в теории однолистных функций, М., 1975.
5. Г. В. Кузьмина, Методы геометрической теории функций. I, II, Алгебра и анализ **9**, вып.3 (1997), 41–103; вып.5 (1997), 1–50.
6. Е. Г. Емельянов, Некоторые свойства модулей семейств кривых, Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 72–82.
7. А. Ю. Солянин, Зависимость проблемы модуля для семейства нескольких классов кривых от параметров, Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 136–145.

Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток

Поступило 12 июля 1999 г.