Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 1. С. 81–92.

УДК 517.977

МЕТОД УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЖЁСТКОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ

М. В. Плеханова[1,2,a], Г. Д. Байбулатова[1,b]

[1] *Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия*
[a] *mariner79@mail.ru;* [b] *baybulatova_g_d@mail.ru*

В работе использован метод условного градиента для численного исследования задачи жёсткого управления решениями линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля. Доказана сходимость метода, установлено существование оптимального управления и разрешимость сопряжённой задачи. При некоторых значениях параметров проведён численный эксперимент.

Ключевые слова: *оптимальное управление, система с распределёнными параметрами, задача жёсткого управления, вырожденное эволюционное уравнение, численное решение, метод условного градиента.*

Введение

Численные методы решения различных задач математической физики часто применяются в случае, когда найти аналитическое решение не представляется возможным. Поиск оптимального управления для систем с распределёнными параметрами тем более затруднён, так как по сути требует решения сразу нескольких связанных задач. В данной работе строится алгоритм численного решения задачи управления линеаризованной квазистационарной системой уравнений фазового поля, в рамках мезоскопической теории описывающей фазовые переходы первого рода. В области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассматривается задача жёсткого управления

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w(x,t) + u_1(x,t),\ (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$v(x,t) + (\beta + \Delta) w(x,t) + u_2(x,t) = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$v(x,t) = w(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{3}$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$\|u_1\|^2_{L_2(Q)} + \|u_2\|^2_{L_2(Q)} \le R^2, \tag{5}$$

$$J(v,w) = \frac{1}{2}\|v - \tilde{v}\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\|w - \tilde{w}\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{6}$$

где β, R — константы, заданы функции $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ из $H^1(0,T;L_2(\Omega))$, v, w — неизвестные функции, u_1, u_2 — функции управления. Цель состоит в минимизации функционала

Работа выполнена при частичной поддержке лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

стоимости J на допустимых наборах v, w, u_1, u_2, т. е. таких функциях v, w, которые являются решением начально-краевой задачи при функциях управления u_1, u_2 из множества допустимых управлений, определённого условием (5). Решение задачи имеет практическую значимость: в металлургии — при изготовлении сплавов, в строительстве — при изучении изменения агрегатного состояния содержащейся в ограждениях влаги при колебаниях температуры наружного воздуха, и др. Особенность задачи состоит в том, что система уравнений не разрешима относительно производной по времени — является вырожденной эволюционной системой.

В настоящее время существует несколько направлений исследования задач оптимального управления для вырожденных эволюционных систем. Таким задачам в различных постановках посвящены работы С. П. Зубовой [1], А. В. Келлер [2], Г. А. Куриной [3], В. Ф. Чистякова [4] и др. Однако нам не известны работы, в которых для вырожденных систем с распределёнными параметрами был бы осуществлён поиск численного решения задачи оптимального управления. В данном исследовании не только разработан алгоритм численного решения, основанный на методе условного градиента, но и доказаны разрешимость сопряжённой задачи, сходимость разностного метода её решения и, наконец, сходимость метода условного градиента.

Исследование опирается на результаты о разрешимости начально-краевых задач для вырожденных эволюционных уравнений, полученные в работах В. Е. Федорова [5], результаты М. В. Плехановой, В. Е. Федорова и А. Ф. Исламовой [6–10] о разрешимости задач оптимального управления для вырожденных эволюционных уравнений. В данной работе используется метод численного решения начально-краевых задач для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля, предложенный в [11], и результаты монографии Ф. П. Васильева [12] — при разработке метода условного градиента для рассматриваемой задачи управления. Итогом исследования стала программная реализация метода численного поиска решения.

1. Задача управления и разностная схема

Пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим задачу (1)–(6) жёсткого управления для линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля. Опираясь на результаты монографии [10], докажем разрешимость этой задачи. Введём в рассмотрение пространства

$$H_0^2(\Omega) = \{z \in H^2(\Omega) : z(x) = 0,\, x \in \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{Z}_1 = \{(v, w) \in H^1(0, T; (L_2(\Omega))^2) : v_t - \Delta v \in H^1(0, T; L_2(\Omega)), \Delta w \in H^1(0, T; L_2(\Omega))\}$$

и самосопряжённый оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $\mathrm{dom}\mathcal{A} = H_0^2(\Omega)$, действующий по правилу $\mathcal{A}z = \Delta z$.

Теорема 1. *Пусть $\beta \notin \sigma(\mathcal{A})$. Тогда существует единственное решение $(\hat{v}, \hat{w}, \hat{u}_1, \hat{u}_2) \in \mathcal{Z}_1 \times H^1(0, T; (L_2(\Omega))^2)$ задачи* (1)–(6).

Доказательство. Доказательство теоремы заключается в проверке условий следствия 2.5.4 из монографии [10]. Выбирая $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ I & \beta I + \Delta \end{pmatrix},$$

определим операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$, $\mathrm{dom} M = (H_0^2(\Omega))^2$. Как доказано в теореме 1.2.6 [10], условие $\beta \notin \sigma(\mathcal{A})$ гарантирует сильную $(L,0)$-секториальность оператора M. Таким образом, с учётом очевидной ограниченности и выпуклости множества $\{(u_1,u_2) \in (L_2(Q))^2 : \|u_1\|^2_{L_2(Q)} + \|u_2\|^2_{L_2(Q)} \leq R^2\}$ получим существование решения. Его единственность следует из инъективности оператора B при управлении, который в данной постановке является тождественным оператором. □

Перейдём теперь к построению разностной схемы на равномерной сетке в прямоугольной области $Q = \Omega \times (0,T) = (0,\pi)\times(0,T)$. Разобьём отрезок пространственной переменной $[0,\pi]$ на части с шагом $h = \pi/N$, определив тем самым точки $x_n = nh$, $n = 0,1,\ldots,N$. Аналогичным образом разобьём временной отрезок $[0,T]$ на части с шагом $\tau > 0$, получив точки разбиения $t_m = m\tau$, $m = 0,1,\ldots,M$. Приближённые значения функций v, w в узлах с координатами (x_n,t_m) будем обозначать через v_n^m, w_n^m. Рассмотрим разностную схему для начально-краевой задачи (1)–(4)

$$\frac{v_n^{m+1} - v_n^m}{\tau} = \frac{v_{n+1}^m - 2v_n^m + v_{n-1}^m}{h^2} - \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + {u_1}_n^m, \tag{7}$$

$$v_n^m + \beta w_n^m + \frac{w_{n+1}^m - 2w_n^m + w_{n-1}^m}{h^2} + {u_2}_n^m = 0, \tag{8}$$

где $n = 1,2,\ldots,N-1$, $m = 0,1,\ldots,M$, с граничными условиями

$$v_0^m = v_N^m = w_0^m = w_N^m = 0, \quad m = 0,1,\ldots,M,$$

и начальными условиями

$$v_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,\ldots,N.$$

Невязкой метода (7), (8) назовём сеточную функцию $\Psi_n^m = (\xi_n^m, \eta_n^m)$, где

$$\xi_n^m = \frac{v(x_n,t_{n+1}) - v(x_{n+1},t_m)}{\tau} - \frac{v(x_{n+1},t_m) - 2v(x_n,t_m) + v(x_{n-1},t_m)}{h^2} +$$

$$+ \frac{w(x_{n+1},t_m) - 2w(x_n,t_m) + w(x_{n-1},t_m)}{h^2} + u_1(x_n,t_m),$$

$$\eta_n^m = v(x_n,t_m) + \beta w(x_n,t_m) + \frac{w(x_{n+1},t_m) - 2w(x_n,t_m) + w(x_{n-1},t_m)}{h^2} + u_2(x_n,t_m).$$

Через $v(x_n,t_m)$, $w(x_n,t_m)$ обозначены истинные значения решения v, w задачи (1)–(4) в соответствующих точках. Будем говорить, что невязка имеет порядок $\tau^{p1} + h^{p2}$, если существует такая константа C, не зависящая от τ и h, что $\|\Psi\|_{\mathbb{R}^2} \leq C(\tau^{p1} + h^{p2})$ для всех $n = 1,2,\ldots,N-1$, $m = 0,1,\ldots,M-1$.

Лемма 1 [11]. *Пусть точное решение v, w задачи (1)–(4) таково, что функция v дважды непрерывно дифференцируема по t, функции v, w четырежды непрерывно дифференцируемы по x. Тогда невязка метода (7), (8) имеет порядок $\tau + h^2$.*

Теорема 2 [11]. *Пусть $\beta < 0$. Тогда схема (7), (8) устойчива, если выполнено условие $\tau \leq h^2/2$.*

2. Сопряжённая задача

Рассмотрим функцию Лагранжа для задачи (1)–(6)

$$\mathfrak{L}(v,w)=\frac{1}{2}\|v(x,t)-\tilde{v}(x,t)\|^2_{L_2(Q)}+\frac{1}{2}\|w(x,t)-\tilde{w}(x,t)\|^2_{L_2(Q)}+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega s(x,t)(v_t(x,t)-\Delta v(x,t))dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega s(x,t)(\Delta w(x,t)-u_1(x,t))dxdt-$$

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega r(x,t)(\Delta w(x,t)+\beta w(x,t))dxdt-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega r(x,t)(v(x,t)+u_2(x,t))dxdt,$$

где $s(x,t)$, $r(x,t)$ — множители Лагранжа. Будем предполагать, что функции s, r являются достаточно гладкими в Q, ограничения на s, r опишем ниже.

Возьмём вариации по переменным v, w и u_1, u_2, т. е. рассмотрим функции $v(x,t)+\delta v(x,t)$, $w(x,t)+\delta w(x,t)$, $u_1(x,t)+\delta u_1(x,t)$, $u_2(x,t)+\delta u_2(x,t)$ при $(x,t)\in Q$, причём будем предполагать, что вариации удовлетворяют граничным условиям. Тогда

$$\mathfrak{L}(v+\delta v,w+\delta w,u_1+\delta u_1,u_2+\delta u_2)=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\Big[\frac{1}{2}(v(x,t)-\tilde{v}(x,t))^2+(v(x,t)-\tilde{v}(x,t))\delta v(x,t)+$$

$$+\frac{1}{2}(\delta v(x,t))^2+(w(x,t)-\tilde{w}(x,t))^2+(w(x,t)-\tilde{w}(x,t))\delta w(x,t)+(\delta w(x,t))^2+$$

$$+(\delta v_t(x,t)-\Delta\delta v(x,t))s(x,t)+(\Delta\delta w(x,t)-\delta u_1(x,t))s(x,t)+(v_t(x,t)-\Delta v(x,t))s(x,t)+$$

$$+(\Delta w(x,t)-u_1(x,t))s(x,t)-(\Delta\delta w(x,t)+\beta\delta w(x,t))r(x,t)-(\delta v(x,t)+\delta u_2(x,t))r(x,t)-$$

$$-(\Delta w(x,t)+\beta w(x,t))r(x,t)-(v(x,t)+u_2(x,t))r(x,t)\Big]\,dxdt.$$

Далее рассмотрим линейную часть приращения функции Лагранжа

$$\delta\mathfrak{L}=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega[(v(x,t)-\tilde{v}(x,t))\delta v(x,t)+(w(x,t)-\tilde{w}(x,t))\delta w(x,t)+$$

$$+(\delta v_t(x,t)-\Delta\delta v(x,t))s(x,t)+(\Delta\delta w(x,t)-\delta u_1(x,t))s(x,t)-$$

$$-(\Delta\delta w(x,t)+\beta\delta w(x,t))r(x,t)-\delta v(x,t)+\delta u_2(x,t))r(x,t)]\,dxdt.$$

Применяя интегрирование по частям с учётом нулевых граничных и начального условий (см. алгоритм получения сопряжённой задачи в [12, § 7]) и приравнивая к нулю коэффициенты при вариациях согласно условию стационарности $\delta\mathfrak{L}=0$, получим сопряжённую задачу

$$s_t(x,t)+\Delta s(x,t)+r(x,t)=v(x,t)-\tilde{v}(x,t),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\tag{9}$$

$$(\beta+\Delta)r(x,t)-\Delta s(x,t)=w(x,t)-\tilde{w}(x,t),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\tag{10}$$

$$s(x,t)=r(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\tag{11}$$

$$s(x,T)=0,\quad x\in\Omega.\tag{12}$$

Теорема 3. *Пусть* $\beta \notin \sigma(\mathcal{A})$. *Тогда задача* (9)–(12) *имеет единственное решение* $(s, r) \in H^1(0, T; (L_2(\Omega))^2)$.

Доказательство. При замене $\tau = T - t$ получаем задачу, которая сводится к абстрактной задаче $L\dot{x}(\tau) = Mx(\tau) + y(\tau)$, где $x(\tau) = (s(T - \tau), r(T - \tau))$, $y(\tau) = (v(x, T - \tau) - \tilde{v}(x, T - \tau), w(x, T - \tau) - \tilde{w}(x, T - \tau))$. Для этого в пространствах $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = (L_2(\Omega))^2$ определены операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X})$, $\mathrm{dom} M = (H_0^2(\Omega))^2$, действие которых задаётся матрицами следующего вида:

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & I \\ -\Delta & \beta I + \Delta \end{pmatrix}.$$

В работе [13] показано, что оператор M сильно $(L, 0)$-секториален при условии $\beta \notin \sigma(A)$. Согласно теореме 1.4.2 [10] однозначная разрешимость задачи (9)–(12) следует из условия $(v - \tilde{v}, w - \tilde{w}) \in H^1(0, T; (L_2(\Omega))^2)$. А поскольку (v, w) является решением задачи (1)–(4), последнее очевидно выполняется. □

3. Численное решение сопряжённой задачи

Аналогично исходной задаче построим разностную схему для сопряжённой задачи (9)–(12) в прямоугольнике $Q = [0, \pi] \times [0, T]$.

$$s_t(x, t) + \Delta s(x, t) + r(x, t) = v(x, t) - \tilde{v}(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{13}$$

$$(\beta + \Delta) r(x, t) - \Delta s(x, t) = w(x, t) - \tilde{w}(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{14}$$

$$s(0, t) = s(\pi, t) = r(0, t) = r(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{15}$$

$$s(x, T) = 0, \quad x \in [0, \pi]. \tag{16}$$

Заменяя производные на разностные аналоги, получим

$$\frac{s_n^m - s_n^{m-1}}{\tau} + \frac{s_{n+1}^m - 2s_n^m + s_{n-1}^m}{h^2} + r_n^m = v_n^m - \tilde{v}_n^m, \tag{17}$$

$$\beta r_n^m + \frac{r_{n+1}^m - 2r_n^m + r_{n-1}^m}{h^2} - \frac{s_{n+1}^m - 2s_n^m + s_{n-1}^m}{h^2} = w_n^m - \tilde{w}_n^m, \tag{18}$$

$$s_0^m = s_N^m = r_N^m = r_N^m = 0, \tag{19}$$

$$s_n^M = 0, \tag{20}$$

где $m = 0, 1, \ldots, M$, $n = 0, 1, \ldots, N$.

Невязкой метода (17), (18) назовём сеточную функцию $\Psi_n^m = (\xi_n^m, \eta_n^m)$, где

$$\xi_n^m = \frac{s(x_n, t_{m+1}) - s(x_{n+1}, t_m)}{\tau} + r(x_n, t_m) + \tilde{v}(x_n, t_m) - v(x_n, t_m),$$

$$\eta_n^m = \beta r(x_n, t_m) + \tilde{w}(x_n, t_m) - w(x_n, t_m) + \frac{r(x_{n+1}, t_m) - 2r(x_n, t_m) + r(x_{n-1}, t_m)}{h^2} -$$

$$- \frac{s(x_{n+1}, t_m) - 2s(x_n, t_m) + r(x_{n-1}, t_m)}{h^2}.$$

Через $s(x_n, t_m)$, $r(x_n, t_m)$ обозначены истинные значения решения s, r задачи (13)–(16) в соответствующих точках.

Лемма 2. *Пусть точное решение s, r задачи* (13)–(16) *таково, что функция s дважды непрерывно дифференцируема по t, функции s, r четырежды непрерывно дифференцируемы по x. Тогда невязка метода* (17), (18) *имеет порядок $\tau + h^2$.*

Доказательство. Пользуясь формулой Тейлора, сделаем замены в разностной схеме:

$$s_n^{m-1} = s_n^m - \tau s_{n\,t}^m + \frac{1}{2}\tau^2 s_{n\,tt}^m,$$

$$s_{n\pm1}^m = s_n^m \pm h s_{n\,x}^m + \frac{1}{2}h^2 s_{n\,xx}^m \pm \frac{1}{6}h^3 s_{n\,xxx}^m + \frac{1}{24}h^4 s_{n\,xxxx}^m,$$

$$r_{n\pm1}^m = r_n^m \pm h r_{n\,x}^m + \frac{1}{2}h^2 r_{n\,xx}^m \pm \frac{1}{6}h^3 r_{n\,xxx}^m + \frac{1}{24}h^4 r_{n\,xxxx}^m,$$

$$\frac{1}{\tau}(s_n^m - s_n^{m-1}) + \frac{1}{h^2}(s_{n+1}^m - 2s_n^m + s_{n-1}^m) + r_n^m - v_n^m + \tilde{v}_n^m =$$

$$= \frac{1}{\tau}(s_n^m - s_n^m + \tau s_{n\,t}^m - \frac{1}{2}\tau^2 s_{n\,tt}^m) + \frac{1}{h^2}\left(s_n^m + h s_{n\,x}^m + \frac{1}{2}h^2 s_{n\,xx}^m + \frac{1}{6}h^3 s_{n\,xxx}^m + \frac{1}{24}h^4 s_{n\,xxxx}^m - \right.$$

$$\left. - 2s_n^m + s_n^m - h s_{n\,x}^m + \frac{1}{2}h^2 s_{n\,xx}^m - \frac{1}{6}h^3 s_{n\,xxx}^m + \frac{1}{24}h^4 s_{n\,xxxx}^m \right) +$$

$$+ r_n^m - v_n^m + \tilde{v}_n^m = s_t - \frac{1}{2}\tau s_{n\,tt}^m + s_{n\,xx}^m + \frac{1}{12}h^2 s_{n\,xxxx}^m + r_n^m - v_n^m + \tilde{v}_n^m,$$

$$\beta + r_n^m + \frac{1}{h^2}\left(r_n^m + h r_{n\,x}^m + \frac{1}{2}h^2 r_{n\,xx}^m + \frac{1}{6}h^3 r_{n\,xxx}^m + \frac{1}{24}h^4 r_{n\,xxxx}^m - 2r_n^m + \right.$$

$$\left. + r_n^m - h r_{n\,x}^m + \frac{1}{2}h^2 r_{n\,xx}^m - \frac{1}{6}h^3 r_{n\,xxx}^m + \frac{1}{24}h^4 r_{n\,xxxx}^m \right) - s_{n\,xx}^m -$$

$$-\frac{1}{12}h^2 s_{n\,xxxxx}^m - w_n^m + \tilde{w}_n^m = \beta r_n^m + r_{n\,xx}^m + \frac{1}{12}h^2 r_{n\,xxxx}^m - s_{n\,xx}^m - \frac{1}{12}h^2 s_{n\,xxxxx}^m - w_n^m + \tilde{w}_n^m.$$

Таким образом, с учётом уравнений (17), (18) выражения для невязки имеют вид

$$\xi_n^m = -\frac{1}{2}\tau s_{tt}(x_n, t_m) - \frac{1}{12}h^2 s_{xxxx}(x_n, t_m),$$
$$\eta_n^m = \frac{1}{12}h^2 (s_{xxxx}(x_n, t_m) - r_{xxxx}(x_n, t_m)).$$

Из полученных выкладок можно сделать вывод, что $\Psi_n^m = O(\tau + h^2)$. □

Теорема 4. *Пусть $\beta < 0$. Тогда схема* (17), (18) *устойчива, если выполнено условие $\tau \leq h^2/2$.*

Доказательство. Обозначим через ρ_q^m, σ_q^m коэффициенты q-х гармоник на m-м слое, тогда

$$s(x_n, t_m) = \rho_q^m e^{iqx_n}, \quad r(x_n, t_m) = \sigma_q^m e^{iqx_n}$$

при $q = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Подстановка этих функций в (17), (18) приведёт к равенствам

$$\rho_q^m - \rho_q^{m-1} + \frac{2\tau}{h^2}\rho_q^m(\cos qh - 1) + \tau\sigma_q^m = 0, \tag{21}$$

$$\beta\sigma_q^m + \frac{2}{h^2}\rho_q^m(\cos qh - 1) + \frac{2}{h^2}\sigma_q^m(\cos qh - 1) = 0.$$

Из последнего равенства получим выражение

$$\sigma_q^m = \frac{2(\cos qh - 1)}{\beta h^2 + 2(\cos qh - 1)}\rho_q^m \tag{22}$$

и подставим его в (21), тогда

$$\rho_q^m - \rho_q^{m-1} + \frac{2\tau}{h^2}\rho_q^m(\cos qh - 1) + \frac{2\tau(\cos qh - 1)}{\beta h^2 + 2(\cos qh - 1)}\rho_q^m = 0.$$

Сгруппировав слагаемые, получим

$$\rho_q^{m-1} = \rho_q^m \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}(\cos qh - 1)\left(1 + \frac{h^2}{2(\cos qh - 1) + \beta h^2}\right)\right).$$

Обозначим множитель при ρ_q^m за

$$\mu_q = 1 + \frac{2\tau}{h^2}(\cos qh - 1)\left(1 + \frac{h^2}{2(\cos qh - 1) + \beta h^2}\right).$$

Рассмотрим задачу (13)–(16) в обратном по времени порядке, что приведёт к равенству $\rho_q^{m+1} = \mu_q \rho_q^m$.

Теперь покажем, что $\mu_q \leq 1$ сразу для всех $q \in \mathbb{N}$ при $\beta < 0$. Рассмотрим неравенства

$$0 \leq 1 - \cos qh \leq 2, \quad 0 \leq 2(1 - \cos qh) \leq 4, \quad -h^2\beta \leq 2(1 - \cos qh) - h^2\beta \leq 4 - h^2\beta.$$

Из $\beta < 0$ следует, что $2(1 - \cos qh) - h^2\beta > 0$. При $h^2 \leq 2(1 - \cos qh) - h^2\beta$ получим оценку

$$0 \leq \frac{h^2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta} \leq 1,$$

и, значит,

$$0 \leq 1 - \frac{h^2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta} \leq 1.$$

Учитывая вышесказанное, запишем неравенства

$$0 \leq 1 - \cos qh, \quad 0 \leq 1 - \frac{h^2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta}, \quad 0 \leq \frac{2\tau}{h^2}.$$

Отсюда придём к нужному ограничению на μ_q сразу для всех $q \in \mathbb{N}$

$$1 - \frac{2\tau}{h^2}(1 - \cos qh)\left(1 - \frac{h^2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta}\right) \leq 1.$$

Теперь покажем, что $\mu_q \geq -1$ при любом $q \in \mathbb{N}$. Для этого надо показать, что

$$\frac{\tau}{h^2}(1 - \cos qh)\left(1 - \frac{h^2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta}\right) \leq 1.$$

Учитывая неравенства

$$0 \leq (1 - \cos qh) \leq 2, \quad 0 \leq 1 - \frac{h2}{2(1 - \cos qh) - h^2\beta} \leq 1,$$

получим

$$0 \leq (1-\cos qh)\left(1-\frac{h2}{2(1-\cos qh)-h^2\beta}\right) \leq 2,$$

и тогда оценка

$$\frac{\tau}{h^2}(1-\cos qh)\left(1-\frac{h2}{2(1-\cos qh)-h^2\beta}\right) \leq 1$$

выполняется при $\tau \leq h^2/2$. В силу (21), (22) имеем

$$\sigma_q^{m+1} = \frac{\rho_q^{m+1}}{\frac{2}{h^2}(1-\cos qh)-\beta} = \frac{\rho_q^m\left(1-\frac{2\tau}{h^2}(1-\cos qh)\left(1-\frac{h^2}{2(1-\cos qh)-h^2\beta}\right)\right)}{\frac{2}{h^2}(1-\cos qh)-\beta} =$$

$$= \sigma_q^m\left(1-\frac{2\tau}{h^2}(1-\cos qh)\left(1-\frac{1}{\frac{2\tau}{h^2}(1-\cos qh)-\beta}\right)\right).$$

Таким образом, коэффициент перехода для второй неизвестной функции также равен μ_q, и, значит, рассматриваемая разностная схема является устойчивой при $\tau \leq h^2/2$. □

4. Алгоритм метода условного градиента

Обозначим вектор-функции $\mathbf{z} = (v, w)$, $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{v}, \tilde{w})$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. И соответственно $\mathbf{z}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{z}_k$, $\mathbf{z}(\overline{\mathbf{u}}_k) = \overline{\mathbf{z}}_k$, где $\overline{\mathbf{u}}_k$ — вспомогательное управление, k — номер итерации. Определим оператор A, действующий по правилу $A\mathbf{u} = \mathbf{z}$. Оператор A определяется видом решения начальной задачи (приведён, например, в теореме 1.4.2 [10]) и фактически является оператором, который по формуле, задающей решение задачи (1)–(6) с нулевым начальным условием, управлению ставит в соответствие функцию состояния.

Определим оператор A^*, сопряжённый к оператору A. Учитывая, что $\mathbf{z}$ — решение сопряжённой задачи (9)–(12), при $\mathbf{c} = \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}$ имеем

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{c}\rangle_{L_2(0,T;(L_2(\Omega))^2)} = \int_0^T \int_\Omega [v(x,t)(s_t(x,t) + \Delta s(x,t) + r(x,t)) +$$

$$+ w(x,t)(\beta r(x,t) + \Delta r(x,t) - \Delta s(x,t))]\,dxdt.$$

Используя интегрирование по частям, несложно показать, что последнее выражение равно

$$\int_0^T \int_\Omega [(-v_t(x,t) + \Delta v(x,t) - \Delta w(x,t))s(x,t) + (v(x,t) + \beta w(x,t) + \Delta w(x,t))r(x,t)]\,dxdt =$$

$$= -\int_0^T \int_\Omega [u_1(x,t)s(x,t) + u_2(x,t)r(x,t)]\,dxdt = -\langle \mathbf{u}, A^*\mathbf{c}\rangle_{L_2(0,T;(L_2(\Omega))^2)}.$$

Таким образом, $A^*\mathbf{c} = -(s, r)$.

Задача заключается в нахождении управления, минимизирующего функционал (6). Реализация решения осуществляется методом условного градиента. Метод представляет собой выполнение шагов следующего алгоритма:

A) выбираются начальное управление u_0 и необходимые константы;

B) построение итерационной последовательности проводится по формуле

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \alpha_k(\overline{\mathbf{u}}_k - \mathbf{u}_k),$$

где $\alpha_k = \min\{1, \alpha^*\}$,

$$\overline{\mathbf{u}}_k = \frac{1}{\left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (s^2(x,t,\mathbf{u}_k) + r^2(x,t,\mathbf{u}_k))^2 dxdt\right)^{1/2}} \left(Rs(x,t,\mathbf{u}_k), Rr(x,t,\mathbf{u}_k)\right).$$

Здесь $s(x,t)$, $r(x,t)$ — решение сопряжённой задачи, $\mathbf{u}_k$ — значение функций управления на k-м итерационном шаге. Параметр α^* определяется следующими рассуждениями. Функционал (6) на каждом шаге итерации примет вид

$$J(\mathbf{u}_k) = \frac{1}{2}\|v(\mathbf{u}_k) - \tilde{v}\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\|w(\mathbf{u}_k) - \tilde{w}\|^2_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\|\mathbf{z}(\mathbf{u}_k) - \tilde{\mathbf{z}}\|^2_{(L_2(Q))^2}.$$

Несложно получить цепочку равенств

$$J(\mathbf{u}_k + \alpha(\overline{\mathbf{u}}_k - \mathbf{u}_k)) = \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_k + \alpha\overline{\mathbf{z}}_k - \alpha\mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{z}}\|^2_{(L_2(Q))^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\|\mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{z}}\|^2_{(L_2(Q))^2} + \alpha\left\langle \mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{z}}_k - \mathbf{z}_k\right\rangle + \frac{1}{2}\alpha^2\|\overline{\mathbf{z}}_k - \mathbf{z}_k\|^2_{(L_2(Q))^2}.$$

Относительно параметра α последнее выражение представляет собой квадратный многочлен, минимум которого достигается в точке

$$\alpha^* = -\frac{\langle \mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{z}}_k - \mathbf{z}_k\rangle}{\|\overline{\mathbf{z}}_k - \mathbf{z}_k\|^2}.$$

Согласно определению оператора A и виду сопряжённого к нему оператора получим

$$\langle \mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{z}}_k - \mathbf{z}_k\rangle_{L_2(Q)} = \langle \mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{z}}, A(\overline{\mathbf{u}}_k - \mathbf{u}_k)\rangle_{L_2(Q)} = \langle A^*(\mathbf{z}_k - \tilde{\mathbf{z}}), \overline{\mathbf{u}}_k - \mathbf{u}_k\rangle_{L_2(Q)}.$$

Окончательно, учитывая полученное выше выражение для $A^*\mathbf{c}$, получим формулу

$$\alpha^* = \frac{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega s(x,t)(u_{1k}(x,t) - \overline{u}_{1k}(x,t))dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_\Omega r(x,t)(u_{2k}(x,t) - \overline{u}_{2k}(x,t))dxdt}{\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \left[(\overline{v}_k(x,t) - v_k(x,t))^2 + (\overline{w}_k(x,t) - w_k(x,t))^2\right] dxdt}.$$

Теорема 5. *Последовательность* $\{u_k\}$*, построенная по алгоритму* A), B)*, минимизирует функционал* (6)*.*

Доказательство. Как показано в работе [9], производная Фреше функционала (6) определяется формулой $A^*(A\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{z}})$. Заметим, что поскольку оператор A определяет решение задачи (1)–(4), то $A \in \mathcal{L}(H^1(0,T;L_2(\Omega)); L_2(0,T;L_2(\Omega)))$, что следует из леммы 1.4.1 [10]. Из той же леммы, теоремы 3 и выше полученной формулы $A^*\mathbf{c} = -(s,r)$ следует, что и оператор $A^* \in \mathcal{L}(H^1(0,T;L_2(\Omega)); L_2(0,T;L_2(\Omega)))$. Таким образом, липшицевость производной очевидна. Доказательство завершает ссылка на теорему 8.4.4 [12]. □

Интерфейс написанной авторами программы, реализующей метод условного градиента для исследуемой задачи, позволяет выполнить следующие действия:

- задавать отрезки изменения пространственной и временной переменной;
- устанавливать начальное значение, количество итераций;
- находить и строить графики решения начально-краевой задачи для системы уравнений фазового поля, графики решения сопряжённой задачи управления, приближённое управление.

Выполнена программная реализация метода условного градиента при $R = 0.5$, $\beta = -0.75$, $\varphi = \sin x$, $u_2(x,t) \equiv 0$, $u_{10} = 0$. Найденные значения функционала (6) для 9 итераций при $\bar{\alpha}_1 = k^{-1}$ и при $\bar{\alpha}_2 = \alpha^*$ указаны в таблице. Выбор различных α приводит к различной скорости сходимости, оценить которую помогает сравнение значений функционала стоимости на итерационной последовательности оптимальных наборов.

Результаты программной реализации

№ п/п	$J(v,w)[\bar{\alpha}_1]$	$J(v,w)[\bar{\alpha}_2]$
1	0.41481694144427	0.409891680848025
2	0.414805991303278	0.409701655144124
3	0.414802358566991	0.409496583044948
4	0.41480054650382	0.409274627344283
5	0.414799460983295	0.409033642178898
6	0.414798738160101	0.408771105947488
7	0.414798222346971	0.408484036079764
8	0.414797835792519	0.408168879698129
9	0.414797535342477	0.407821371885112

Список литературы

1. **Зубова, С. П.** О критериях полной управляемости дескрипторной системы. Полиномиальное решение задачи управления при наличии контрольных точек / С. П. Зубова // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 1. — С. 27–41.
2. **Келлер, А. В.** Численное решение задачи стартового жёсткого управления для моделей леонтьевского типа. Вычислительный эксперимент / А. В. Келлер // Естеств. и техн. науки. — 2011. — № 4. — С. 476–482.
3. **Курина, Г. А.** Обратимость оператора, возникающего в теории управления линейными системами / Г. А. Курина // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70, вып. 2. — С. 230–236.
4. **Чистяков, В. Ф.** Тождественно вырожденный квадратичный функционал и свойства уравнений Якоби / В. Ф. Чистяков // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 5. — С. 52–59.
5. **Федоров, В. Е.** О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа / В. Е. Федоров // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 12. — С. 1646–1649.
6. **Плеханова, М. В.** Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 5. — С. 40–44.
7. **Плеханова, М. В.** Критерий оптимальности в задаче управления для линейного уравнения соболевского типа / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 2. — С. 37–44.
8. **Плеханова, М. В.** О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределёнными системами, не разрешёнными относительно производной по времени / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров // Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — Т. 75, вып. 2. — С. 177–194.

9. **Исламова, А. Ф.** Задачи смешанного управления для линейных распределённых систем соболевского типа : дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Челябинск, 2012. — 129 с.
10. **Плеханова, М. В.** Оптимальное управление вырожденными распределёнными системами : монография / М. В. Плеханова, В. Е. Федоров. — Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2013. — 174 с.
11. **Омельченко, Е. А.** Численное решение линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля с запаздыванием / Е. А. Омельченко, М. В. Плеханова, П. Н. Давыдов // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Физика. — 2013. — Т. 5, № 2. — С. 45–51.
12. **Васильев, Ф. П.** Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, 1981. — 400 с.
13. **Федоров, В. Е.** Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений / В. Е. Федоров, А. В. Уразаева // Тр. Воронеж. зим. мат. шк. — Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2004. — С. 161–172.

Поступила в редакцию 06.11.2014
После переработки 02.02.2016

Сведения об авторах

Плеханова Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; доцент кафедры прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: mariner79@mail.ru.
Байбулатова Гузель Дамировна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: baybulatova_g_d@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 81–92.

CONDITIONAL GRADIENT METHOD FOR A ROBUST CONTROL PROBLEM TO A DEGENERATE EVOLUTION SYSTEM

M. V. Plekhanova[1,2,a], **G. D. Baybulatova**[1,b]

[1]*Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia*
[2]*South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia*
[a]*mariner79@mail.ru;* [b]*baybulatova_g_d@mail.ru*

In the paper the conditional gradient method is used for the numerical resolving of a robust control problem by solutions of the linearized quasistationary phase field system of equations. The convergence of the method is proved, the existence of optimal control and solvability of the conjugate problem are established. For some values of the parameters a numerical experiment is carried out.

Keywords: *optimal control, system with distributed parameters, robust control problem, degenerate evolution equation, numerical solution, conditional gradient method.*

References

1. **Zubova S.P.** On full controllability criteria of a descriptor system. The polynomial solution of a control problem with checkpoints. *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 1, pp. 23–37.

2. **Keller A.V.** Chislennoye resheniye zadachi startovogo zhyostkogo upravleniya dlya modeley leont'yevskogo tipa. Vychislitel'nyy eksperiment [Numerical solution of a start robust control problem for the models of Leontyev type. Computational experiment]. *Yestestvennye i tekhnicheskiye nauki* [Natural and technical sciences], 2011, no. 4, pp. 476–482. (In Russ.).
3. **Kurina G.A.** Invertibility of an operator appearing in the control theory for linear systems. *Mathematical Notes*, 2001, vol. 70, no. 2, pp. 206–212.
4. **Chistyakov V.F.** Tozhdestvenno vyrozhdennyy kvadratichnyy funktsional i svoystva uravneniy Yakobi [Identically degenerate quadratic functional and Jacobi equations properties]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [News of Russia Academy of Sciences. Theory and systems of control], 2004, no. 5, pp. 52–59. (In Russ.).
5. **Fedorov V.E.** Smoothness of solutions of linear equations of Sobolev type. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1731–1735.
6. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** An optimal control problem for a class of degenerate equations. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, vol. 43, no. 5, pp. 698–702.
7. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** An optimality criterion in a control problem for a Sobolev-type linear equation. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 248–254.
8. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** On the existence and uniqueness of solutions of optimal control problems of linear distributed systems which are not solved with respect to the time derivative. *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, iss. 2, pp. 395–412.
9. **Islamova A.F.** *Zadachi smeshannogo upravleniya dlya lineynykh raspredelyonnykh sistem sobolevskogo tipa* [Mixed control problems for linear distributed systems of Sobolev type. Thesis.]. Chelyabinsk, 2012. 129 p. (In Russ.).
10. **Plekhanova M.V., Fedorov V.E.** *Optimal'noye upravleniye vyrozhdennymi raspredelyonnymi sistemami* [Optimal control for degenerate distributed systems]. Chelyabinsk, Izdatel'skiy Tsentr Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 2013. 174 p. (In Russ.).
11. **Omel'chenko E.A., Plekhanova M.V., Davydov P.N.** Chislennoye resheniye linearizovannoy kvazistatsionarnoy sistemy uravneniy fazovogo polya s zapazdyvaniyem [Numerical solution of the linearized quasistationary phase field system of equations with delay]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Fizika* [Bulletin of South Ural State University. Mathematics. Mechanics. Physics], 2013, vol. 5, no. 2, pp. 45–51. (In Russ.).
12. **Vasil'yev F.P.** *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving of extremal problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 400 p. (In Russ.).
13. **Fedorov V.E., Urazaeva A.V.** Obratnaya zadacha dlya odnogo klassa singulyarnykh lineynykh operatorno-differentsial'nykh uravneniy [Inverse problem for a class of singular linear operator differential equations]. *Trudy Voronezhskoy zimney matematicheskoy shkoly* [Proceedings of Voronezh Winter Mathematical School]. Voronezh, Izdatel'stvo Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 2004. Pp. 161–172. (In Russ.).

Article received 06.11.2014
Corrections received 02.02.2016