А. Ю. Горицкий, Построение неограниченного энтропийного решения задачи Коши со счетным числом ударных волн, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, номер 2, 3–6

Математика

УДК 517.95

ПОСТРОЕНИЕ НЕОГРАНИЧЕННОГО ЭНТРОПИЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ УДАРНЫХ ВОЛН

А. Ю. Горицкий

Памяти
Станислава Николаевича Кружкова

Введение. В настоящей работе строится решение задачи Коши для уравнения

$$u_t + u^2 u_x = u_t + (f(u))_x = 0, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

где $f(u) = u^3/3$, с линейными начальными данными. (Заметим, что уравнение (1) описывает, например, процесс просачивания воды через песок, см. [1].) Для удобства положим

$$u|_{t=0} = u_0(x) \equiv x/2. \tag{2}$$

Решения с произвольной линейной начальной функцией получаются из решения задачи (1), (2) при помощи замены переменных (см. ниже). Построенное решение, понимаемое в смысле теории распределений, имеет счетное число линий разрыва.

Напомним (см. [1–3]), что кусочно-гладкая функция $u(t,x)$ является обобщенным решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $u(t,x)$ в окрестности каждой точки гладкости удовлетворяет этому уравнению в классическом смысле, а на каждой линии разрыва Γ выполнено следующее условие Ранкина–Гюгонио:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} = \frac{(u^+)^3 - (u^-)^3}{3\,(u^+ - u^-)}, \tag{3}$$

где $x = x(t)$ — уравнение линии разрыва Γ, а u^- и u^+ — пределы функции $u(t,x)$ при подходе к Γ соответственно слева и справа по направлению оси x.

Хорошо известно, что обобщенное решение задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка (к которым относится и рассматриваемое уравнение (1)) не единственно. Теорема существования и единственности обобщенного *энтропийного* решения этой задачи в классе ограниченных измеримых функций доказана в [2]. Современное состояние теории задачи Коши для уравнений и систем первого порядка отражено, например, в [4].

Решение с начальными условиями (2) не может быть ограниченным, и, следовательно, указанная теорема неприменима. Автору неизвестны и другие общие результаты о существовании и (или) единственности решения задачи Коши в условиях, которым бы удовлетворяла задача (1), (2). Тем не менее от неограниченного обобщенного решения естественно требовать выполнения условия возрастания энтропии. Отметим, что построенное в настоящей работе решение, как будет проверено ниже, является энтропийным.

Характеристики. Перейдем к построению решения $u(t,x)$ задачи (1), (2). Как известно (см., например, [5, гл. 2]), в окрестности любой точки прямой $t = 0$ существует и единственно гладкое решение рассматриваемой задачи. Для его построения следует начальное условие (2) продолжить константой по каждой характеристике (точнее, по проекции характеристики на плоскость (t,x), см. [1]). Уравнением характеристик для уравнения (1) является $\dot u = 0$, $\dot x = u^2$, $\dot t = 0$. Следовательно, характеристикой, выходящей из точки $(t_0, x_0, u_0(x_0)) = (0, s, s/2)$, $s \in \mathbf{R}$, является прямая $u \equiv s/2$, $x - x_0 = u^2(t - t_0)$, т.е.

$$x = s^2 t/4 + s. \tag{4}$$

Разрешая уравнение (4) относительно s, получаем

$$u(t,x) = \left(\sqrt{1+tx} - 1\right)/t. \tag{5}$$

Функция $u(t,x)$, задаваемая соотношением (5) при $t \neq 0$ и начальным условием (2) при $t = 0$, определяет гладкое решение задачи (1), (2) в окрестности каждой точки прямой $t = 0$.

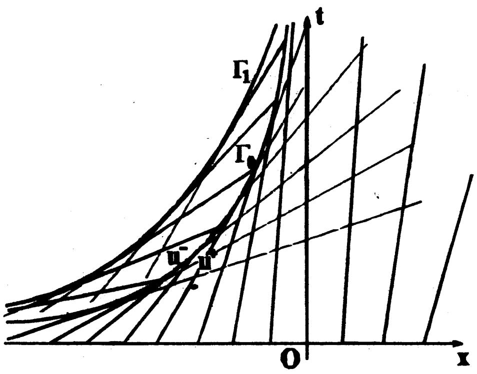

Рис. 1

Семейство прямых (4) имеет в полуплоскости $t > 0$ огибающую Γ_0 — ветвь гиперболы $tx = -1, t > 0$ (см. рис. 1). При подходе к Γ_0 решение (5) имеет предел, равный $-1/t$, а его производные по обеим переменным стремятся к бесконечности. Таким образом, дальше кривой Γ_0 гладкое решение не продолжается. (Следовательно, и построенные характеристики имеет смысл рассматривать лишь до точки касания с Γ_0.)

Итак, построено решение задачи (1), (2) в области $tx > -1$, $t > 0$, и оно задается формулой (5). Для продолжения этого решения (уже рассматриваемого как обобщенное) за Γ_0 воспользуемся условием Ранкина–Гюгонио. Положим в (3) $x(t) = -1/t$ (уравнение кривой разрыва Γ_0) и $u^+(t) = -1/t$ (предел решения на Γ_0 справа). Тогда предел слева u^- при подходе к Γ_0 слева будет равен $u^-(t) = 2/t$. Таким образом, получено новое "начальное" условие $u|_{tx=-1} = 2/t$. Параметризовав эти данные, например, следующим образом: $(t,x,u) = (1/s, -s, 2s)$, $s > 0$, тем же методом характеристик получаем, что $u \equiv 2s$ на каждой прямой

$$x = 4s^2(t - 1/s) - s = 4s^2t - 5s\,, \tag{6}$$

а значит,

$$u = \left(5 + \sqrt{25 + 16tx}\right) / (4t)\,. \tag{7}$$

Формулой (7) решение задается в области $-25/16 < tx < -1$, $t > 0$, т.е. оно продолжено до кривой Γ_1 (ветви гиперболы $tx = -25/16$), являющейся огибающей семейства характеристик (6) (см. рис. 1). Предел справа при подходе к Γ_1 равен $5/(4t)$. Определим предел слева на Γ_1 в соответствии с условием (3) и снова при помощи характеристик продолжим решение за Γ_1. Продолжая этот процесс, мы получим решение в любой точке полуплоскости $t > 0$.

Явный вид решения. Положим $a_k = -(-5/4)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и определим при $t > 0$

$$u(t,x) = \begin{cases} a_0\left(1 - \sqrt{1 + tx/a_0^2}\right)/t & \text{при } tx > -a_0^2 = -1; \\ a_k\left(1 + \sqrt{1 + tx/a_k^2}\right)/t & \text{при } -a_k^2 < tx < -a_{k-1}^2,\ k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{8}$$

Эта кусочно-гладкая функция имеет счетное число линий разрыва Γ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — ветвей гипербол $tx = -a_k^2 = -(5/4)^{2k}$, $t > 0$. В окрестности каждой точки гладкости $u(t,x)$ является классическим решением уравнения (1), что проверяется непосредственной подстановкой в него функции $u = a\left(1 \pm \sqrt{1 + tx/a^2}\right)/t$ при любом $a \neq 0$. Несложно найти пределы справа (u_k^+) и слева (u_k^-) при подходе к Γ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} u_k^+ &= \lim\nolimits_{tx \to -a_k^2 + 0} u(t,x) = a_k\left(1 \pm \sqrt{1 - a_k^2/a_k^2}\right)/t = a_k/t, \\ u_k^- &= \lim\nolimits_{tx \to -a_k^2 - 0} u(t,x) = a_{k+1}\left(1 + \sqrt{1 - a_k^2/a_{k+1}^2}\right)/t = a_{k+1}\left(1 + \sqrt{1 - 16/25}\right)/t = \\ &= 8a_{k+1}/(5t) = -2a_k/t, \end{aligned}$$

и проверить условие Ранкина–Гюгонио на каждой линии разрыва. Действительно, (3) превращается в тождество при подстановке $u^+ = a/t$, $u^- = -2a/t$, $x(t) = -a^2/t$. Наконец, при любом $x_0 \in \mathbf{R}$ выполнено соотношение

$$\lim_{(t,x)\to(+0,x_0)} u(t,x) = \lim_{(t,x)\to(+0,x_0)} \frac{\sqrt{1+tx} - 1}{t} = x_0/2\,,$$

причем предел равномерный по x_0 из любого ограниченного множества оси x.

Таким образом, построенная функция $u(t,x)$ является обобщенным (в смысле соответствующего интегрального тождества) решением задачи (1), (2). Проверим его энтропийность, что в случае кусочно-гладкой функции $u(t,x)$ в точности означает допустимость каждого разрыва. Это условие допустимости разрыва формулируется (см. [1, 2]) в терминах взаимного расположения графика функции $f(u)$ на отрезке между точками u^- и u^+ и хорды с концами $(u^-, f(u^-))$ и $(u^+, f(u^+))$. А именно в случае $u^- < u^+$ график должен быть расположен не ниже хорды, если же $u^- > u^+$, то не выше хорды.

Заметим, что в нашем случае в любой точке (t,x) каждой из линий разрыва Γ_k выполнено равенство $u^- = -2a_k/t = -2u^+$. Легко убедиться, что в этом случае хорда, соединяющая точки с абсциссами u^- и u^+ на кубической параболе $f = u^3/3$, является отрезком касательной к ней, построенной в точке $(u^+, (u^+)^3/3)$. Следовательно, в случае $u^+ > 0$ (тогда $u^- < 0 < u^+$) график функции $f(u) = u^3/3$ на отрезке $[u^-, u^+]$ лежит над соответствующей хордой (см. рис. 2); в случае же $u^+ < 0$ — под хордой. Таким образом, все разрывы построенного решения являются допустимыми, а само решение — энтропийным.

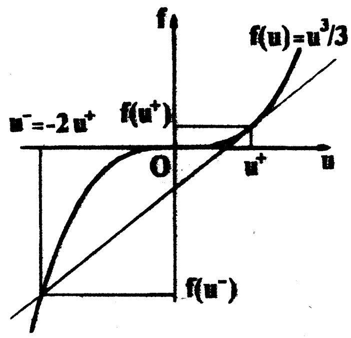

Рис. 2

Представляет интерес поведение решения $u(t,x)$ при фиксированных значениях $x = x_0 < 0$, а также при фиксированных значениях $t = t_0 > 0$. Соответствующие сечения графика функции $u(t,x)$ изображены на рис. 3 и 4. Отметим следующие два факта. Во-первых, $|u(t,x_0)| \sim t^{-1/2}$ при $t \to +\infty$. Во-вторых, при сколь угодно малых $t_0 > 0$ функция $|u(t_0, x)|$ эквивалентна $\sqrt{|x|}$ при $|x| \to +\infty$, хотя $u(0,x) \equiv x/2$ — линейная функция.

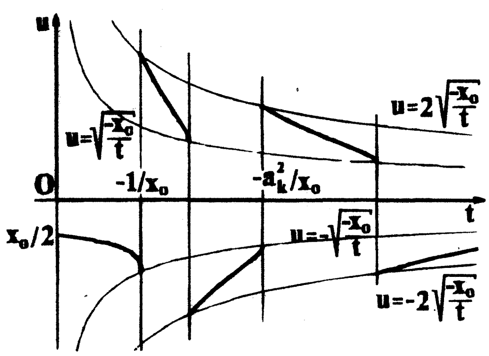

Рис. 3

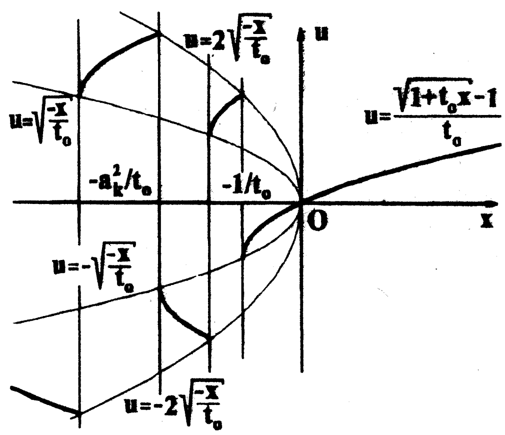

Рис. 4

Если в качестве начального условия вместо (2) взять произвольную линейную функцию

$$u|_{t=0} = kx + b, \tag{9}$$

то решение задачи (1), (9) получается из (8) при помощи одновременного сжатия координат по осям x и t в $2|k|$ раз, сдвига по оси x на $-b/k$, а также замены знака у функции u в случае $k < 0$. Все перечисленные замены не меняют исходного уравнения; условие возрастания энтропии также инвариантно относительно этих замен. Значит, обобщенным энтропийным решением задачи (1), (9) является функция $\operatorname{sign} k \cdot u(2|k|t, 2|k|(x + b/k))$, где функция $u(t,x)$ задана в (8).

В заключение хотелось бы отметить, что изложенный результат автор получил, детально исследуя задачу, предложенную проф. Н. Х. Розовым студентам своего потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А.* Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка: обобщенные решения, ударные волны, центрированные волны разрежения. М., 1997.
2. *Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными //Матем. сб. 1970. **81(2)**. 228–255.
3. *Олейник О.А.* О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций //Докл. АН СССР. 1954. **95(3)**. 451–454.

4. *Dafermos C.M.* Hyperbolic systems of conservation laws //Proc. Int. Congr. Math. V. 2. Zurich, 1994. 1096–1107.
5. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978.

Поступила в редакцию
16.09.97

УДК 517.958

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ С СИСТЕМОЙ КОРНЕЙ B_2

А. А. Обломков

Введение. Исследование многомерных алгебраически интегрируемых конечнозонных операторов Шредингера, начатое в работах [1, 2], естественно привело к классу так называемых многомерных аналогов классического оператора Ламе, связанных с системами корней:

$$L = -\Delta + \sum_{\alpha\in R_+} m_\alpha(m_\alpha+1)(\alpha,\alpha)\wp((\alpha,x)) ,$$

где $\wp$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, R_+ — множество положительных корней простой алгебры Ли G. В работе [1] было высказано предположение, что оператор L является алгебраически интегрируемым, если все параметры m_α являются целыми и инвариантными относительно соответствующей группы Вейля.

В работе [3] данное утверждение доказано для тригонометрических и рациональных вырождений этого оператора. Эллиптический случай для системы корней A_n при $n=2, m_\alpha=1$ исследован в [4, 5] и для общего n в [6, 7]. Вопрос об алгебраической интегрируемости оператора L для остальных систем корней остается до сих пор открытым. В настоящей работе это утверждение доказано в простейшем случае систем корней B_2, когда все $m_\alpha = 1$:

$$L = -\Delta + 2(\wp(x)+\wp(y)) + 4(\wp(x+y)+\wp(x-y)) . \qquad (1)$$

Доказана также интегрируемость оператора

$$\begin{aligned} L = &-\Delta + l(l+1)(2m+1)\wp(\sqrt{2m+1}x) + m(m+1)(2l+1)\wp(\sqrt{2l+1}y) + \\ &+(l+m+1)\left(\wp\left(\tfrac12(\sqrt{2m+1}x+\sqrt{2l+1}y)\right)+\wp\left(\tfrac12(\sqrt{2m+1}x-\sqrt{2l+1}y)\right)\right) , \end{aligned} \qquad (2)$$

связанного с так называемой деформированной системой корней $B_2(l,m)$ [8]. В [8] это было установлено для тригонометрического предела. В настоящей работе доказано, что интегрируемость сохраняется в рациональном пределе при добавлении осцилляторного члена, т.е. для оператора

$$\begin{aligned} L_\omega = &-\Delta + \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{m(m+1)}{y^2} + 4(l+m+1)\times \\ &\times\left(\frac{1}{\sqrt{2m+1}x+\sqrt{2l+1}y} + \frac{1}{\sqrt{2m+1}x-\sqrt{2l+1}y}\right) + \omega^2\left(x^2+y^2\right) . \end{aligned}$$

Алгебраическая интегрируемость эллиптической B_2-системы Калоджеро–Мозера. Скажем, что уравнение Шредингера

$$L\psi = -\Delta\psi + u(x)\psi = E\psi,\ x\in\mathbf{R}^n ,$$

интегрируемо, если существует n коммутирующих дифференциальных операторов (интегралов) $L_1 = L, L_2, \dots, L_n$ с алгебраически независимыми старшими символами $P_1=\xi^2, P_2(\xi),\dots,P_n(\xi)$, и *алгебраически интегрируемо*, если существует еще один оператор L_0, коммутирующий с L_i $(i=1,\dots,n)$,