N. A. Daurtseva, On the existence of $G_2$ class structures on a strictly nearly Kähler six-dimensional manifold, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2014, Number 6, 19–24

УДК 514.76

**Н.А. Даурцева**

# О СУЩЕСТВОВАНИИ СТРУКТУР КЛАССА $G_2$ НА СТРОГО ПРИБЛИЖЕННО КЭЛЕРОВОМ ШЕСТИМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ[1]

Для заданного приближенно кэлерова многообразия ($M^6$, $g_0$, $J_0$, $\omega_0$) изучаются почти эрмитовы структуры ($M^6$, $g$, $J$, $\omega$), у которых одна из структур $g$, $J$ или $\omega$ совпадает с $g_0$, $J_0$ или $\omega_0$ соответственно. Исследуется вопрос о том, могут ли такие структуры ($M^6$, $g$, $J$, $\omega$) принадлежать классу $\boldsymbol{G_2}$ классификации Грэя – Хервеллы.

**Ключевые слова:** *классификация Грэя – Хервеллы, строго приближенно кэлеровы многообразия.*

Пусть ($M$, $g$, $J$, $\omega$) – почти эрмитово многообразие, где $g$ – риманова метрика, $J$ – почти комплексная структура, согласованная с метрикой $g$: $g(JX, JY) = g(X, Y)$, для произвольный векторных полей $X$, $Y$ на $M$, и $\omega$ – соответствующая 2-форма: $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$.

В работе Грэя А. и Хервеллы Л. [1] приведена классификация почти эрмитовых структур и выделены шестнадцать классов таких структур. Напомним данную классификацию. Для произвольной почти эрмитовой структуры ($g$, $J$, $\omega$) рассмотрим 3-форму:

$$\alpha(X, Y, Z) := \nabla_X \omega(Y, Z),$$

где $\nabla$ – связность Леви – Чивита метрики $g$. Очевидно, что определенная таким образом форма $\alpha$ обладает некоторыми симметриями, а именно:

$$\alpha(X, Y, Z) = -\alpha(X, Z, Y) = -\alpha(X, JY, JZ),$$

для произвольных векторных полей $X$, $Y$, $Z$ на $M$.

Пусть теперь $V$ – вещественное векторное пространство четной размерности с почти комплексной структурой $J$ и вещественным положительно определенным скалярным произведением $g$, согласованным с $J$. Пусть $W$ – подпространство в $V^*\otimes V^*\otimes V^*$, определенное следующим образом:

$$W = \{\, \alpha \in V^*\otimes V^*\otimes V^*: \alpha(X, Y, Z) = -\alpha(X, Z, Y) = -\alpha(X, JY, JZ),\ \forall X, Y, Z\in V \,\}.$$

Оно состоит из 3-форм на $V$ с теми же симметриями что и $\nabla_X\omega(Y, Z)$ на многообразии. Обычное представление унитарной группы $U(n)$ на $V$ индуцирует представление на $W$. На $W$ существует естественное скалярное произведение. В [1] показано, что представление группы $U(n)$ на $W$ имеет четыре неприводимые компоненты, $W = W_1\oplus W_2\oplus W_3\oplus W_4$. Из этих компонент можно образовать шестнадцать различных подпространств (включая $\{0\}$ и $W$).

Теперь можно построить классификацию почти эрмитовых многообразий. Для произвольного почти эрмитова многообразия ($M$, $g$, $J$, $\omega$) существует представление группы $U(n)$ на каждом касательном пространстве $T_xM$, $\forall x \in M$. Положим

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, грант 12-01-00873-а; также работа поддержана грантом Президента РФ по поддержке научных школ, проект НШ-4382.2014.1.

$W_x = \{\alpha \in T_x^*M \otimes T_x^*M \otimes T_x^*M$: $\alpha(X,Y,Z) = -\alpha(X, Z, Y) = -\alpha(X, JY, JZ)$, $\forall X, Y, Z \in T_xM\}$. Тогда индуцированное представление группы $U(n)$ на $W_x$ имеет четыре компоненты, как показано выше. Пусть $U$ – одно из шестнадцати инвариантных подпространств в $W$, $x \in M$, обозначим $U_x$ соответствующее подпространство в $W_x$. Будем говорить, что *почти эрмитово многообразие* $(M, g, J, \omega)$ *принадлежит некоторому классу* $\boldsymbol{U}$, если $(\nabla\omega)_x \in U_x$, $\forall x \in M$. Некоторые из этих классов хорошо изучены и широко известны. Так, например, многообразия $(M, g, J, \omega)$, принадлежащие классу $\boldsymbol{W_1}$, известны как *приближенно кэлеровы* и характеризуются условием $\nabla_X J(X) = 0$, $\forall X$, где $\nabla$ – связность Леви – Чивита метрики $g$. Приближенно кэлерова геометрия возникла благодаря концепции слабой голономии, введенной Грэем А. [2] в 1971 году. Унитарная группа $U(n)$ является структурной группой почти эрмитова многообразия. Если группа голономии совпадает с $U(n)$, то данное почти эрмитово многообразие является кэлеровым (принадлежит классу $\boldsymbol{K} = \{0\} \subset \boldsymbol{W}$, $\nabla_X\omega(Y, Z) = 0$, $\forall X, Y, Z$). В ослабленном случае [2] почти эрмитово многообразие со слабой группой голономии $U(n)$ – приближенно кэлерово. Многообразия $(M, g, J, \omega) \in \boldsymbol{W_2}$ называются *почти кэлеровыми* и характеризуются условием $d\omega = 0$. Многообразия $(M, g, J, \omega) \in \boldsymbol{W_3 \oplus W_4}$ **–** это не что иное как *эрмитовы* многообразия, характеризуемые наличием интегрируемой почти комплексной структуры $J$.

Если для приближенно кэлерова многообразия $(M, g, J, \omega)$ дополнительно выполняется $\nabla_X J \neq 0$, $\forall X \neq 0$, то будем говорить, что оно *строго приближенно кэлерово*. Строго приближенно кэлеровы 6-многообразия обладают рядом известных свойств. Так, например, в работе М. Вербицкого [3] доказано, что для приближенно кэлерова многообразия $(M, g, J, \omega)$, не локально изометричного $S^6$, почти комплексная структура однозначно определяется римановой структурой. Для других классов это вообще говоря не так. Например, класс $\boldsymbol{W_2}$ определяется условием $d\omega = 0$. Рассмотрим множество $A_\omega^+$, состоящее из всех почти комплексных структур $I$, согласованных с $\omega$: $\omega(IX, IY) = \omega(X, Y)$ и удовлетворяющих условию положительности $\omega(X, IX) > 0$, $\forall X \neq 0$. Будем называть $A_\omega^+$ пространством *$\omega$–положительно ассоциированных почти комплексных структур* [4]. Тогда очевидно, что все почти эрмитовы структуры $(g_I, I, \omega)$, где $I \in A_\omega^+$, $g_I(X, Y) := \omega(X, IY)$ принадлежат классу $\boldsymbol{W_2}$. С другой стороны, приближенно кэлерова структура может конфликтовать с другими почти эрмитовыми структурами. А именно, известны следующие результаты.

**Теорема 1** [5]. *Почти комплексная структура, соответствующая строго приближенно кэлеровой структуре на* 6-*многообразии, не совместима ни с какой симплектической формой.*

То есть для строго приближенно кэлеровой структуры $(g, J)$ на 6-многообразии $M$ среди всех других метрик $h_J$, согласованных с $J$ ($h_J(JX, JY) = h_J(X, Y)$), не найдется такой, для которой $(h_J, J) \in \boldsymbol{W_2}$**.**

**Замечание 1.** Доказательство теоремы 1 дает даже более сильный результат: для строго приближенно кэлерова 6-многообразия $(M, g, J)$ даже в окрестности произвольной точки $x \in M$ не существует эрмитовой формы $h$, совместимой с $J$ и такой, что ее кэлерова 2-форма $\omega_h(X,Y) = h(JX,Y)$ удовлетворяет условию $d\omega_h^{(3,0)} = 0$.

**Теорема 2** [6]. *Для строго приближенно кэлерова* 6-*многообразия*$(M, g, J, \omega)$ *всякая положительная ассоциированная почти комплексная структура* $I \in A_\omega^+$ *не интегрируема*.

Также, очевидно имеет место следующая

**Лемма 1.** *Для строго приближенно кэлерова* 6-*многообазия* ($M$, $g$, $J$,$\omega$) *и всякой почти комплексной структуры* $I\in A_\omega^+$*почти эрмитово многообразие* ($M$, $g_I$, $I$, $\omega$) $\notin \boldsymbol{W_2}$.

***Доказательство.*** Воспользуемся одним из свойств приближенно кэлеровой структуры [1]:

$$3\nabla_X \omega = d\omega.$$

Допустим, что для некоторого $I\in A_\omega^+$ почти эрмитова структура ($g_I$, $I$, $\omega$)$\in \boldsymbol{W_2}$, но тогда $d\omega = 0$ и $\nabla_X\omega = 0$ для связности Леви – Чивита метрики $g$. Следовательно ($g$, $J$, $\omega$) – кэлерова структура, что противоречит условию строгости. Лемма доказана.

Таким образом, для строго приближенно кэлерового 6-многообразия ($M$, $g$, $J$, $\omega$) почти эрмитово многообразие ($M$, $g_I$, $I$, $\omega$) не может принадлежать классам $\boldsymbol{W_2}$ и $\boldsymbol{W_3}\oplus\boldsymbol{W_4}$ для любой почти комплексной структуры $I\in A_\omega^+$. Возникает вопрос, может ли эта структура принадлежать классу $\boldsymbol{W_2}\oplus\boldsymbol{W_3}\oplus\boldsymbol{W_4}$. Данный класс, в классификации Грэя – Херведлы, обозначается как $\boldsymbol{G_2}$. Такие структуры изучались в работах [7, 8].

Вообще говоря, с любой почти эрмитовой структурой ($g$, $J$, $\omega$) можно связать три множества почти эрмитовых структур. А именно:

$$H_g = \{(g, I, \omega_I): g(IX, IY) = g(X, Y), \omega_I(X, Y) := g(IX, Y)\},$$

$$H_\omega = \{(g_I, I, \omega): \omega(IX, IY) = \omega(X, Y), \omega(X, IX)>0, g_I(X, Y) := \omega(X, IY)\},$$

$$H_J = \{(h, J, \omega_h): h(JX, JY) = h(X, Y), \omega_h(X, Y) := h(JX, Y)\}.$$

В данной статье рассмотрим вопрос существования почти эрмитовой структуры класса $\boldsymbol{W_2}\oplus\boldsymbol{W_3}\oplus\boldsymbol{W_4}$, принадлежащей множествам $H_g$, $H_\omega$ или $H_J$ , в случае, если структура ($g$, $J$, $\omega$) строго приближенно кэлерова.

Докажем следующий вспомогательный результат.

**Лемма 2.** *Для почти эрмитового многообразия* ($M$, $g$, $J$, $\omega$) *выполняется формула*

$$(d^{-1,2}+d^{2,-1})_J\omega(X, Y, Z) = 1/6\sigma_{XYZ}\,\omega(N(X, Y), Z),$$

*где* $\sigma_{XYZ}$ *– циклическая сумма по* $X$, $Y$, $Z$ *и* $N$ *– тензор Нейенхейса почти комплексной структуры* $J$.

***Доказательство.*** Внешний дифференциал формы $\omega$

$$d\omega(X, Y, Z) = 1/3\{X\omega(Y, Z) + Y\omega(Z, X) + Z\omega(X, Y) - \omega([X, Y], Z) -$$
$$- \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y)\}$$

для произвольных $X, Y, Z\in\Gamma(TM)$. Так как форма $\omega$ имеет тип (1,1) относительно $J$, то $d^{-1,2}{}_J\omega$ имеет тип (0,3). Тогда

$$d^{-1,2}{}_J\omega(X, Y, Z) = 1/8d^{-1,2}{}_J\omega(X+iJX+X-iJX, Y+iJY+Y-iJY, Z+iJZ+Z-iJZ) =$$
$$= 1/8d^{-1,2}{}_J\omega(X+iJX, Y+iJY, Z+iJZ) = 1/8d\omega(X+iJX, Y+iJY, Z+iJZ).$$

Поскольку значение (1,1)-формы $\omega$ на векторных полях $X+iJX$, $Y+iJY$ типа (0,1) равно нулю, то

$$d\omega(X+iJX, Y+iJY, Z+iJZ) = - 1/3\sigma_{XYZ}\omega([X+iJX, Y+iJY], Z+iJZ) =$$
$$= 2/3\sigma_{XYZ}\omega(N(X, Y) - iJN(X, Y), Z).$$

Таким образом, мы имеем два равенства:

$$d^{-1,2}{}_J\omega(X, Y, Z) = 1/12\sigma_{XYZ}\omega(N(X, Y)-iJN(X, Y), Z),$$

$$d^{2,-1}{}_J\omega(X, Y, Z) = 1/12\sigma_{XYZ}\omega(N(X, Y) + iJN(X, Y), Z),$$

складывая которые, получаем искомую формулу.

**Теорема 3.** *На строго приближенно кэлеровом* 6*-многообразии* $(M, g, J, \omega)$ *всякая почти эрмитова структура* $(g_I, I, \omega)\in H_\omega$ *с фундаментальной формой* $\omega$ *не может принадлежать классу* $\boldsymbol{G_2}$.

***Доказательство.*** Согласно доказательству теоремы 2 [6], при произвольном выборе почти комплексной структуры $I\in A_\omega^+$ (3,0)-часть формы $d\omega$ относительно $I$ не обращается в нуль, $d^{-1,2}\omega \neq 0$. С другой стороны, условие [1]

$$\sigma_{XYZ}\omega(N(X, Y), Z) = 0,$$

выделяющее структуры класса $\boldsymbol{G_2} = \boldsymbol{W_2}\oplus\boldsymbol{W_3}\oplus\boldsymbol{W_4}$, согласно лемме 2 эквивалентно $(d^{-1,2}+d^{2,-1})_I\,\omega = 0$. А значит, среди почти эрмитовых структур $(g_I, I, \omega)\in H_\omega$ невозможно найти структуры класса $\boldsymbol{G_2}$. Теорема доказана.

Аналогично, воспользовавшись результатом леммы 2 и теоремы 1, получаем следующий результат.

**Теорема 4.** *На строго приближенно кэлеровом* 6*-многообразии* $(M, g, J, \omega)$ *всякая почти эрмитова структура* $(h, J, \omega_h)\in H_J$ *не может принадлежать классу* $\boldsymbol{G_2}$.

***Доказательство.*** Согласно замечанию 1 к теореме 1, для многообразия $(M, g, J)$ даже в окрестности произвольной точки $x\in M$ не существует эрмитовой формы $h$, совместимой с $J$ и такой, что ее кэлерова 2-форма $\omega_h(X,Y) = h\,(JX,Y)$ удовлетворяет условию $d\omega_h^{(3,0)} = 0$. А значит, что согласно лемме 2 среди всех структур $(h, J, \omega_h)\in H_J$ не найдется структуры класса $\boldsymbol{G_2}$.

Однако для почти эрмитовых структур $(g, I, \omega_I) \in H_g$ на строго приближенно кэлеровом 6-многообразии $(M, g, J, \omega)$ возможна принадлежность данной структуры классу $\boldsymbol{G_2}$. Приведем пример. Рассмотрим в качестве многообразия $M$ произведение трехмерных сфер $S^3\times S^3 = SU(2)\times SU(2)$. Известно [9], что оно допускает левоинвариантную строго приближенно кэлерову структуру. Напомним ее конструкцию. Для этого зафиксируем на $SU(2)\times SU(2)$ корепер, состоящий из левоинвариантных 1-форм $(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3)$ на $SU(2)\times SU(2)$, обладающий следующими свойствами:

1. $e_1, e_2, e_3$ $(f_1, f_2, f_3)$ – есть 1-формы, обращающиеся в нуль на касательном пространстве ко второму (соотв. первому) сомножителю.

2. $de_i = e_{i+1}\wedge e_{i+2}$, где индексы рассматриваются как элементы $\mathbf{Z}_3$, аналогично $df_i = f_{i+1}\wedge f_{i+2}$.

Тогда 2-форма $\omega = e_1\wedge f_1 + e_2\wedge f_2 + e_3\wedge f_3$, почти комплексная структура $J = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -E & 2E \\ -2E & E \end{pmatrix}$ и метрика $g = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2E & -E \\ -E & 2E \end{pmatrix}$ в базисе $(e, f)$, где $E$ обозначает единичную матрицу 3×3, определяют строго приближенно кэлерову структуру $(g, J, \omega)$ на $M = S^3\times S^3$. С другой стороны, хорошо известно, что $S^3\times S^3$ допускает семейство левоинвариантных комплексных структур Калаби – Экмана [10]. Во введенном выше базисе часть структур этого семейства имеют матрицу

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } a^2+bc = -1.$$

Очевидно, что, например, комплексная структура $I$, соответствующая параметрам $a = -b/2$, $c = -b$, где в силу условия $a^2+bc = -1$, параметр $b = 2\sqrt{3}/3$ сохраняет метрику $g$. Таким образом, почти эрмитова структура $(g, I, \omega_I)\in H_g$ принадлежит классу $\boldsymbol{W}_3\oplus\boldsymbol{W}_4\subset \boldsymbol{W}_2\oplus\boldsymbol{W}_3\oplus\boldsymbol{W}_4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *GrayA.*, *Hervella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl.1980. Vol. 123. P. 35–58.
2. *Gray A.* Weak holonomy groups // Math. Z. 1971. No. 125. P. 290–300.
3. *Verbitsky M.* An intrinsic volume functional on almost complex 6-manifolds and nearly Kähler geometry // Pacific J. of Math. 2008.Vol. 235(2). P. 323–344.
4. *Смоленцев Н.К.* Пространства римановых метрик // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 31. С. 69–146.
5. *Lejmi M.* Strictly Nearly Kähler 6-manifolds are not compatible with symmetric forms // Comp. Rend. Math. Acad. Sci. Paris. 2006. Ser. I. Vol. 343. P. 759–762.
6. *Даурцева Н.А.* Об интегрируемости почти комплексных структур на строго приближенно келеровом 6-многообразии // СМЖ. 2014. Т. 55. № 1. С. 61–65.
7. Hervella L.M., Vidal E. Nouvelles geometries pseudo-kählériennes $\boldsymbol{G}_1$ et $\boldsymbol{G}_2$ // C.R. Acad. Sci. Paris. 1976. Vol. 283. P. 115–118.
8. *Kobotis A.*, *Xenos Ph.J.* On $\boldsymbol{G}_2$-manifolds // Ann. Math. B. P. 1994. Vol. 1. No. 1. P. 27–42.
9. *Butruille J.-B.* Classification des variétés approximativement kähleriennes homogénes // Ann. Global Anal. Geom. 2005. Vol. 27. P. 201–225.
10. *Calabi E.*, *Eckmann B.* A class of compact complex manifolds which are not algebraic // Ann. Math. 1935. Vol. 58. P. 494–500.

Статья поступила 02.07.2014 г.

*Daurtseva N.A.* ON THE EXISTENCE OF $\boldsymbol{G}_2$ CLASS STRUCTURES ON A STRICTLY NEARLY KÄHLER SIX-DIMENSIONAL MANIFOLD

The strictly nearly Kähler 6-manifold $(M, g, J, \omega)$ is researched. Since the class $\boldsymbol{G}_2$ is the orthogonal complement to the class of nearly Kähler structures in the space of all classes of almost Hermitian structures, no strictly nearly Kähler structure can be simultaneously an almost Hermitian structure of the $\boldsymbol{G}_2$ class. Can this class contain other structures, «close» to a strictly nearly Kähler structure, in the case of dimension six? There exist three families of almost Hermitian structures linked with the given structure $(g, J, \omega)$ on $M$, namely, $H_g$, $H_J$, and $H_\omega$ families of almost Hermitian structures with the same metric $g$, or the same almost complex structure $J$, or the same form $\omega$, respectively. The problem whether a structure of the $\boldsymbol{G}_2$ class can be present among structures belonging to those families is studied. It is proved that $H_\omega$ and $H_J$ do not contain structures of the $\boldsymbol{G}_2$ class. By an example of left-invariant structures on $S^3\times S^3 = SU(2)\times SU(2)$, it is proved that this is nevertheless possible for structures from $H_g$.

Keywords: Gray – Hervella classification, strictly nearly Kähler manifolds.

*Daurtseva Nataliya Alexandrovna* (Candidate of Physics and Mathematics,
Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation)

E-mail: natali0112@ngs.ru

REFERENCES

1. Gray A., Hervella L.M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1980, vol. 123, pp. 35–58.
2. Gray A. Weak holonomy groups. *Math. Z.*, 1971, no. 125, pp. 290–300.

3. Verbitsky M. An intrinsic volume functional on almost complex 6-manifolds and nearly Kähler geometry. *Pacific J. of Math*., 2008, vol. 235(2), pp. 323–344.
4. Smolentsev N.K. Prostranstva rimanovykh metrik. *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya*, 2003, vol. 31, pp. 69–146. (in Russian)
5. Lejmi M. Strictly Nearly Kähler 6-manifolds are not compatible with symmetric forms. *Comp. Rend. Math. Acad. Sci. Paris*, 2006, ser. I, vol. 343, pp. 759–762.
6. Daurtseva N.A. Ob integriruemosti pochti kompleksnykh struktur na strogo priblizhenno kelerovom 6-mnogoobrazii. *SMZh*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 61–65. (in Russian)
7. Hervella L.M., Vidal E. Nouvelles geometries pseudo-kählériennes $G_1$ et $G_2$. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1976, vol. 283, pp. 115–118.
8. Kobotis A., Xenos Ph.J. On G2-manifolds. *Ann. Math. B. P.* 1994, vol. 1, no. 1, pp. 27–42.
9. Butruille J.-B. Classification des variétés approximativement kähleriennes homogénes. *Ann. Global Anal. Geom*., 2005, vol. 27, pp. 201–225.
10. Calabi E., Eckmann B. A class of compact complex manifolds which are not algebraic. *Ann. Math*., 1935, vol. 58, pp. 494–500.