I. Ya. Bakelman, The first boundary value problem for quasilinear elliptic equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1960, Volume 134, Number 5, 1005–1008

Доклады Академии наук СССР
1960. Том 134, № 5

МАТЕМАТИКА

И. Я. БАКЕЛЬМАН

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 V 1960)

1. Пусть Ω — область на плоскости x, y, ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ. Относительно Γ мы будем предполагать, что она задается параметрически трижды непрерывно дифференцируемыми функциями $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s — длина дуги на Γ) и ее кривизна во всех точках не меньше чем $\varkappa_0 = \text{const} > 0$.

В области $\Omega + \Gamma$ рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного эллиптического уравнения

$$A(x, y, z, p, q) r + 2B(x, y, z, p, q) s + C(x, y, z, p, q) t = D(x, y, z, p, q) \quad (1)$$

при нулевом граничном условии.

Мы будем предполагать, что функции A, B, C, D непрерывно дифференцируемы по всем переменным x, y, z, p, q и их первые производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \beta \leqslant 1$ по $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и по z, p, q при всех конечных значениях этих переменных.

Пусть

$$|D(x, y, 0, p, q)| \leqslant \varphi(x, y) R(\sqrt{p^2 + q^2}),$$

где $\varphi(x, y) \geqslant 0$ и $R(\sqrt{p + q^2}) > 0$ — непрерывные функции своих переменных, первая в области $\Omega + \Gamma$, вторая на плоскости p, q.

По функции $\varphi(x, y)$ построим некоторые вспомогательные функции. Пусть M — произвольная точка кривой Γ. Обозначим через K_M круг наименьшего радиуса, который касается Γ в точке M и содержит внутри себя область $\Omega + \Gamma$. Пусть O_M — центр этого круга и r_M — его радиус. На отрезке $[0, r_M]$ строим функцию

$$f_M(\rho) = \max \varphi(x, y),$$

где наибольшее значение функции $\varphi(x, y)$ берется на дуге окружности с центром в O_M и радиусом $0 \leqslant \rho \leqslant r_M$, лежащей внутри $\Omega + \Gamma$. Пусть M — по-прежнему произвольная точка на Γ, а t_M — касательная к Γ в точке M. Спроектируем область $\Omega + \Gamma$ на прямую l_M, перпендикулярную t_M. Введем на плоскости x, y новую декартову систему координат u, v так, чтобы прямые l_M, t_M были соответственно осями u, v. Пусть $u_M^{(1)}$ и $u_M^{(2)}$ ($u_M^{(1)} < u_M^{(2)}$) — концы отрезка на оси u *, который является проекцией области $\Omega + \Gamma$. Положим

$$\mu_M(u) = \max_v \varphi(u, v),$$

* Одно из чисел $u_M^{(1)}$, $u_M^{(2)}$ равно нулю.

где наибольшее значение функции $\varphi(u, v)$ берется для всех точек области $\Omega+\Gamma$ с общей проекцией на прямую u. Построенная функция определена на отрезке $[u_M^{(1)}, u_M^{(2)}]$.

Имеют место следующие теоремы о разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть в области $\Omega+\Gamma$ задано уравнение*

$$A(x, y, p, q)\, r+2B(x, y, p, q)\, s+C(x, y, p, q)\ t=D(x, y, z, p, q), \tag{2}$$

коэффициенты которого удовлетворяют рассмотренным выше условиям, а также следующим требованиям:

а) *Имеет место неравенство*

$$A(x, y, p, q)\,\xi^2+2B(x, y, p, q)\,\xi\eta+C(x, y, p, q)\,\eta^2 \geqslant$$
$$\geqslant \alpha(\sqrt{p^2+q^2})(\xi^2+\eta^2),$$

где $\alpha(\sqrt{p^2+q^2})$ — непрерывная функция на плоскости p, q, строго положительная при всех конечных значениях p, q.

б) *При всех $(x, y)\in\Omega+\Gamma$ и любых z, p, q справедливо неравенство*

$$D_z(x, y, z, p, q) \geqslant \mathrm{const}>0.$$

в) *При фиксированных x, y, z отношения $|D_x/D_z|$, $|D_y/D_z|$, $|C_x/C|$, $|A_y/A|$, $|D/D_z|$ равномерно ограничены в зависимости от z.*

г) *Выполнено одно из двух соотношений*

$$\sup_{M\in\Gamma}\left\{\pi\int_0^{r_M} f_M(r)\, r\, dr\right\}<2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha^2(\sqrt{p^2+q^2})}{R^2(\sqrt{p^2+q^2})}\, dp\, dq \tag{3}$$

или

$$\sup_{M\in\Gamma}\int_{u_M^{(1)}}^{u_M^{(2)}}\mu_M(u)\, du<\min\left\{\int_{-\infty}^{0}\frac{\alpha(\tau)}{R(\tau)}\, d\tau,\ \int_0^{+\infty}\frac{\alpha(\tau)}{R(\tau)}\, d\tau\right\}. \tag{4}$$

Тогда первая краевая задача для уравнения (2) при нулевом граничном условии однозначно разрешима в классе функций, третьи производные которых удовлетворяют в области $\Omega+\Gamma$ условию Гельдера с показателем $0<\beta'<\beta$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, за исключением условия б), которое мы заменяем следующим:*

б′) *Пусть при всех $x, y\in\Omega+\Gamma$ и любых z, p, q справедливо неравенство*

$$D_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0,$$

функции A, B, C, D при фиксированных x, y и z ведут себя при $p^2+q^2\to+\infty$ как полиномы по переменным p, q, а функция $D(x, y, z, p, q)$ представима в виде

$$D(x, y, z, p, q)=D_1(x, y, z, p, q)+D_2(x, y, z, p, q),$$

где

$$D_1(x, y, z, p, q) \geqslant 0$$

при всех $(x, y)\in\Omega+\Gamma$, z, p, q;

$$\frac{D_2}{Ap^2+2Bpq+Cq^2} \leqslant k=\mathrm{const}<+\infty$$

для $(x, y)\in\Omega+\Gamma$, $p^2+q^2>1$ и любых z.

Тогда имеет место заключение теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть в области* $\Omega + \Gamma$ *задано уравнение*

$$A(x, y, z, p, q)\, r + 2B(x, y, z, p, q)\, s + C(x, y, z, p, q)\, t = D(x, y, z, p, q), \quad (5)$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям:

а) *Функции* A, B, C, D *непрерывно дифференцируемы по всем переменным и их первые производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем* $0 < \beta \leqslant 1$ *по* $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ *и при всех конечных* z, p, q.

Далее при всех допустимых значениях x, y, z, p, q *квадратичная форма*

$A_z(x, y, z, p, q)\, \xi^2 + 2B_z(x, y, z, p, q)\, \xi\eta + C_z(x, y, z, p, q)\, \eta^2 \leqslant -\lambda_0 (\xi^2 + \eta^2)$ $(\lambda_0 = \text{const} > 0)$, *и, наконец,*

$$A(x, y, 0, p, q)\, \xi^2 + 2B(x, y, 0, p, q)\, \xi\eta + C(x, y, 0, p, q)\, \eta^2 \geqslant$$
$$\geqslant \alpha(\sqrt{p^2 + q^2})(\xi^2 + \eta^2),$$

где $\alpha(\sqrt{p^2 + q^2})$ — *непрерывная функция на плоскости* p, q, *строго положительная при всех конечных значениях* p, q.

б) *При всех допустимых значениях* x, y, z, p, q *имеем*

$$D_z(x, y, z, p, q) \geqslant 0, \quad D(x, y, z, p, q) \geqslant \text{const} > 0.$$

в) *Выполнено условие* в) *теоремы* 1 *и, кроме того,* A_y, A_z, A; C_x, C_z, C; D_x, D_y, D_z, D *имеют одинаковые порядки роста по* p, q.

г) *Выполнено условие* г) *теоремы* 1.

Тогда первая краевая задача при нулевом граничном условии для уравнения (5) *имеет по крайней мере одно решение в классе функций, третьи производные которых удовлетворяют условию Гельдера в области* $\Omega + \Gamma$ *с показателем* $\beta' < \beta$.

Отметим, что если строить функцию $\mu_M(u)$ так, чтобы ее график был симметричен относительно ординаты, проходящей через среднюю точку промежутка $[u_M^{(1)}, u_M^{(2)}]$ (для любой точки $M \in \Gamma$), то условие (4) можно заменить таким:

$$\sup_{M \in \Gamma} \int_{u_M^{(1)}}^{u_M^{(2)}} \mu_M(u)\, du < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\tau)}{R(\tau)}\, d\tau.$$

2. Теоремы 1 и 2 представляют собой дальнейшее развитие результатов С. Н. Бернштейна по квазилинейным эллиптическим уравнениям вида (2) (см. [1]). С. Н. Бернштейн рассматривает уравнения, у которых коэффициенты A, B, C, D имеют согласованные порядки роста по p, q при $p^2 + q^2 \to +\infty$. Это согласование дается условием, что при $p^2 + q^2 > 1$

$$\frac{|D|}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2} \leqslant k = \text{const} < +\infty. \quad (6)$$

Первая краевая задача для уравнения

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = (1 + p^2 + q^2)^{3/2},$$

которое не подчиняется условию (6), разрешима, вообще говоря, лишь в достаточно малых областях.

Интегральные условия г) в теоремах 1 и 2 дают достаточные условия разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений, если порядки роста коэффициентов по первым производным не подчиняются условию согласования С. Н. Бернштейна. Отметим, что в ряде случаев эти условия весьма близки к необходимым, например, если область Ω есть круг радиуса 1, а уравнение (2) имеет вид

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = (1+p^2+q^2)^{3/2}.$$

Геометрически здесь речь идет о построении поверхности со средней кривизной, равной единице. Решением рассматриваемой задачи будет полусфера радиуса единица.

Теорема 3 представляет собой аналог результатов Ю. Шаудера ([2]), Л. Ниренберга ([3]) и О. А. Ладыженской для уравнений

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t = 0$$

на общий случай неоднородных квазилинейных эллиптических уравнений.

3. Наметим кратко план доказательства сформулированных теорем. Из результатов С. Н. Бернштейна ([1]), Ю. Шаудера ([2]) и Л. Ниренберга ([3]) вытекает, что для этого достаточно доказать возможность получения априорных оценок для предполагаемого решения в пространстве C^1. Мы получаем сначала априорную оценку модуля решения в $\Omega+\Gamma$ и его первых производных на границе. Для этого на решение уравнения натягивается выпуклая оболочка, которая представляет собой две выпуклые шапочки, обращенные выпуклостями в разные стороны и склеенные между собой по кривой Γ. Условия б) и г) в теоремах 1 и 2 и условия а), б) и г) в теореме 3 позволяют дать априорную оценку для наклонов опорных плоскостей на границе обеих шапочек, откуда легко вытекают нужные нам априорные оценки модуля и первых производных на границе. Априорные оценки модулей первых производных решения внутри получаются с помощью метода вспомогательных функций С. Н. Бернштейна.

После этого завершение доказательства теорем 1, 2 и 3 получается сведением к топологическому принципу Шаудера с помощью результатов Ниренберга и Шаудера по линейным эллиптическим уравнениям (подробно эта схема описана в ([3])).

В заключение заметим, что полученные выше результаты естественно обобщаются на случай достаточно гладкого неоднородного граничного условия; из-за недостатка места мы на них останавливаться не будем.

Ленинградский педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступило
17 V 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, УМН, 8,75 (1941). [2] J. Schauder, Math. Zs., **34**, № 4 (1933). [3] L. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., **6**, № 3 (1953). [4] О. А. Ладыженская, ДАН, **120**, № 5 (1958).