А Л Г Е Б Р А и Л О Г И К А
СЕМИНАР

Том 6
Выпуск 2 РУКОВОДИТЕЛЬ А.И.МАЛЬЦЕВ 1967 г.

ЗАМЕЧАНИЯ О ПРОСТЫХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ

К.А.ЖЕВЛАКОВ

Напомним, что простым кольцом называется кольцо A с ненулевым умножением $(A^2 \neq 0)$, не содержащее собственных двусторонних идеалов. Кольцо называется альтернативным, если в нем любые два элемента порождают ассоциативное подкольцо.

§ 1. Простые альтернативные коммутативные кольца

На Международном математическом конгрессе в Москве профессор Эрвин Клейнфелд поставил вопрос: существует ли простое альтернативное коммутативное кольцо, которое не является полем. Недавно этого вопроса касался Кевин Мак-Криммон [9], однако при чрезвычайно сильных ограничениях: он предполагал отсутствие в кольце нильпотентных элементов. Ниже следует полный ответ на поставленный вопрос.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кольцо A называется нильпотентным индекса n, если существует такое натуральное число n, что произведение любых n элементов из A при любой расстановке скобок равно нулю.

Кольцо A называется локально нильпотентным, если в нем нильпотентно всякое конечно порожденное подкольцо (каждое - своего

индекса).

Докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Не существует простых локально нильпотентных колец.

Пусть A - произвольное (без всяких предположений об ассоциативности) локально нильпотентное кольцо. Предположим, что A просто, и возьмем в нем произвольный элемент $a \neq 0$. Рассмотрим (a) - идеал, порожденный элементом a, то есть всевозможные конечные суммы, с допустимыми коэффициентами, элементов вида:

$$a U_{x_1} U_{x_2} \dots U_{x_k}, \text{ где}$$

$$U_{x_i} \equiv \begin{cases} R_{x_i} & \text{- оператор правого умножения на элемент } x_i, \\ L_{x_i} & \text{- оператор левого умножения на элемент } x_i \end{cases}$$

и, по крайней мере, один U_{x_i} присутствует.

$(a) \neq 0$, ибо в противном случае подгруппа, порожденная a в аддитивной группе кольца A, была бы двусторонним идеалом A и притом собственным, так как $A^2 \neq 0$, поэтому $(a) = A$. Значит, найдутся в A такие элементы x_{ij}, что

$$a = a U_{x_{11}} U_{x_{12}} \dots U_{x_{1k_1}} + a U_{x_{21}} U_{x_{22}} \dots U_{x_{2k_2}} + \dots + a U_{x_{t1}} \dots U_{x_{tk_t}}. \quad (1)$$

Возьмем в A подкольцо B, порожденное множеством элементов

$$\{a, x_{11}, x_{12}, \dots x_{1k_1}, x_{21}, \dots, x_{tk_t}\}.$$

По условию оно нильпотентно; пусть индекс его нильпотентности s. Но тогда если в $a U_{x_{i1}} U_{x_{i2}} \dots U_{x_{ik_i}}$ $s-1$ раз подставить вместо a его выражение (1), то из (1) следует, что $a = 0$. Полученное противоречие служит доказательством справедливости предложения.

Теперь может быть доказана

ТЕОРЕМА 1. Если A - простое альтернативное коммутативное кольцо, то A - поле.

Если характеристика A отлична от 3, то справедливость утвер-

ждения очевидна, ввиду ассоциативности A, которая следует из известного соотношения:

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y + 3(x, y, z), \tag{2}$$

где $[a, b] \equiv ab - ba$ - коммутатор элементов a, b;

$$(a, b, c) \equiv (ab)c - a(bc) -$$

ассоциатор элементов a, b, c.

Поэтому далее считаем, что характеристика A равна 3, то есть в A $3a = 0$ для любого элемента a.

Заметим, что в этом случае в A, во-первых, для любого числа n и любых элементов a_i

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i^3. \tag{3}$$

Для $n \leq 2$ это очевидно, так как a_1 и a_2 порождают ассоциативное подкольцо. Доказательство (3) завершается очевидной индукцией по n, ввиду соотношения

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^3 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n\right)^3 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^3 + a_n^3.$$

Во-вторых, для любого числа n и любых элементов a_i в A

$$\{[(a_1 a_2) a_3 \ldots] a_n\}^3 = [(a_1^3 a_2^3) a_3^3 \ldots] a_n^3. \tag{4}$$

Доказательство (4) получается очевидной индукцией по n, ввиду соотношения

$$[(xy)(xy)](xy) = xy\,xy\,xy = x^3 y^3.$$

(Скобки можно не писать, ввиду ассоциативности подкольца, порожденного x и y).

Известно (см. [11]), что в A куб любого ассоциатора равен 0, то есть для любых a, b и c из A

$$(a, b, c)^3 = 0. \tag{5}$$

В самом деле,

$$(a,b,c)^3 = [(ab)c - a(bc)]^3 = [(ab)c]^3 - [a(bc)]^3 =$$

$$= (a^3b^3)c^3 - a^3(b^3c^3) = [a(ab^3)a]c^3 - a[a(b^3c^3)a] =$$

$$= a[(ab^3)(ac^3)] - a[(ab^3)(ac^3)] = 0$$

(в силу тождеств Муфанг).

Предположим теперь, что A неассоциативно. Тогда в A найдутся такие элементы a, b и c, что $S \equiv (a,b,c) \neq 0$. Ввиду простоты A, идеал, порожденный S в A, совпадает с A. Значит, в A любой элемент x имеет вид:

$$x = \sum \{[(sc_{i_1})c_{i_2}]\ldots\} c_{i_t}.$$

Но из (3), (4) и (5) следует, что $x^3 = 0$. И так как характеристика A равна 3 (отлична от 2), то по теореме А.И.Ширшова [4] A локально нильпотентно. Поэтому, ввиду предложения 1, оно не может быть простым.

Итак, допущение неассоциативности кольца A ведет к противоречию. Следовательно, A ассоциативно, и утверждение теоремы справедливо во всех случаях.

ПРИМЕЧАНИЕ. Произвольная расстановка скобок, используемая в определении 1 на произведении n элементов, весьма существенна для доказательства справедливости предложения 1.

Покажем это на следующем примере.

Напомним сначала, что кольцо A называется правонильпотентным (индекса n), если существует такое натуральное число n, что для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из A $x_1 R x_2 R x_3 \ldots R x_n = 0$; кольцо A называется разрешимым (индекса n), если существует такое натуральное число n, что $A(n) = 0$, где $A_{(1)} \equiv A$ и

$$A_{(i+1)} \equiv A_{(i)} A_{(i)}.$$

Всякое правонильпотентное кольцо является и разрешимым, но не наоборот. (Напомним, что, например, в классе альтернативных и в классе йордановых колец локальная правонильпотентность, локальная разреши-

мость и локальная нильпотентность эквивалентны (см. [2])).

Построим теперь простую локально правонильпотентную, а значит, и локально разрешимую алгебру A над полем R. Пусть

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} -$$

счетное множество независимых символов. Элементами алгебры A будут всевозможные конечные формальные суммы $\sum_i \alpha_i x_i$, где $\alpha_i \in R$, $x_i \in x$. Сложение - формальное, умножение достаточно задать на x следующим образом:

$$x_i x_j = \begin{cases} x_{i-j}, & \text{если } i > j, \\ 0, & \text{если } i \leq j. \end{cases}$$

Локальная правонильпотентность алгебры A сразу следует из того, что любое конечное подмножество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ элементов из x порождает правонильпотентную подалгебру (индекса $n+1$).

Докажем простоту алгебры A. Предположим, что $J \neq 0$ - двусторонний идеал алгебры A. Пусть $a \equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \in J$ и $\alpha_m \neq 0$. Так как $a(\alpha_m^{-1} x_{m-1}) \in J$, то $x_1 \in J$. Но тогда и для любого $i > 1$ $x_{i+1} x_i = x_i \in J$, то есть $J = A$.

§ 2. Йордановы кольца простых альтернативных колец

Пусть A - альтернативное кольцо. Определим на его аддитивной группе новые операции: J - умножение $\circ$: $a \circ b = ab + ba$ и коммутирование $[\ ]$: $[a, b] = ab - ba$. Относительно старого сложения и этих новых операций умножения в первом случае получается йорданово кольцо $A^{(+)}$ [4], а во втором - кольцо Мальцева $A^{(-)}$ [3]. Если J (собственный)-идеал йорданова кольца $A^{(+)}$ или кольца Мальцева $A^{(-)}$, то J называется (собственным) J-идеалом или соответственно (собственным) M-идеалом кольца A.

И.Херстейн изучал [5] кольца $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$ для простого ассоциативного кольца A характеристики, отличной от 2, и получил следующие основные результаты:

а) в A нет собственных J-идеалов, т.е. йорданово кольцо $A^{(+)}$

просто;

б) если $\mathcal{J}$ - собственный $\mathcal{M}$ -идеал A, то либо $\mathcal{J}$ лежит в центре A (и поэтому абелев), либо $\mathcal{J} \supseteq [A, A]$.

Ниже будет показано, что эти результаты могут быть дословно обобщены на случай, когда A - простое альтернативное кольцо характеристики, отличной от 2 и 3.

Предварительно доказываются два вспомогательных результата.

ЛЕММА 1. Пусть A - простое альтернативное кольцо, $\mathcal{J}$ - его собственный $\mathcal{J}$ - идеал. Пусть, далее, в $\mathcal{J}$ существует такой элемент a, что для любого $x \in A$ $ax \in \mathcal{J}$. Тогда $a = 0$.

Предположим противное: $a \neq 0$.

Рассмотрим идеал, порожденный a в A. Ввиду простоты A, $(a) = A$.

Далее, так как $a \circ x = ax + xa \in \mathcal{J}$, то из условия леммы следует, что и $xa \in \mathcal{J}$. Предположим теперь, что уже известно, что для любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из A

$$a_n = a U_{x_1} U_{x_2} \ldots U_{x_n} \tag{6}$$

лежит в $\mathcal{J}$. Здесь

$$U_{x_i} = \begin{cases} R_{x_i} \text{ - оператор правого умножения на } x_i \text{ ;} \\ \mathcal{L}_{x_i} \text{ - оператор левого умножения на } x_i \text{ .} \end{cases}$$

Докажем, что для любого $y \in A$ $a_n U_y$, то есть $a_n y$ и $y a_n$, снова принадлежат $\mathcal{J}$.

Обозначим $a U_{x_1} U_{x_2} \ldots U_{x_{n-1}}$ через b, и пусть сначала U_{x_n} есть R_{x_n}, то есть $a_n \equiv b x_n$.

Так как $a_n \in \mathcal{J}$, то и $a_n \circ y \in \mathcal{J}$. Рассмотрим $a_n \circ y$:

$$a_n \circ y \equiv (b x_n) \circ y = (b x_n) y + y (b x_n) = b(x_n y) + (b, x_n, y) +$$

$$+ y(b x_n) = b(x_n y) + (y, b, x_n) + y(b x_n) = b(x_n y) + (y b) x_n.$$

Здесь $b(x_n y) = a U_{x_1} \dots U_{x_{n-1}} U_{x_n y}$ имеет вид (6) и поэтому принадлежит $\mathcal{J}$. Значит, $(yb)x_n \in \mathcal{J}$. Ввиду произвольности y и x_n,

$$(x_n b) y \in \mathcal{J}. \tag{7}$$

Так как $x_n b$ имеет вид (6), то $x_n b \in \mathcal{J}$, поэтому $(x_n b) \circ y \in \mathcal{J}$. Отсюда и из (7):

$$y(x_n b) \in \mathcal{J}. \tag{8}$$

Далее, пусть U_{x_n} есть $\mathcal{L}_{x_n}$, рассмотрим $(x_n b) \circ y$.

$$(x_n b) \circ y = (x_n b) y + y(x_n b) = (x_n b) y + (y x_n) b - (y, x_n, b) =$$

$$= (y x_n) b + (x_n b) y - (x_n, b, y) = (y x_n) b + x_n (b y).$$

Так как $(y x_n) b = a U_{x_1} \dots U_{x_{n-1}} U_{y x_n}$ имеет вид (6), то $(y x_n) b \in \mathcal{J}$. Значит, и $x_n (b y) \in \mathcal{J}$. Ввиду произвольности x_n и y:

$$y(b x_n) \in \mathcal{J}. \tag{9}$$

А так как $(b x_n) \circ y \in \mathcal{J}$, то и

$$(b x_n) y \in \mathcal{J}. \tag{10}$$

Из (7) - (10) следует, что для любых $y \in A$ $a_n y \in \mathcal{J}$ и $y a_n \in \mathcal{J}$. Значит, для любого числа m и любых элементов $x_i \in A$

$$a U_{x_1} U_{x_2} \dots U_{x_m} \in \mathcal{J}.$$

Но отсюда следует, что в A

$$0 \neq (a) \subseteq \mathcal{J} \subset A.$$

Это противоречит простоте A. Поэтому $a = 0$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть A - произвольное альтернативное кольцо и $\mathcal{J}$ - его $\mathcal{J}$ - идеал. Тогда для любых a и b из $\mathcal{J}$ и любого x из A $[a \circ b, x] \in \mathcal{J}$.

В самом деле, $[a \circ b, x] = [ab, x] + [ba, x]$. Но по (2):

$$[ab, x] = a[b, x] + [a, x] b + 3(a, b, x),$$

$$[ba, x] = b[a, x] + [b, x] a + 3(b, a, x).$$

Так как $(a,b,x)+(b,a,x)=0$, то

$$[a\circ b,x]=a\circ[b,x]+b\circ[a,x].$$

Но $[b,x],[a,x]\in A$; $a,b\in\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}$ — $\mathcal{J}$ - идеал. Поэтому $a\circ[b,x]\in\mathcal{I}$ и $b\circ[a,x]\in\mathcal{I}$. Значит, $[a\circ b,x]\in\mathcal{I}$.

Лемма доказана.

Напомним ещё следующий результат Э.Клейнфелда [7] : Если A - альтернативное кольцо характеристики не 3 без идеалов с нулевым умножением (в частности, простое) и если в A найдется такой элемент a, что $a^2=aAa=0$, то $a=0$.

Теперь легко доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть A - простое альтернативное кольцо характеристики, отличной от 2 и 3. Тогда йорданово кольцо $A^{(+)}$ тоже просто.

Пусть $\mathcal{I}$ - собственный $\mathcal{J}$-идеал A. Тогда по лемме 2 $[a\circ b,x]\in\mathcal{I}$ для любых $a,b\in\mathcal{I}$ и $x\in A$. Очевидно, что и $(a\circ b)\circ x\in\mathcal{I}$. Поэтому

$$(a\circ b)\circ x+[a\circ b,x]=2(a\circ b)x=(a\circ b)(2x)\in\mathcal{I}.$$

Так как x - произвольный элемент из A и $A=2A$, то $(a\circ b)x\in\mathcal{I}$ для всех $x\in A$. Отсюда и из леммы 1 следует, что для любых $a,b\in\mathcal{I}$

$$a\circ b=0. \tag{11}$$

Из (11) получаем, что для всех $a\in\mathcal{I}$ $a^2=0$ и, подставив в (11) вместо b $a\circ x$, получаем что $axa=0$ для всех $a\in\mathcal{I}$ и $x\in A$. Отсюда и из названного выше результата Э. Клейнфелда следует, что $a=0$. Полученное противоречие служит доказательством теоремы.

§ 3. Кольца Мальцева простых альтернативных колец

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть A - альтернативное кольцо

$$N \equiv \{ n \in A \mid (n, A, A) = 0 \}$$

называется ассоциативным центром кольца A .

$$C \equiv \{ c \in A \mid [c, A] = 0 \}$$

называется ассоциативным центром кольца A .

Известно, что если A - простое альтернативное неассоциативное кольцо характеристики, отличной от 3, то $N = C$. Поэтому можно говорить просто о центре Z простого кольца A . Z является полем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Альтернативное кольцо A называется D - кольцом, если в A для всех x, y, z и t $[x, y] \circ [z, t]$ лежит в ассоциативном центре.

Как показал Г.В.Дорофеев [1], всякое альтернативное кольцо с трямя образующими характеристики 0 является D -кольцом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Алгебра H над произвольным полем Φ с базисом $1, i, j, k$, где 1 - единица H , и с таблицей умножения:

$$i^2 = \alpha 1, \quad j^2 = \beta 1, \quad k^2 = -\alpha\beta 1 \neq 0,$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = -\beta i, \quad ki = -ik = -\alpha j,$$

где $\alpha, \beta \in \Phi$ называется алгеброй обобщенных кватернионов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если алгебра K над полем Φ содержит в качестве подалгебры алгебру обобщенных кватернионов H, каждый элемент из K однозначно записывается в виде $g + wh$, где $g, h \in H$, w - фиксированный элемент K , $w^2 = \gamma \in \Phi_1$ и $\gamma \neq 0$, и умножение в K задается формулой

$$(g_1 + wh_1)(g_2 + wh_2) = (g_1 g_2 + \gamma h_2 \bar{h}_1) + w(\bar{g}_1 h_2 + g_2 h_1),$$

где $\bar{g}$ - кватернион, сопряженный с g , то K называется алгеброй Кэли-Диксона.

ЛЕММА 3. Алгебра Кэли-Диксона K над любым полем является D -алгеброй.

В самом деле, для любых g_i , $h_i \in H$

$$[g_1 + wh_1, g_2 + wh_2] = (g_1 g_2 + \gamma h_2 \bar{h}_1) - (g_2 g_1 + \gamma h_1 \bar{h}_2) +$$

$$+\omega(\bar{g}_1 h_2+g_2 h_1-\bar{g}_2 h_1-g_1 h_2)=$$
$$=([g_1,g_2]+\gamma(h_2\bar{h}_1-h_1\bar{h}_2)]+\omega[(\bar{g}_1-g_1)h_2+(g_2-\bar{g}_2)h_1]=$$

(так как $h_1\bar{h}_2=(\overline{h_2\bar{h}_1})$)

$$=(p_1 i+q_1 j+s_1 k)+\omega f_1 \qquad (12)$$

для некоторых $p_1, q_1, s\in\Phi; f_1\in H$. Далее, для любых $x_i, y_i\in H$

$$(x_1+\omega y_1)\circ(x_2+\omega y_2)=[x_1\circ x_2+\gamma(y_2\bar{y}_1+y_1\bar{y}_2)]+ \qquad (13)$$
$$+\omega[(\bar{x}_1+x_2)y_2+(x_2+\bar{x}_2)y_1].$$

Положив в (13)

$$x_1+\omega y_1=[g_1+\omega h_1,\ g_2+\omega h_2],$$

то есть $x_1\equiv p_1 i+q_1 j+s_1 k$ и $y_1\equiv f_1$, и сделав аналогичную подстановку $x_2+\omega y_2\equiv[g_3+\omega h_3, g_4+\omega h_4]$, ввиду того, что

$$x_1+\bar{x}_1=x_2+\bar{x}_2=x_1 x_2+x_2 x_1=0$$

и $y_2\bar{y}_1+y_1\bar{y}_2=y_2\bar{y}_1+(\overline{y_2\bar{y}_1})\in\Phi 1$, получим

$$[g_1+\omega h_1, g_2+\omega h_2]\circ[g_3+\omega h_3,\ g_4+\omega h_4]\in\Phi 1.$$

Что и требовалось доказать.

Отсюда и из результатов Э.Клейнфелда [6], [7] имеем:

СЛЕДСТВИЕ. Всякое простое альтернативное кольцо характеристики не 2 и не 3 является D-кольцом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A - простое альтернативное неассоциативное кольцо характеристики не 2 и не 3, Z - его центр, $[A,A]$ - линейное подпространство над Z, порожденное всевозможными коммутаторами $[a,b]$. Тогда линейное пространство A над Z раскладывается в прямую сумму подпространств Z и $[A,A]$: $A=Z\dot{+}[A,A]$.

Так как $Z=\{1\}$, то $Z\cap[A,A]=0$ очевидно из (12). Ясно, что $i,j,k\in[A,A]$. Положив в определении 5 $g_1=-i$, $g_2=i$, $h_1=h_2=\frac{\alpha^{-1}}{2}$, получим $\omega\in[A,A]$. Положив $g_1=-i$, $g_2=i$, $h_1=h_2=\frac{1}{2}$, по-

лучим $\mathfrak{W}i \in [A,A]$ и т.д. Дальнейшее очевидно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A - простое альтернативное кольцо характеристики не 2 и не 3, Z - центр кольца A, J - его M - идеал. Тогда либо $J \subseteq Z$, либо $J \supseteq [A,A]$.

Если A ассоциативно, этот результат уже известен [5].

Пусть A неассоциативно, J - такой M - идеал A, что $J \cap Z \neq J$. Тогда по предложению 2 $J \cap [A,A] \neq 0$. Пусть

$$J \cap [A,A] \neq [A,A].$$

Ввиду того же предложения 2, $Q = J \cap [A,A]$ само является M -идеалом кольца A.

В любом альтернативном кольце выполняется соотношение:

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = G(x,y,z). \qquad (14)$$

Поэтому для любого $s \in Q$ и любых $x, y \in A$

$$(s,x,y) \in Q.$$

Ввиду этого $Q + QA$ - правый идеал кольца A. Рассмотрим $S[x,y]$.

$$S[x,y] = \frac{1}{2}(S \circ [x,y] + [S,[x,y]]).$$

Так как A является D -кольцом и $S \in Q \subset [A,A]$, то $S \circ [x,y] \in Z$. Значит, $S[x,y] \in Q \dot{+} Z$. Так как любой элемент α представим в виде: $\alpha = k + \alpha$, где $k \in [A,A]$, $\alpha \in Z$, то отсюда следует, что $Q + QA \subseteq Q \dot{+} Z$. А так как $Q \subset [A,A]$, то $Q \dot{+} Z \subset A$, то есть $Q + QA$ - собственный правый идеал кольца A. Но это противоречит результату Э.Клейнфелда о том, что в простом альтернативном неассоциативном кольце характеристики, отличной от 3, нет собственных односторонних идеалов [8]. Полученное противоречие доказывает теорему. Из теоремы 3, предложения 2 и (14) легко вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если A - простое альтернативное кольцо характеристики, отличной от 2 и 3, и кольцо $A^{(-)}$ не является кольцом Ли, то фактор-кольцо кольца $A^{(-)}$ по центру есть простое кольцо Мальцева.

ПРИМЕЧАНИЕ. При сильных дополнительных ограничениях на коль-

цо A аналогичный результат получил А.Сэйгл в [10]. (Система ограничений, наложенных А.Сэйглом на кольцо A, такова, что ей не удовлетворяют даже классические числа Кэли).

Поступила в редакцию
21. Ш. 1967 г.

Литература

1. Г.В.Дорофеев. Альтернативные кольца с тремя образующими. - Сиб. мат. журнал. 1963, т. IУ, № 5, стр. 1029-1047.

2. К.А.Жевлаков. Разрешимость и нильпотентность йордановых колец.- Алгебра и логика. Семинар. Новосибирск, Из-во "Наука", Сибирское отделение, 1966 г., т.5, вып. 3, стр. 37-58.

3. А.И.Мальцев. Аналитические лупы - Мат. сборник. 1955, 36 (78), стр. 569-576.

4. А.И.Ширшов. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах. - Мат. сборник. 1957, 41 (83), стр. 381-394.

5 I. Herstein. On the Lie and Jordan rings of a simple associative rings. - Amer. J. Math. I955, 77, 279 - 285.

6. E. Kleinfeld. Simple alternative rings - Ann. of Math. I953, 58 N 3, 544 - 547.

7 E. Kleinfeld. Alternative nil rings - Ann. of Math. I957, 66, N 3, 395 - 399.

8 E. Kleinfeld. Primitive alternative rings and semisimplicity. - Amer. J. Math. I955, 77, N 4, 725 - 730.

9 K. McCrimmon. Finite power-associative division rings. - Proc. Amer. Math. Soc. I966, I7, N 5, II73 - II77.

IO. A. Sagle. Simple Malcev algebras over fields of characteristic zero. - Pacif. J. Math. I962, I2, N3, I057-I073.

II M. Smiley. The radical of alternative rings. - Ann. of Math. I948, 49, N 3, 702 - 709.

SOME REMARKS ON SIMPLE ALTERNATIVE RINGS

K.A.Žhevlakov (Novosibirsk)

(Summary)

I. If $\mathfrak{A}$ is a simple,commutative alternative ring then $\mathfrak{A}$ is a field.

II. Let $\mathfrak{A}$ be a simple alternative ring of characteristic not 2,3, then

a) Jordan ring $\mathfrak{A}^{(+)}$ is a simple ring.

b) If $\mathfrak{J}$ is an ideal of Malcev ring $\mathfrak{A}^{(-)}$ then either $\mathfrak{J}$ contains $[\mathfrak{A},\mathfrak{A}]$ or $\mathfrak{J}$ is contained in center $\mathfrak{Z}$ of $\mathfrak{A}^{(-)}$. In particular, if $\mathfrak{A}^{(-)}$ is not Lie ring then $\mathfrak{A}^{(-)}/\mathfrak{Z}$ is a simple Malcev ring.