Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Н. Пушкин, Н. Н. Смирнов, В. Ф. Никитин, Об устойчивости стационарных режимов двухфазного газокапельного химического реактора идеального смешения,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2001, номер 2, 47–52

https://www.mathnet.ru/vmumm1464

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
17 января 2026 г., 03:04:33

прогнозировать дальнейшее развитие ситуации, необходимо решать пространственно неоднородную задачу.

Теперь вернемся к начальному участку диаграммы состояний (1). Отметим, что закон разгрузки (2), не совпадающий с нагрузкой, свидетельствует о необратимости нагружения до предельного состояния M. Но при малых нагружениях процесс обратим (разгрузка упруга). Максимальная нагрузка, достижимая в области обратимости, определяет состояние $(\sigma_K, \varepsilon_K)$, которое заслуживает наибольшего внимания, так как ограничивает снизу область, в которой происходит пластическое деформирование. В этой области $(\varepsilon_K < \varepsilon \leqslant \varepsilon_M)$ имеет место пластическое допредельное предразрушение [9] материала, заключающееся в поэтапном исчерпании резервов упрочнения (при том, что упрочнение еще возможно за счет изменений его структуры).

При продвижении от точки K в сторону M наступает необратимость, вызванная потерей термодинамического равновесия. Разгрузка будет возможна только по какой-то новой ветви диаграммы состояний. На ней реализуемы $\sigma > \sigma_K$, поэтому переход произойдет, как в случае 3 (пространственно неоднородно), но при догрузке пространственная неоднородность образца исчезнет. Если новая ветвь не заканчивается в точке M, то будет еще один кризис, фазовый переход и следующее упрочнение и т.д. В точке M повышение напряжения уже невозможно. Если при догрузке выход из нее осуществляется, как в случае 1, то это — разрушение, если же как в случае 2, то на диаграмме состояний машины обозначится "зуб текучести" и предразрушение перейдет в запредельную стадию. В случае 3 в записи машины будет идеальная пластичность (скрывающая пространственную неоднородность).

Автор выражает благодарность профессору Л. В. Никитину за привлечение внимания к теме и профессору Е. И. Шемякину за полезные указания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ревуженко А.Ф., Шемякин Е.И.* К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // Прикл. матем. и теор. физ. 1977. № 3. 156–174.
2. *Ибрагимов В.А., Клюшников В.Д.* Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // Изв. АН СССР. Механ. твердого тела. 1971. № 4. 116–121.
3. *Линьков А.М.* О потере устойчивости при разрушении // Исследования по упругости и пластичности. 1978. № 12. 75–89.
4. *Никитин Л.В.* Закритическое поведение разупрочняющегося материала // Докл. РАН. 1995. **342**, № 4. 487–490.
5. *Эпштейн П.С.* Курс термодинамики. М.; Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
6. *Bridgeman P.W.* Some results in the field of high-pressure physics // Endeavour. 1951. **10**, N 38. 63–69.
7. *Баланкин А.С.* Синергетика деформируемого тела. Основы кинетической теории динамической прочности. М.: Министерство обороны СССР, 1991.
8. *Шемякин Е.И.* О свободном разрушении твердых тел // Докл. АН СССР. 1988. **300**, № 5. 1090–1094.
9. *Никифоровский В.С., Шемякин Е.И.* Динамическое разрушение твердых тел. Новосибирск: Наука, 1979.

Поступила в редакцию
19.05.1999

УДК 536.46

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ДВУХФАЗНОГО ГАЗОКАПЕЛЬНОГО ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА ИДЕАЛЬНОГО СМЕШЕНИЯ

В. Н. Пушкин, Н. Н. Смирнов, В. Ф. Никитин

Исследования закономерностей протекания экзотермических реакций в проточных реакторах идеального смешения ведутся в течение нескольких десятилетий [1–6]. В [4] рассмотрены стационарные состояния как адиабатического, так и неадиабатического двухфазного газокапельного химического реактора идеального смешения, исследована зависимость стационарных режимов его работы от управляющих параметров, в частности от параметра, характеризующего структурные свойства газовзвеси и представляющего собой отношение характерных времен испарения и пребывания капель в реакторе.

В настоящей работе проводится анализ устойчивости стационарных режимов реактора.

Математическая модель. Рассматривается двухфазный реактор идеального смешения, в который втекает монодисперсная смесь газа с каплями жидкого топлива. Записанная в соответствии с принципом взаимно проникающих континуумов, математическая модель содержит уравнения изменения концентраций компонентов газовой фазы: пара жидкости

$$\frac{dc_1Y_b}{d\tau} = Y_b^0 - c_1Y_bj_k + \kappa - \mathrm{Da}\cdot\dot{W} \tag{1}$$

и окислителя

$$\frac{dc_1Y_a}{d\tau} = Y_a^0 - c_1Y_aj_k - \Omega\cdot\mathrm{Da}\cdot\dot{W}, \tag{2}$$

уравнение изменения массового содержания газовой фазы

$$\frac{dc_1}{d\tau} = 1 - c_1j_k + \kappa, \tag{3}$$

уравнение энергии газовой фазы

$$\frac{1}{\gamma_a}\frac{d}{d\tau}c_1\left(\theta_1+\frac{\theta_0}{\beta}\right) = \frac{\theta_0}{\beta} - \left(\theta_1+\frac{\theta_0}{\beta}\right)c_1j_k + \left(\theta_2+\frac{\theta_0}{\beta}-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\kappa + \frac{\mathrm{Da}\cdot\dot{W}}{\gamma} - \frac{\theta_1-\theta_c}{\mathrm{Se}}, \tag{4}$$

соотношение для концентрации продуктов газофазной реакции

$$Y_p = 1 - Y_a - Y_b, \tag{5}$$

выражение для скорости химической реакции

$$\dot{W} = Y_a^{n_a}Y_b^{n_b}\exp\left(\frac{\theta_1+(\theta_0-1)/\beta}{\beta\theta_1+\theta_0}\right), \tag{6}$$

уравнение изменения размеров капель

$$\frac{dr^2}{d\tau} = -\frac{\theta_1-\theta_2}{\omega}, \tag{7}$$

соотношения для содержания жидкой фазы

$$c_2 = c_{20}\int_0^{\tau_u} r^3\mathrm{e}^{-z}dz \tag{8}$$

и скорости ее испарения

$$\kappa = \frac{3}{2}\frac{c_{20}(\theta_1-\theta_2)}{\omega}\int_0^{\tau_u} r\mathrm{e}^{-z}dz, \tag{9}$$

где $\theta_i = \dfrac{E(T_i-T_{10})}{RT_*^2}$, $c_i = \dfrac{\rho_i}{\rho_{10}}$ $(i=1,2)$, $j_k = \dfrac{t_0}{t_k}$, $r = \dfrac{\overline{r}}{\overline{r}_0}$, $\tau = \dfrac{t}{t_0}$, $z = \dfrac{\overline{z}}{t_k}$, $\dot{W} = \dfrac{\overline{\dot{W}}t_w}{\rho_{10}}$, $\kappa = \dfrac{Mt_0}{\rho_{10}}$, $\beta = \dfrac{RT_*}{E}$, $\gamma = \dfrac{RT_*^2c_{P1}}{Eq_T}$, $\gamma_a = \dfrac{c_{P1}}{c_{V1}}$, $\theta_0 = \dfrac{T_{10}}{T_*}$, $\theta_c = \dfrac{E(T_c-T_{10})}{RT_*^2}$, $\varepsilon = \dfrac{q_u}{q_T}$, $\tau_u = \dfrac{t_u}{t_k}$, $\mathrm{Da} = \dfrac{t_0}{t_w}$, $\mathrm{Se}_1 = \dfrac{c_{P1}\rho_{10}V}{t_0\alpha_cS_c}$, $\omega = \dfrac{3}{2}\dfrac{q_uEm_0}{RT_*^2\alpha_0s_0t_0}$, T — температура; Y_j — концентрации компонентов газовой фазы; ρ — средняя плотность; t — время; V — объем реактора; G_0, G_k — объемные расходы смеси, вводимой в реактор и удаляемой из реактора соответственно; $t_0 = V/G_0$, $t_k = V/G_k$ — характерные времена ввода и удаления смеси из реактора; t_u, $\overline{z}-t_u$ — время появления и пребывания капель в реакторе соответственно; $m = 4/3\pi\overline{r}^3\rho_2^0$ — масса отдельной капли, $\overline{r}$ — ее радиус, ρ_2^0 — истинная плотность жидкости; n_0 — число капель в единице объема; c_{P1}, c_{V1} — изобарная и изохорная теплоемкости газа; q_T, q_u — удельная теплота реакции и парообразования; $\overline{\dot{W}}$, M — объемные скорости реакции и парообразования; α_c, S_c — коэффициент теплоотдачи и площадь поверхности стенок реактора; Ω — стехиометрический коэффициент; T_* — масштабная температура; $\alpha_0 = \lambda_1/\overline{r}_0$; $s_0 = 4\pi\overline{r}_0^2$; $t_w = \rho_{10}K^{-1}\exp(E/RT_*)$ —

характерное время развития реакции; λ_1 — коэффициент теплопроводности газа; K — предэкспоненциальный множитель; n_a, n_b — показатели порядка реакции; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; Da — число Дамкелера. Параметр Se_1 представляет собой отношение характерного времени теплоотвода через стенки реактора $t_c = \dfrac{c_{P1}\rho_{10}V}{\alpha_c Sc}$ к гидродинамическому времени t_0 и является комбинацией чисел Семенова $\mathrm{Se} = t_c/t_w$ и Дамкелера: $\mathrm{Se}_1 = \mathrm{Se}/\mathrm{Da}$. Безразмерный параметр ω, характеризующий свойства гетерогенной смеси, с коэффициентом $1/\beta$ пропорционален отношению характерных времен испарения и пребывания капель в реакторе. При изменении размеров капель ω меняется, как $\bar{r}_0^2$. Нижний индекс b соответствует пару жидкости, a — окислителю, p — продукту реакции, 1 — газовой фазе, 2 — жидкой фазе, 0 — значению в свежей смеси, c — стенкам реактора, $*$ — масштабному значению.

Предполагается, что химическая реакция протекает по схеме $a + b \to p$, а выражение для ее скорости (6) соответствует закону Аррениуса.

Вместо уравнения импульса используется условие гомобаричности $P = \mathrm{const}$.

Полагается также, что составляющие смеси поступают в реактор предварительно прогретыми: жидкость — до температуры T_2, близкой к температуре кипения: $T_2 \approx T_{\mathrm{boil}}$, а газ — до некоторой температуры $T_{10} \geqslant T_2$. Условие $T_2 \approx T_{\mathrm{boil}}$ не является сильным ограничением, поскольку при горении, как известно [7], период нагрева капель составляет 5–10 % от всего времени их существования. Следует заметить, что температуры кипения углеводородных топлив, как правило, существенно ниже температур, достигаемых при развитом горении, что также оправдывает указанное допущение.

Капли считаются достаточно малыми, так что их можно рассматривать как вмороженные в окружающую газовую фазу [8]. Ясно, что в каждый момент времени в реакторе присутствует полидисперсная смесь, что вызвано различной степенью испарения капель вследствие неодновременности их поступления в реактор. Исходя из сделанных допущений, можно показать, что функция, описывающая распределение числа частиц жидкости по времени z их пребывания в реакторе, имеет вид

$$\varphi(z) = \mathrm{e}^{-z}h(z), \quad \text{где} \quad h(z) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad z = 0, \\ 1 & \text{при} \quad z = 1 \end{cases} \quad \text{— функция Хевисайда.}$$

Совместно с начальными условиями

$$\tau = 0: \quad Y_b = Y_b^0, \quad Y_a = Y_a^0, \quad \theta_1 = \theta_1^0, \quad r = 1, \quad \tau_u = \infty \tag{10}$$

система (1)–(9) полностью определяет задачу нестационарного развития процессов тепло- и массообмена в реакторе. Стационарные состояния реактора определяются системой уравнений, которую можно получить, приравняв к нулю производные по времени в уравнениях (1)–(4) и проинтегрировав (7) по времени пребывания z (в стационарных условиях $d/d\tau = d/dz$). Как стационарные, так и нестационарные режимы зависят от параметров модели, среди которых основными (управляющими) являются ω, Da, Se_1. Приводимый ниже анализ устойчивости положений равновесия динамической модели (1)–(9) осуществлен в пространстве управляющих параметров. Остальные параметры в задаче не варьировались и полагались равными следующим величинам:

$$c_{20} = 0{,}05, \quad Y_b^0 = 0, \quad \beta = 0{,}05, \quad \gamma = 0{,}002, \quad \varepsilon = 0{,}05, \quad j_k = 1,$$
$$\gamma_a = 1{,}4, \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_c = 0, \quad Y_a^0 = 1, \quad n_a = n_b = 1.$$

Анализ устойчивости стационарных режимов. Как известно, устойчивость стационарных решений автономной системы дифференциальных уравнений определяется собственными числами ее матрицы Якоби. Условием устойчивости является отрицательность вещественных частей всех собственных чисел этой матрицы. При анализе стационарных состояний реактора проверка условия устойчивости проводилась с помощью критерия Рауса–Гурвица, записанного в виде системы неравенств для коэффициентов характеристического многочлена матрицы Якоби.

Система уравнений (1)–(4) может быть представлена в форме

$$\frac{dX_i}{d\tau} = F_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

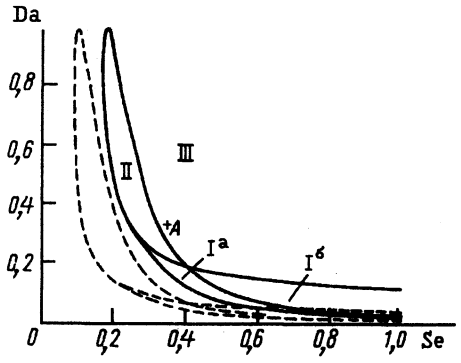

Рис. 1. Области устойчивости стационарных состояний газокапельного реактора при $\omega = 3$ (сплошные кривые) и гомогенного реактора (штриховые кривые): I^{a} — одно устойчивое и два неустойчивых стационарных состояния; $\mathrm{I}^{\mathrm{б}}$ — одно неустойчивое и два устойчивых стационарных состояния; II — одно неустойчивое стационарное состояние; III — одно устойчивое стационарное состояние

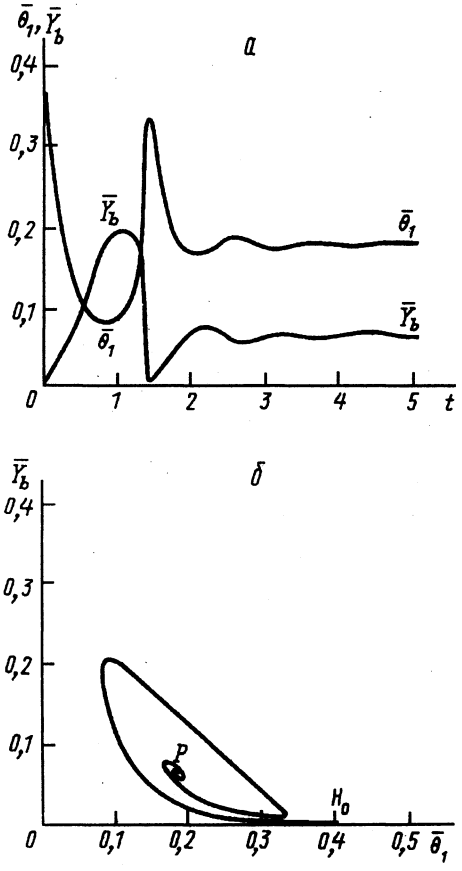

Рис. 2. Эволюция состояния газокапельного реактора идеального смешения для значений определяющих параметров $\omega = 3$; $\mathrm{Se}_1 = 0{,}35$; $\mathrm{Da} = 0{,}3$: *а* — интегральные кривые температуры $\overline{\theta}_1$; *б* — фазовые траектории концентрации $\overline{Y}_b(\overline{\theta}_1)$

где $X_1 = Y_b$, $X_2 = c_1$, $X_3 = \theta_1$, $X_4 = Y_a$, а правые части имеют вид

$$F_1 = \left(Y_b^0 - (1+\kappa)\,Y_b + \kappa - \mathrm{Da}\cdot\dot{W}\right)/c_1, \quad F_2 = 1 - c_1 j_k + \kappa,$$

$$F_3 = \frac{\gamma_a}{c_1}\left(\frac{\theta_0}{\beta} - \left(\theta_1 + \frac{\theta_0}{\beta}\right)c_1 j_k + \left(\theta_2 + \frac{\theta_0}{\beta} - \frac{\varepsilon}{\gamma}\right) + \frac{\mathrm{Da}\cdot W}{\gamma} - \right.$$
$$\left. - \frac{\theta_1 - \theta_c}{\mathrm{Se}}\right) - \left(\theta_1 + \frac{\theta_0}{\beta}\right)\frac{(1 - c_1 j_k + \kappa)}{c_1},$$

$$F_4 = \left(Y_a^0 - (1+\kappa)Y_a - \Omega\cdot\mathrm{Da}\cdot\dot{W}\right)/c_1.$$

Элементы матрицы Якоби этой системы определяются соотношениями $a_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial X_j}$, а ее характеристический многочлен имеет вид $Q_4(\lambda) = \lambda^4 + I_1\lambda^3 + I_2\lambda^2 + I_3\lambda + I_4$, где $I_k = I_k(a_{11}, \ldots, a_{44})$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Согласно критерию Рауса–Гурвица [9], условием отрицательности вещественных частей корней уравнения $Q_4(\lambda) = 0$ является одновременное выполнение следующих неравенств:

$$\begin{vmatrix} I_1 & I_3 & 0 \\ 1 & I_2 & I_4 \\ 0 & I_1 & I_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} I_1 & I_3 \\ 1 & I_2 \end{vmatrix} > 0, \quad I_1 > 0, \quad I_4 > 0. \qquad (11)$$

Неравенства (11), рассмотренные на всей совокупности стационарных решений (т.е. совместно с системой уравнений, определяющих эти состояния), задают в пространстве параметров ω, Da, Se_1 область устойчивости. Остальная часть этого пространства образует область неустойчивости.

На рис. 1 приведена диаграмма указанных областей в параметрической плоскости $(\mathrm{Da}, \mathrm{Se}_1)$ при $\omega = 3$. Множество I представляет область неединственности стационарных состояний. Здесь из трех возможных положений равновесия одно или два устойчивы. В частности, каждой точке подобласти I^{a} на рис. 1 соответствуют одно устойчивое и два неустойчивых стационарных состояния, а точкам подобласти $\mathrm{I}^{\mathrm{б}}$ наоборот — два устойчивых и одно неустойчивое. Точкам области II соответствует одно неустойчивое положение равновесия. Как показывают численные расчеты нестационарной модели (1)–(10), в этой области значений параметров реализуются предельные циклы. Области III отвечают единственные устойчивые стационарные режимы работы реактора. Для сравнения на рис. 1 также представлена область неустойчивых стационарных состояний (ограничена пунктиром) гомогенного реактора с параметрами, эквивалентными газокапельному (т.е. те же β, γ и т.д.). Как видно, области неустойчивости для гетерогенного и гомогенного реакторов существенно различны. Анализ показывает, что это различие сохраняется и для очень малых значений структурного параметра ω (малым ω соответствует высокая степень распыления жидкости).

В справедливости построенной диаграммы и соответственно методики можно убедиться, рассматривая нестационарное развитие процессов тепло- и массопереноса в реакторе. Для решения нестационарной задачи (1)–(10) был разработан специальный алгоритм, который помимо стан-

дартной схемы интегрирования системы дифференциальных уравнений содержит процедуру, позволяющую следить за эволюцией совокупной межфазной поверхности и соответственно корректно описывать межфазный тепло- и массообмен. Особенность процедуры связана с необходимостью учета непрерывно меняющихся размеров капель и, что также важно, изменения самого времени их существования. Шаг по текущему времени Δt сопровождается приростом на эту же величину индивидуального времени частиц. В численной схеме это обстоятельство обусловливает необходимость разбиения ансамбля частиц на группы по времени пребывания и рассмотрения двух массивов переменных: одного — для регрессирующих размеров капель, относящихся к разным группам, включая группу капель, втекающих в реактор в данный момент; другого — для соответствующих этим группам времен пребывания.

В качестве примера рассмотрим нестационарную задачу (1)–(10) при следующих значениях управляющих параметров: $\omega = 3$; $\mathrm{Se}_1 = 0{,}35$; $\mathrm{Da} = 0{,}3$. Заметим, что данным значениям параметров на плоскости $(\mathrm{Da}, \mathrm{Se}_1)$ соответствует точка A, принадлежащая области III (рис. 1). На рис. 2 представлены полученные в ходе численного решения интегральные кривые температуры $\overline{\theta}_1(\tau) = \theta_1\, c_{20}/\gamma$, концентрации пара $\overline{Y}_b = Y_b/c_{20}$ и фазовые траектории $\overline{Y}_b(\overline{\theta}_1)$. Начальное состояние реактора характеризуется точкой H_0 (рис. 2, *б*). Как видно из рис. 2, *а*, после некоторого периода индукции ($\tau_{\mathrm{ind}} \approx 1$) происходит резкий подъем температуры $\overline{\theta}_1$ и связанное с ним падение концентрации пара $\overline{Y}_b$. Далее ввиду истощения топливного реагента и соответственно уменьшения интенсивности горения рост температуры прекращается, наблюдается ее снижение. Последнее обстоятельство вследствие непрерывности процесса испарения капель ведет к увеличению $\overline{Y}_b$, что способствует развитию процесса горения и очередному повышению температуры $\overline{\theta}_1$ и т.д. Таким образом, наблюдается режим колебаний переменных, описывающих состояние реактора. С течением времени амплитуда этих колебаний уменьшается, процессы тепло- и массопереноса приходят к устойчивому положению равновесия (точка P на рис. 2, *б*), что соответствует предварительному параметрическому анализу. Наличие значительных колебаний величин $\overline{\theta}_1$, $\overline{Y}_b$ в рассмотренном примере объясняется тем, что точка A в параметрическом пространстве расположена вблизи границы области неустойчивости. Иными словами, выбранными значениями параметров задачи характеризуются условия работы реактора, близкие к критическим. На рис. 3 представлена эволюция распределения квадрата радиусов капель, различающихся по времени пребывания в реакторе. В начальный момент все капли независимо от их индивидуального времени имеют одинаковый радиус $r = 1$. В дальнейшем ввиду отсутствия теплового равновесия капли испаряются. При этом вполне понятно, что капли с бóльшим временем пребывания имеют меньший размер. Последнее выражается в монотонно убывающей зависимости $r^2(z)$. Частицы, втекающие в реактор в данный момент, имеют максимальный радиус. Графически это соответствует тому, что каждая кривая $r^2(z)$ проходит через точку $M(0;1)$. При достаточно большом значении лабораторного времени τ кривая $r^2(z)$ пересекает ось Oz в некоторой точке. Координата этой точки представляет собой значение $z = \tau_u$ времени пребывания капель, исчезающих в данный момент вследствие испарения. Отрезок прямой MN, описываемый зависимостью $r^2 = 1 - z/\tau_u^s$, соответствует распределению капель по размерам в условиях, когда реактор работает в стационарном режиме (состояние P). Заметим, что время полного испарения капель в этом состоянии обратно пропорционально стационарной температуре θ_1^s и выражается соотношением $\tau_u^s = \omega/(\theta_1^s - \theta_2)$. Из графика видно, что с течением времени кривая зависимости $r^2(z)$ стремится занять стационарное положение MN.

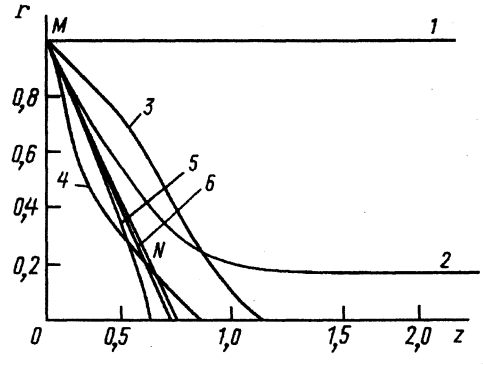

Рис. 3. Эволюция распределения квадратов радиусов капель по времени их пребывания в реакторе z для значений определяющих параметров $\omega = 3$; $\mathrm{Se}_1 = 0{,}35$; $\mathrm{Da} = 0{,}3$: *1* — $t = 0$; *2* — 0,5; *3* — 1,0; *4* — 1,5; *5* — 2,0; *6* — 2,5

Заключение. В работе проведен параметрический анализ устойчивости стационарных состояний реактора, тепловой и материальный баланс которого описывается системой уравнений (1)–(9). Численно построены диаграммы неединственности и устойчивости положений равновесия в плоскости $(\mathrm{Da}, \mathrm{Se}_1)$. Установлено, что газокапельный реактор даже с очень малыми частицами не может рассматриваться как некий гомогенный реактор, работающий на эффективной газовой смеси. Разработан численный алгоритм, позволяющий исследовать нестационарные режимы двухфазного газокапельного химического реактора идеального смешения.

Работа выполнена при поддержке ИНТАС (грант № 97–2027) и РФФИ (грант № 99–03–32042).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арис Р.* Анализ процессов в химических реакторах. Л.: Химия, 1967.
2. *Перлмутер Д.* Устойчивость химических реакторов. Л.: Химия, 1976.
3. *Абрамов В.Г., Мержанов А.Г.* Тепловые режимы экзотермических процессов в проточных реакторах идеального смешения // Теоретические основы химической технологии. 1975. **9**, № 6.
4. *Пушкин В.Н., Сухов Г.С., Ярин Л.П.* Тепловой режим двухфазного газокапельного реактора идеального смешения // Физика горения и взрыва. 1993. **29**, № 1.
5. *Абрамов В.Г., Мержанов А.Г.* Тепловые режимы экзотермических процессов в проточных реакторах идеального смешения. Препринт ОИХФ. Черноголовка, 1976.
6. *Вольтер Б.В., Сальников И.Е.* Устойчивость режимов работы химических реакторов. М.: Химия, 1972.
7. *Low C.K.* Recent advances in droplet vaporization and combustion // Prog. Energy Combust. Sci. 1982. **8**. 171–201.
8. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
9. *Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991.

Поступила в редакцию
11.06.99

УДК 533.6.011.5

ПРИМЕНЕНИЕ ВИХРЯ ХИЛЛА В ЗАДАЧЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНОГО ВДУВА

В. П. Стулов, Н. В. Фомина

Большой интерес к проблеме сверхзвукового обтекания тел при наличии вдува определяется многочисленными приложениями. Современная пассивная теплозащита космических летательных аппаратов использует сублимацию специальных покрытий. В проектируемых системах активной теплозащиты газ вдувается в наиболее теплонапряженные участки поверхности. Математическое моделирование метеоров и болидов в атмосфере при скоростях входа в диапазоне $11 < V < 72$ км/с широко использует конфигурации обтекания тел при наличии сильного вдува. Похожие конфигурации потоков нашли применение в современной астрофизике, например, когда речь идет о взаимодействии потока межзвездной среды с солнечным ветром.

В работе рассматривается новый способ расчета параметров такого течения. Для конструирования решения задачи предлагается использовать точное решение уравнений гидродинамики, известное как вихрь Хилла [1]. Ранее это решение было успешно применено для описания течения в ударном слое на непроницаемых сфере и цилиндре [2]. В настоящей работе для описания течения при наличии вдува используются различные варианты вихря Хилла в ударном слое и в слое вдуваемого газа. Подобное решение рассматривалось в работе [3], где для расчета течений в ударном слое и в слое вдува использовалась одна и та же функция тока. В результате параметры течения определялись численно, а асимптотическая формула имела весьма ограниченную область применимости по параметру вдува.

1. Сферический вихрь Хилла. Мы будем рассматривать только осесимметричную задачу, поэтому приведем основные сведения о сферическом вихре Хилла. Очевидно, обобщение на плоский случай не вызовет серьезных трудностей. Уравнение функции тока осесимметричного течения несжимаемой жидкости в сферических переменных имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)=r^2\sin\theta\, f(\psi), \tag{1}$$

$$\rho v_r=-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad \rho v_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Функция $f(\psi)$ пропорциональна интенсивности вихря. Последние два соотношения дают связь поля скоростей v_r, v_θ с производными функции тока.

При $f(\psi)=A=\text{const}$ уравнение (1) имеет частный класс решений