Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

Избранные задачи LXXII Московской математической олимпиады,
Kvant, 2009, Number 4, 61–63

https://www.mathnet.ru/eng/kvant2683

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.169
January 21, 2026, 18:01:03

вем дугу *красной*, если оба ее конца красные. Далее второй игрок должен отметить хотя бы по одной точке внутри каждой из красных дуг. Последним ходом он сможет выиграть.

Устный тур для 11 класса

1. $\frac{3}{2}100!$.

2. Пусть ладья попала на клетку h1 с клетки h2. Посмотрим, в каком порядке обходятся углы доски. Противоположные углы доски не могут идти подряд в маршруте ладьи – тогда соединяющий их путь отделяет один из двух других противоположных углов, и в этот угол ладья попасть не может. Значит, углы обходятся либо против часовой стрелки, либо по часовой стрелке. Случаи аналогичны, разберем первый. Достаточно разобрать варианты, когда первый угол в пути левый. Если первым проходится левый верхний угол, то путь, соединяющий первые три угла, отрезает последний угол – ладья не может в него попасть. Если первым проходится левый нижний угол, то уже пройдя следующий угол, мы оказываемся отрезанными от остальных углов. Значит, на клетку h1 ладья могла попасть только с клетки g1.

3. Обозначим сумму $f_1(n)+f_3(n)+\ldots$ через $O(n)$, а сумму $f_2(n)+f_4(n)+\ldots$ через $E(n)$. Докажем индукцией по n, что $|O(n)-E(n)|=1$. Для $n = 1$ это равенство справедливо. Пусть оно верно для некоторого количества цветов n. Заметим, что $f_k(n+1)=kf_k(n)+kf_{k-1}(n)$ при $1 < k < n + 1$, поскольку добавив число $n + 1$, мы можем покрасить его в один из имеющихся k цветов, если остальные числа уже раскрашены в k цветов, либо, если остальные числа раскрашены в $k - 1$ цвет, покрасить его в оставшийся из k первых цветов. Заметим также, что $f_{n+1}(n+1)=(n+1)f_n(n)$ и $f_1(n+1)=f_1(n)$. Тогда

$$O(n+1)=f_1(n)+3\left(f_3(n)+f_2(n)\right)+5\left(f_5(n)+f_4(n)\right)+\ldots,$$

$$E(n+1)=2\left(f_2(n)+f_1(n)\right)+4\left(f_4(n)+f_3(n)\right)+\ldots$$

Вычитая одно выражение из другого и производя сокращения, получим, что $O(n+1)-E(n+1)=E(n)-O(n)$, откуда следует утверждение задачи для $n + 1$ цветов.

Для знатоков. Как ни удивительно, у этой задачи имеется и геометрическое решение. Дело в том, что справедливо утверждение: для фиксированного n числа $f_k(n)$ суть количества $(n-k)$-мерных граней у некоторого $(n-1)$-мерного многогранника – *пермутаэдра*. Такой многогранник можно получить, взяв в n-мерном пространстве выпуклую оболочку $n!$ точек, координаты которых – числа от 1 до n в каком-либо порядке. Например, для $n = 2$ пермутаэдр – просто отрезок на плоскости (с концами $(1;2)$ и $(2;1)$), для $n = 3$ пермутаэдр – шестиугольник в пространстве (все шесть точек, полученные из $(1;2;3)$ перестановками координат, включая саму эту точку, лежат в одной плоскости $x + y + z = 6$). Количество вершин пермутаэдра равно $n!$, т.е. совпадает с $f_n(n)$. (*Указание*. Попробуйте для начала построить взаимно однозначное соответствие между ребрами пермутаэдра и раскрасками множества $\{1,\ldots,n\}$ в $n - 1$ цвет.)

Если воспользоваться приведенным выше утверждением, для решения задачи достаточно будет доказать, что знакопеременная сумма количеств k-мерных граней $(n-1)$-мерного пермутаэдра (где k меняется от 0 до $n - 1$) равна 1. Это гарантирует формула Эйлера: такая сумма равна 1 вообще для любого выпуклого (многомерного) многогранника. Например, для трехмерных многогранников формула Эйлера превращается в известное равенство, которое не раз обсуждалось на страницах «Кванта»: $V - E + F - 1 = 1$, где V, E и F – числа вершин, ребер и граней многогранника, а слагаемое «–1» соответствует его внутренности. Равенство количеств вершин и ребер многоугольника – тоже частный случай это формулы.

4. Лемма. *Существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра, быть может, кроме CD, если и только если AC + + BD = AD + BC.*

Пусть искомая сфера существует. Тогда вписанные окружности треугольников ABC и ABD касаются в точке касания данной сферы с ребром AB. Наоборот, если вписанные окружности треугольников ABC и ABD имеют общую точку (а значит, касаются), то содержащая их сфера – искомая. Пусть M_1 и M_2 – точки касания вписанных окружностей треугольников ABC и ABD с ребром AB. По формуле для длин отрезков, на которые разбиваются стороны треугольника точками касания вписанной окружности, $AM_1=\frac{AB+AC-BC}{2}$ и $AM_2=\frac{AB+AD-BD}{2}$. Касание вписанных окружностей эквивалентно тому, что $AM_1 = AM_2$, а это равносильно равенству $AC + BD = AD + BC$.

Вернемся к решению задачи. Так как существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра, кроме CD, то по лемме $AC + BD = AD + BC$. И по той же лемме, примененной к ребру AB, получаем искомую сферу. Осталось доказать, что полученная сфера не касается всех ребер тетраэдра. Предположим противное. Тогда она бы пересекала плоскости ABC и ABD по вписанным окружностям соответствующих треугольников, т.е. имела бы две общие окружности со сферой, данной в условии, а значит, совпадала бы с ней.

5. Пусть $P(x)=a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0$. Приведя дроби $a_m,\ldots,a_1,a_0$ к общему знаменателю t, запишем $P(x)$ в виде $\frac{1}{t}\left(b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0\right)$, где числа $t, b_m, \ldots, b_0$ – целые.

Возьмем x равным достаточно большому простому числу p. Тогда

$$P\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{b_m+pb_{m-1}+\ldots+p^mb_0}{t\cdot p^m}.$$

Если $p>|b_m|$, то числитель полученной дроби взаимно прост с p^m. С другой стороны, если хотя бы один из коэффициентов $b_{m-1},\ldots,b_0$ отличен от нуля и p достаточно велико, $\left|b_m+pb_{m-1}+\ldots+p^mb_0\right|>|t|$, откуда числитель нашей дроби не может полностью сократиться со знаменателем, и значит, число $P\left(\frac{1}{p}\right)$ не имеет вида $\frac{1}{k}$, что противоречит условию. Поэтому $b_{m-1}=\ldots=b_0=0$, и утверждение задачи доказано.

6. У параллелепипеда есть две квадратные грани со стороной 1 м – назовем их малыми. За первые три минуты каждый муравей находит малую грань: он идет по ребру до конца, потом по другому – и тогда он знает, какие ребра образуют малую грань. Далее второй бегает по своей малой грани против часовой стрелки, а первый с начала 4-й по конец 5-й минуты обходит два ребра своей малой грани по часовой стрелке. Либо он встретит второго, либо затем за 2 минуты перейдет на другую малую грань, и там, идя снова по часовой стрелке, не позднее чем через 1,5 минуты встретит второго. Итого будет потрачено максимум 8,5 минут.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ LXXII МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

1. В 2022 году.

2. Примеры таких разрезаний приведены на рисунке 8.

3. В шесть раз.

4. Один из возможных маршрутов туриста изображен на

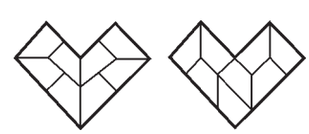

Рис. 8

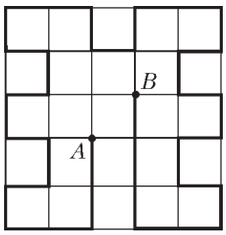

Рис. 9

рисунке 9. Докажите, что более длинный маршрут невозможен.

5. В шестом подъезде.

6. У зеленого осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног.

7. Да, все монеты можно разложить поровну по всем сундукам. *Указание:* докажите, что общее число монет делится на 7 и делится на 11.

8. Один из возможных примеров показан на рисунке 10.

9. Пример: «В этом предложении 70% цифр делятся на 2, 60% цифр делятся на 3, а 40% цифр делятся и на 2, и на 3».

10. $\angle A = 36°$, $\angle B = 54°$.

Обозначим точку пересечения отрезков CK и AL за O (рис.11). Заметим, что CO – медиана к гипотенузе прямоугольного треугольника ACL. Значит, $AO = OC = OL$, а $\angle OCA = \angle OAC = \angle OAK$ (последнее равенство верно, так как AO – биссектриса). Обозначим этот угол за α. Тогда $\angle A = 2\alpha$. Найдем $\angle B$. Так как треугольник CBK равнобедренный, этот угол равен внешнему углу CKB треугольника CKA, т.е. $\angle B = \angle ACK + \angle KAC = 3\alpha$. Наконец, из того, что $\angle B + \angle A = 90°$, получаем, что $2\alpha + 3\alpha = 90°$. Значит, $\alpha = 18°$.

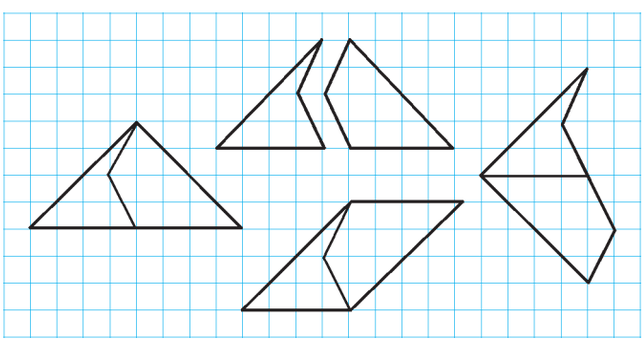
Рис. 10

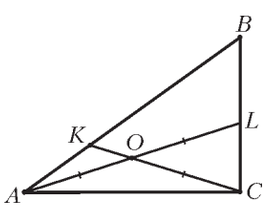

Рис. 11

11. 1.

Домножим первое уравнение на x и вычтем из него второе. Общий корень исходных уравнений будет и корнем получившегося уравнения

$$\left(ax^3 + bx^2 + cx\right) - \left(bx^2 + cx + a\right) = 0 \Leftrightarrow a\left(x^3 - 1\right) = 0 .$$

Но у последнего уравнения только один корень – а именно, 1.

12. Один из возможных примеров изображен на рисунке 12. В нем верхние два многоугольника совмещаются поворотом относительно точки A, нижние два – симметрией относительно точки O. Интересно, что многоугольниками такого вида можно замостить плоскость, причем непериодическим образом (см. например, обложку «Кванта» №2 за 1980 г.).

Рис. 12

13. Второй игрок может выиграть. *Указание.* Можно считать, что оба игрока пишут только числа 1, 10, 100, 1000 или 10000 (подумайте, почему). Докажите, что, отвечая на числа 10 и 1000 числом 1, а на числа 100 и 1 числом 10, второй игрок добьется успеха.

14. –1.

15. Нет, не существует.

Пусть при каком-то начальном расположении бусинок нашлась последовательность ходов, в результате которой какая-то бусинка прошла полный круг против часовой стрелки или больше. Обозначим начальное положение этой бусинки O. Тогда положения бусинок определяются углом от точки O с точностью до 2π, причем углы по часовой стрелке будем считать со знаком «–», а углы против часовой стрелки со знаком «+». Занумеруем бусинки по порядку. Обозначим за α_i угол до i-й бусинки. Тогда вначале имеем $-2\pi < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2009} = 0$. Заметим, что перемещению i-й бусинки соответствует замена α_i на $\frac{\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}}{2}$ при $i = 2, \ldots$ …, 2008, для первой бусинки имеем замену $\frac{\alpha_2 + \alpha_{2009} - 2\pi}{2}$, для 2009-й имеем $\frac{\alpha_1 + \alpha_{2008} + 2\pi}{2}$. То, что бусинка прошла полный круг или более, означает, что α_{2009} стал $\geq 2\pi$. Но вначале верно, что $\alpha_i < \frac{2\pi i}{2009}$, и при вышеуказанных преобразованиях это свойство сохраняется, поэтому α_{2009} всегда меньше 2π. Противоречие.

16. Опустим из B и A_1 высоты на AC в точки B_3 и B_4 соответственно, аналогично построим точки A_3 и A_4 (сделайте рисунок). Заметим, что $AB_1 = BA_1 = p - c$, где p – полупериметр треугольника ABC. Таким образом, $A_3A_4 = B_3B_4 = (p - c)\cos\gamma$. Отрезки A_3A_4 и B_3B_4 являются проекциями отрезка A_2B_2 на прямые AC и BC, но эти отрезки равны, поэтому отрезок A_2B_2 с ними составляет равные углы. Значит, он либо перпендикулярен биссектрисе угла C, либо параллелен ей. Обозначим ортоцентр треугольника ABC за H. Заметим, что так как B_1 лежит на отрезке AC, то A_4 лежит на отрезке A_3C, а значит, B_2 лежит на луче HB_3. Аналогично, A_2 лежит на луче HA_3. Значит, биссектриса угла A_3HB_3 пересекает отрезок A_2B_2. Но эта биссектриса параллельна биссектрисе угла ACB (так как в четырехугольнике HA_3CB_3 углы A_3 и B_3 прямые). Таким образом, получаем, что A_2B_2 не параллелен биссектрисе угла C, значит, он ей перпендикулярен.

17. Касательная к графику функции $y = \sin x$, где $x \in (0;\alpha)$, проведенная в заданной его точке $(x_0;\sin x_0)$, имеет угловой коэффициент $\cos x_0$, и для ее построения при помощи циркуля и линейки достаточно построить отрезок длины 1. Действительно, имея отрезки 1 и $\sin x_0$, можно построить отрезок $\cos x_0$ (при помощи тригонометрического круга), а значит, и угол, тангенс которого равен $\cos x_0$. Покажем, как построить отрезок длины 1 (т.е. восстановить масштаб).

а) Из точки $B = (a; \sin a)$, где $a \in \left(\frac{\pi}{2};\alpha\right)$, лежащей на графике функции, опустим перпендикуляр на ось Oy (рис. 13). Так как $\sin(\pi - a) = \sin a$, то этот перпендикуляр пересечет график функции $y = \sin x$ в точке $A = (\pi - a;\sin a)$. Через середину отрезка AB проведем прямую, перпендикулярную оси Ox. Она пересечет график в точке $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$. Отрезок этой прямой от оси Ox до графика функции $y = \sin x$ имеет длину 1.

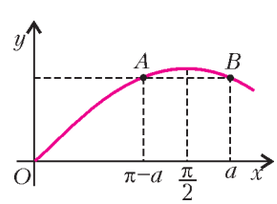

Рис. 13

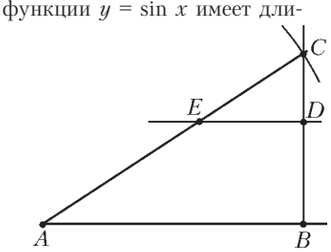

Рис. 14

б) Пусть a и b – произвольные точки на оси Ox, удовлетворяющие условию $0 < b < a < \alpha$. Построим отрезок AB длины $\sin a + \sin b$. Через точку B проведем луч l, перпендикулярный отрезку AB. Окружность с центром в точке A и радиусом $2\sin\frac{a+b}{2}$ пересекает луч l в точке C (рис. 14). Так как $\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, то $\angle CAB = \frac{a-b}{2}$. На отрезке BC отметим точку D такую, что $BD = \sin\frac{a-b}{2}$. Через точку D проведем прямую, параллельную отрезку AB. Эта прямая пересечет отрезок AC в точке E. Длина отрезка AE равна 1, так как $\sin\angle CAB = \sin\frac{a-b}{2} = \frac{BD}{AE}$.

18. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник, O – центр вписанной в него окружности, прямые AO, CO – две из трех прямых, данных в условии.

а) Если точка O лежит на прямой AC, то эта прямая является осью симметрии четырехугольника $ABCD$, поэтому прямые BO и DO одновременно обладают указанным свойством. Рассмотрим случай, когда прямые AO и CO не совпадают и пересекают границу четырехугольника в точках P и Q соответственно (рис. 15). Из условия следует, что треугольники AOQ и COP равновелики, а так как их высоты, опущенные из вершины O, равны, то $AQ = CP$. Кроме того, $\angle AOQ = \angle COP$, поэтому $AO \cdot OQ = CO \cdot OP$ и, по теореме косинусов,

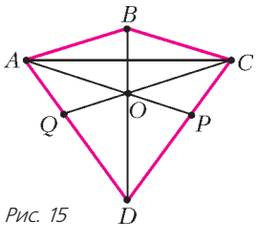

Рис. 15

$$AO^2 + OQ^2 - 2AO \cdot OQ\cos\angle AOQ = AO^2 =$$
$$= CP^2 = CO^2 + OP^2 - 2CO \cdot OP\cos\angle COP,$$

откуда $AO + OQ = CO + OP$. Поэтому либо $AO = OP$ и $OQ = CO$, либо $AO = OC$ и $OQ = OP$ (по теореме, обратной теореме Виета) и треугольники AOQ и COP равны. Первый случай невозможен (иначе $AD \parallel CD$, что неверно). Во втором случае четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно прямой BD (докажите), откуда прямые BO и DO совпадают.

б) $72°$, $108°$, $72°$, $108°$ или $72°$, $72°$, $72°$, $144°$.

19. $p + 1$.

Если $(p^2)!$ кратно $(p!)^n$, $n \in \mathbb{N}$, то $n \le p+1$, так как p входит в разложение числа $p!$ на простые множители в степени 1 (а значит, в разложение числа $(p!)^n$ – в степени n), а в разложение числа $(p^2)!$ – в степени $p + 1$. Докажем, что $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$. Запишем p^2 различных элементов в виде таблицы $p \times p$. Две такие таблицы назовем эквивалентными, если одна получается из другой некоторыми перестановками элементов внутри строк, а также некоторой перестановкой самих строк (всего $p + 1$ перестановка p объектов). Всего таблиц $(p^2)!$, и они разбиваются на классы эквивалентных по $(p!)^{p+1}$ таблиц в каждом классе, поэтому $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

20. *Указание*. Расположим все «двузначные» числа внутри клеток решетки специального вида, как указано на рисунке 16. Тогда любые два числа, расположенные в соседних (граничащих по отрезку) квадратах, будут отличаться друг от друга на 1, 10 или 11. Докажите, что при любом разбиении чисел на две группы найдется путь, идущий по соседним клеткам, проходящий только по числам одной группы и соединяющий либо левый и правый, либо верхний и нижний края решетки.

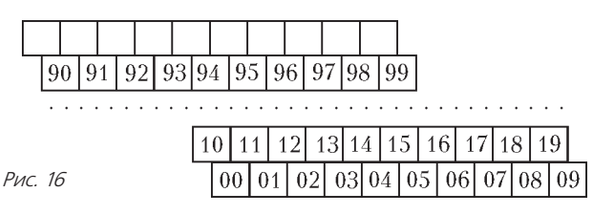

Рис. 16

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1. $t_{\min} = 48$ мин.

2. $m_1 = m_2 = m_3 = 2m_4 - m_0 = 1{,}7$ кг.

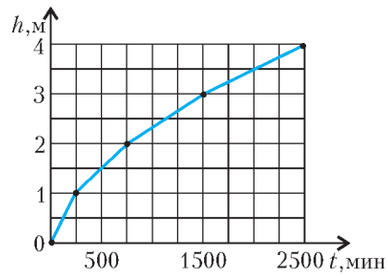

Рис. 17

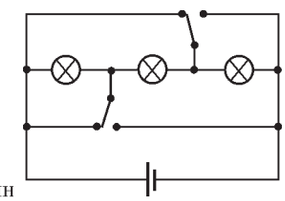
Рис. 18

3. См. рис.17; $t = 41$ ч 40 мин.

4. $\rho_{ст} = \frac{\rho_в M}{M + m - \rho_в V} = 2{,}5$ г/см^3; $\Delta h = \frac{M+m}{\rho_в \pi R^2} \approx 1{,}17$ см.

8 класс

1. 1) $v = n\pi(R - r)$; 2) $F = \frac{mg(R-r)}{4R}$. **2.** См. рис.18.

9 класс

1. $N_{\max} \approx 7{,}19$ Вт, при этом все резисторы соединены параллельно.

2. $L_{\max} = \sqrt{h^2 + L^2} = 1{,}5$ м.

10 класс

1. $a_{\max} = g\left(\frac{\mu L\cos\alpha}{2L - \mu h} - \sin\alpha\right)$ при условии $L > \mu h$.

2. $F = p_а S\left(1 - \frac{\rho_в T_0}{\rho_л T_к}\frac{\rho_л V - m}{\rho_в V - m}\right) \approx 32$ Н.

3. $\varphi = 0{,}8\varphi_0$ при удалении любой палочки, а $E = 0$, E_0, $\sqrt{3}E_0$ в зависимости от того, какую палочку удалить.

11 класс

1. В воде находится часть объема цилиндра $n = \frac{a}{h} - \frac{\rho_м - \rho}{\rho_в - \rho_м} = \frac{11}{21}$, а в масле – часть $1 - n = \frac{10}{21}$. Равновесие будет устойчивым, если $\rho_м\frac{R_2^2 - R_1^2 + r^2}{R_2^2 - R_1^2} > \rho_в\frac{R_1^2 - r^2}{R_1^2}$.

2. Вектор напряженности направлен по пространственной диагонали кубика от его положительно заряженного «угла» и равен $E = \frac{\sigma}{\sqrt{3}\varepsilon_0}$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. См. рис.19.

2. $m_3' = m_3 + \frac{m_3 - m_2}{m_2 - m_1}(m_1 - m_1') = 42$ г.

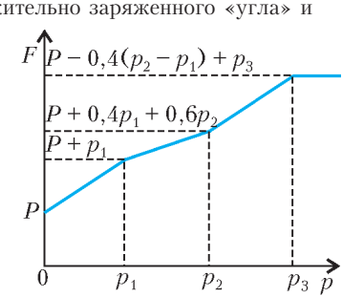

Рис. 19