В. И. Берник, И. Р. Домбровский, Эффективные оценки меры множеств, определяемых диофантовыми условиями, *Тр. МИАН*, 1994, том 207, 35–41

Труды Математического института РАН
1994, том 207

УДК 511

В.И.Берник, И.Р.Домбровский

Эффективные оценки меры множеств, определяемых диофантовыми условиями

Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами, $\Psi(x)$ — некоторая монотонно убывающая функция такая, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Psi(k)$ сходится, $H = H(P) = \max\limits_{0 \le i \le n} |a_i|$ — высота многочлена $P(x)$. Обозначим через $L_n(\Psi)$ множество действительных чисел ω, для которых неравенство

$$|P(\omega)| < \Psi^n(H)$$

имеет бесконечное число решений. Пусть, далее, μA — мера Лебега множества A. Как показали В.Г. Спринджук [5] для $\Psi(x) = x^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, А. Бэйкер [6] для произвольной функции $\Psi(x)$, множество $L_n(\Psi)$ имеет нулевую меру Лебега. В работе [4] правая часть неравенства заменена на функцию $H^{-n+1}\Psi(H)$ и показано, что и в этом случае $\mu L_n(\Psi) = 0$, тем самым доказана гипотеза А.Бэйкера, сформулированная в [6].

Однако во всех работах [4–6] наряду с явными, конструктивными оценками мер некоторых подмножеств множества $L_n(\Psi)$ мера других подмножеств оценивается с помощью неэффективной индукционной редукции.

Различные приложения теории диофантовых приближений в задачах математической физики, в задачах исследования арифметической природы точек на алгебраических кривых требуют получения эффективных оценок мер множеств вида $L_n(\Psi)$. В работе приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $H > H_0(n)$ — достаточно большое действительное число, $P(x)$ — полином с целыми коэффициентами,* $\deg P(x) \le n$, $n < \lambda \le n + 1/3$. *Обозначим через $M_n(H, \lambda)$ множество действительных ω из некоторого интервала $J \subset R$, для которых неравенство*

$$|P(\omega)| < H^{-\lambda} \tag{1}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P(x)$, $H(P) \le H$. Тогда при любом $\delta > 0$

$$\mu M_n(H, \lambda) \le c(n, \delta, J) H^{n-\lambda+\delta}. \tag{2}$$

Прежде чем перейти к непосредственному доказательству теоремы, приведем ряд вспомогательных понятий и лемм.

Класс неприводимых целочисленных полиномов с условиями $\deg P(x) \leq n$, $H(P) \leq H$ и $a_n = H(P)$ обозначим через $P_n(H)$, $P_n = \bigcup\limits_{H=1}^{\infty} P_n(H)$.

Переход от рассмотрения всевозможных неприводимых многочленов к многочленам, удовлетворяющим указанному условию на a_n, производится при помощи традиционных для данных задач рассуждений (см. [5]).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $T = [\frac{d(n)}{\varepsilon}]$, где $d(n)$ — достаточно большая величина.

Пусть $P(x) \in P_n(H)$ и $\varkappa_1 = \varkappa_1(P), \ldots, \varkappa_n = \varkappa_n(P)$ — корни $P(x)$. Произведем упорядочение корней $\varkappa_i(P)$, как в [5]. Простоты ради будем считать далее $j = 1$.

Определим действительные числа μ_i и целые l_i из соотношений

$$|\varkappa_1 - \varkappa_i| = H^{-\mu_i}, \quad (l_i - 1)/T \leq \mu_i < l_i/T, \quad 2 \leq i \leq n. \tag{3}$$

Используя (3), с каждым многочленом $P(x) \in P_n(H)$ будем связывать целочисленный вектор $\overline{s} = (l_2, \ldots, l_n)$. Нетрудно доказать [1], что число таких векторов конечно и зависит только от n и ε. Многочлены $P(x) \in P_n(H)$ с одним и тем же $\overline{s}$ объединим в подмножество $P_n(H, \overline{s})$, а $P(x) \in P_n$ — в подмножество $P_n(\overline{s})$. Пусть, далее,

$$p_i(P) = \frac{l_{i+1} + \ldots + l_n}{T}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$S(\varkappa_i) = \{\omega \in R : \min_{1 \leq j \leq n} |\omega - \varkappa_j| = |\omega - \varkappa_i|\}.$$

Через $c(n)$ будем обозначать постоянные, зависящие только от n и некоторого положительного, заранее фиксированного числа ε. Над $c(n)$ мы будем производить действия по формальным правилам $c(n) + c(n) = c(n)$, $c(n) \cdot c(n) = c(n)$, смысл которых состоит в том, что сумма и произведение суть снова некоторые функции, зависящие от n и ε.

Лемма 1 [3]. *Пусть* $P_1(x), \ldots, P_k(x) \in R[x]$. *Тогда*

$$c_1(k) H(P_1) \cdots H(P_k) < H(P_1 \cdots P_k) < c_2(k) H(P_1) \cdots H(P_k).$$

Лемма 2 [5]. *Пусть* $P(x) \in P_n(x)$ *и* $\omega \in S(\varkappa_1)$. *Тогда*

$$|\omega - \varkappa_1| \leq 2^n \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_1)|},$$

$$|\omega - \varkappa_1| \leq \min_{2 \leq j \leq n} \left(2^{n-j} \frac{|P(\omega)|}{|P'(\varkappa_1)|} |\varkappa_1 - \varkappa_2| \cdots |\varkappa_1 - \varkappa_j|\right)^{1/j}.$$

Лемма 3 [1]. *Пусть* $P(x) \in P_n(H, \overline{s})$. *Тогда*

$$|P^{(l)}(\varkappa_1)| < c(n, \varepsilon) H^{1 - p_l + (n-1)\varepsilon}, \quad l = 1, \ldots, n-1.$$

Л е м м а 4 [2]. *Пусть* $\delta > 0$ *— некоторое вещественное число,* s_1 *и* s_2 *— натуральные числа,* $H_1 = H_1(s_1, s_2, \delta)$ *— достаточно большое натуральное число. Пусть, далее,* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *— целочисленные взаимно простые многочлены,*

$$\deg P(x) \leq s_1, \quad \deg Q(x) \leq s_2, \quad H(P) = H_1^{\nu_1}, \quad H(Q) = H_1^{\nu_2}.$$

Тогда если для всех ω *из некоторого интервала* I, $\mu I = H_1^{-\eta}$, $\eta > 0$, *выполняются неравенства*

$$|P(\omega)| < H_1^{-\tau_1}, \quad |Q(\omega)| < H_1^{-\tau_2},$$

$$\min(\tau_1 + \nu_1, \tau_2 + \nu_2) = \mu,$$

то

$$\mu + 2\max(\mu - \eta, 0) \leq \nu_1 s_2 + \nu_2 s_1 + \delta. \tag{4}$$

Л е м м а 5 [2]. *Пусть* $I \subset R$ *— некоторый интервал и* $B \subset I$ *— измеримое множество действительных чисел,* $\mu B > c(n)\mu I$. *Пусть далее для всех* $\omega \in B$ *выполняется неравенство* $|P(\omega)| < H^{-\omega}$, $\omega > 0$, $\deg P(\omega) \leq n$. *Тогда для всех* $\omega \in I$ *верно*

$$|P(\omega)| < c(n)H^{-\omega}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Доказательство будем строить при помощи индукции по степеням многочлена $P(x)$. В случае многочленов первой степени утверждение теоремы очевидно. В предположении справедливости неравенства (1) для многочленов степени, меньшей n, докажем истинность теоремы для многочленов степени n, $n \geq 2$.

Рассмотрим сначала случай, когда наш многочлен является степенью неприводимого. То есть $P(x) = P_1^k(x)$, $2 \leq k \leq n$. Тогда

$$n = \deg P(x) = k \deg P_1(x) = kn_1,$$

где $n_1 = \deg P_1(x)$, и в силу леммы 1

$$H(P_1) < c(n)H(P_1)^{1/k} < c(n)H^{1/k}.$$

Мера множества $M_n(H, \lambda)$ тех ω, для которых

$$|P(\omega)| < H^{-\lambda},$$

совпадает с мерой тех ω, для которых

$$|P_1(\omega)| < H^{-\lambda/k}.$$

По индуктивному предположению

$$\mu M_n(H, \lambda) < c(n, \varepsilon)H^{-\frac{\lambda}{k} + \frac{n}{k^2} + \varepsilon}. \tag{5}$$

Но при указанных ограничениях на λ, k, n правая часть (4) не превосходит $H^{n-\lambda+\varepsilon}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $P(x)$ — некоторый приводимый многочлен. С учетом рассмотренного выше случая мы можем считать, что $P(x)$ представим в виде произведения двух многочленов, не имеющих общих корней:

$$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x), \tag{6}$$

где $\deg P_1(x) = n_1$, $\deg P_2(x) = n_2$.

В силу леммы 1

$$H(P_1) = H^{\mu_1}, \quad H(P_2) \le c(n) H^{1-\mu_1}, \quad 0 < \mu_1 \le 1.$$

Пусть, далее, I — некоторый интервал, содержащий корень $\varkappa_1$, для всех точек ω которого справедливо (1). Обозначим $\lambda_1 = l_1\varepsilon - 1$, где l_1 такое целое, что мера тех $\omega \in I$, для которых

$$|P_1(\omega)| \le H^{1-l\varepsilon},$$

не менее $0,5\mu I$, но уже мера тех $\omega \in I$, для которых

$$|P_1(\omega)| \le H^{1-(l+1)\varepsilon},$$

меньше $0,5\mu I$.

Так как $|P_1(\omega)| \le H^{-\lambda_1}$ на множестве меры, не меньшей $0,5\mu I$, то по лемме 5 для любого $\omega \in I$

$$|P_1(\omega)| < c(n) H^{-\lambda_1}, \tag{7}$$

а так как

$$|P_1(\omega)| \le H^{-\lambda_1-\varepsilon_1}$$

на множестве меры, меньшей $0,5\mu I$, то в силу (6)

$$|P_2(\omega)| \le c(n) H^{-\lambda+\lambda_1+\varepsilon}$$

для $\omega \in I$, образующих множество меры не менее $0,5\mu I$. Следовательно, применяя лемму 5, получим

$$|P_2(\omega)| < c(n) H^{-\lambda+\lambda_1+\varepsilon} \tag{8}$$

для любого $\omega \in I$.

По предположению индукции мера тех $\omega \in I$, для которых выполняется (7),не превосходит

$$c(n) H^{-\lambda_1+n\mu_1},$$

а тех $\omega \in I$, для которых выполняется (8), не превосходит

$$c(n) H^{-\lambda+\lambda_1+\varepsilon+(n-n_1)(1-\mu_1)}.$$

Тогда если справедливо

$$H^{-\lambda+n_1\mu_1} < H^{n-\lambda}, \tag{9}$$

либо

$$H^{-\lambda+\lambda_1+\varepsilon+(n-n_1)(1-\mu_1)} < H^{n-\lambda}, \tag{10}$$

то наше утверждение для приводимого $P(x)$ доказано.

Предположим, что (9) и (10) одновременно не выполняются, т. е.

$$H^{-\lambda_1+n_1\mu_1} \geq H^{n-\lambda},$$
$$H^{-\lambda+\lambda_1+\varepsilon+(n-n_1)(1-\mu_1)} \geq H^{n-\lambda}. \tag{11}$$

Из (11) получаем

$$\lambda_1 \leq \lambda - n + n_1\mu_1, \tag{12}$$

$$\lambda_1 \geq \mu_1(n-n_1) + n_1 - \varepsilon. \tag{13}$$

Утверждение леммы 4 в применении к многочленам $P_1(x)$ и $P_2(x)$ перепишется

$$\max(H^{-\lambda_1}, H^{-\lambda+\lambda_1+\varepsilon}) \geq c(n)H^{-\mu(n-n_1)-(1-\mu_1)n_1}. \tag{14}$$

Пусть $0 \leq \lambda_1 \leq \frac{\lambda-\varepsilon}{2}$. Тогда $H^{-\lambda} > H^{-\lambda+\lambda_1+\varepsilon}$ и неравенство (14) дает нам

$$\lambda_1 < \mu_1(n-n_1) + (1-\mu_1)n, \tag{15}$$

которое в совокупности с (13) приводит к противоречию для всех $0 < \mu_1 \leq 1$. Случай $\mu_1 = 0$ ведет к противоречию между (12) и (13).

Пусть теперь $\lambda \geq \lambda_1 > \frac{\lambda-\varepsilon}{2}$. Получаем $H^{-\lambda+\lambda_1+\varepsilon} > H^{-\lambda_1}$ и в силу леммы 4

$$\lambda - \lambda_1 < \mu_1(n-n_1) + (1-\mu_1)n_1 + \varepsilon. \tag{16}$$

Легко убедиться, что неравенства (12) и (16) противоречивы, что и доказывает справедливость исходного предложения для приводимых $P(x)$.

Пусть теперь $P(x)$ неприводим и принадлежит $P_n(H,\overline{s})$. Положим $k = n+1-$ $-\frac{l_2}{T} + p_1$. Мы будем детально рассматривать лишь случай

$$\frac{l_2}{T} + p_1 < n, \tag{17}$$

так как рассмотрение случая $\frac{l_2}{T} + p_1 \geq n$ производится так же, как в [4].

Будем говорить, что многочлен $P(x)$ принадлежит интервалу J, если существует $\omega_1 \in J$ такое, что $|P(\omega_1)| < H^{-\lambda}$.

Воспользуемся леммами 2 и 3 и получим для ближайшего к ω_1 корня $\varkappa_1$ полинома $P(x)$

$$|\omega_1 - \varkappa_1| < c(n)\frac{H^{-\lambda}}{|P'(\varkappa_1)|} < c(n)H^{-\lambda-1+p_1}.$$

Положим также $\mu J = H^{-\frac{l_2}{T}-0,8\{k\}}$ и оценим сверху число многочленов, принадлежащих J, величиной H^{ν}. Тогда мера тех ω, для которых существует $P(x)$ из выделенного класса и такой, что выполняется (1), не превосходит

$$c(n)H^{\nu+\frac{l_2}{T}+0,8\{k\}-\lambda-1+p_1},$$

что в свою очередь при $\nu \leq [k]+0,2\{k\}$ не превосходит требуемой величины $H^{-\lambda+n}$.

Перейдем к рассмотрению случая $\nu > [k]+0,2\{k\}$. Разложим любой многочлен $P(x)$, принадлежащий J, в ряд Тейлора в окрестности корня

$$P(\omega) = P'(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1) + \frac{1}{2}P''(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1)^n.$$

В силу (17) $H^{-\frac{l_2}{T}-0,8\{k\}} > H^{-\lambda-1+p_1}$ и, следовательно, для любого $\omega \in J$

$$|\omega-\varkappa_1| < |\omega_1-\varkappa_1| + |\omega_1-\omega| < c(n)H^{-\frac{l_2}{T}-0,8\{k\}}. \tag{18}$$

Используя лемму 3 и неравенство (18), абсолютное значение любого одночлена из разложения $P(x)$ в ряд Тейлора можно оценить

$$|P^{(i)}(\varkappa_1)(\omega-\varkappa_1)| < c(n)H^{1-p_i+(n-i)\varepsilon-i\frac{l_2}{T}-0,8i\{k\}} < c(n)H^{1-p_1+(n+1)\varepsilon-\frac{l_2}{T}-0,8\{k\}}.$$

Таким образом, для любого $\omega \in J$

$$|P(\omega)| < c(n)H^{1-p_1-\frac{l_2}{T}-0,8\{k\}+(n+1)\varepsilon}. \tag{19}$$

Если с интервалом J связаны $c(n)H^{\nu}$ многочленов высоты, не превосходящей H, то, применяя принцип ящиков Дирихле, несложно установить, что среди них существуют по крайней мере $c(n)H^{0,2\{k\}}$ таких, у которых коэффициенты $a_n, \ldots, a_{n-[k]+1}$ совпадают. Пусть $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ — три различных таких многочлена. Рассмотрим далее многочлены

$$T_1(x) = P_1(x) - P_2(x),$$
$$T_2(x) = P_1(x) - P_3(x).$$

Для них справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |T_1(\omega)| &< c(n)H^{1-p_1-\frac{l_2}{T}-0,8\{k\}+(n+1)\varepsilon}, \\ |T_2(\omega)| &< c(n)H^{1-p_1-\frac{l_2}{T}-0,8\{k\}+(n+1)\varepsilon} \end{aligned} \tag{20}$$

для произвольного $\omega \in J$, степень каждого из $T_i(x)$, $i=1,2$, не превосходит $n-[k] = \frac{l_2}{T}+p_1-1+\{k\}$ и высота $H(T_i) < c(n)H$.

Существование таких многочленов в случае, если $T_1(x)$ и $T_2(x)$ не имеют общих корней, противоречит лемме 4. Действительно, согласно этой лемме для любого $\delta > 0$ должно иметь место неравенство

$$3p_1 + 3\frac{l_2}{T} + 2,4\{k\} - 3 - (n+1)\varepsilon + 3 - 2\Big(\frac{l_2}{T} + 0,8\{k\}\Big) < 2\Big(\frac{l_2}{T} + p_1 - 1 + \{k\}\Big) + \delta,$$

которое невозможно.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $T_1(x)$ и $T_2(x)$ имеют общий корень. Тогда $T_1(x)$ представим в виде $T_1(x) = R_1(x)R_2(x)$, где $\deg R_1(x) = n_2$, $\deg R_2(x) = \frac{l_2}{T} + p_1 - 1 + \{k\} - n_2$, $H(R_1) = H^{\mu_2}$, $H(R_2) \leq c(n)H^{1-\mu_2}$, $0 \leq \mu_2 \leq 1$.

По индуктивному предположению мера $\omega_2 \in J$, для которых

$$|R_1(\omega)| \le c(n)H^{-\lambda_2},$$

$$|R_2(\omega)| \le c(n)H^{1-p_1-\frac{l_2}{T}+\lambda_2-0,8\{k\}+(n+2)\varepsilon},$$

где λ_2 выбрано так, как λ_1 выше, не превосходит соответственно

$$c(n)H^{-\lambda_2+n_2\mu_2+\varepsilon}$$

и

$$c(n)H^{1-p_1-\frac{l_2}{T}+\lambda_2-0,8\{k\}+(n+2)\varepsilon_1}H^{(\frac{l_2}{T}+p_1-1+\{k\}-n_2)(1-\mu_2)+\varepsilon}.$$

Покажем далее, что невозможно одновременное выполнение двух следующих неравенств:

$$H^{-\lambda_2+n_2\mu_2+\varepsilon} > H^{n-\lambda}, \tag{21}$$

$$H^{1-p_1-\frac{l_2}{T}+\lambda_2-0,8\{k\}+(n+2)\varepsilon}H^{(\frac{l_2}{T}+p_1-1+\{k\}-n_2)(1-\mu_2)+\varepsilon} > H^{n-\lambda}, \tag{22}$$

что и завершает доказательство теоремы.

Действительно, из (21) и (22) получаем

$$\lambda_2 - n_2\mu_2 - \varepsilon < \lambda - n$$

и

$$1 - p_1 - \frac{l_2}{T} - 0,8\{k\} + \lambda_2 + (n+2)\varepsilon_1 + (1-\mu_2)\Big(\frac{l_2}{T} + p_1 - 1 + \{k\} - n_2\Big) - \varepsilon > n - \lambda.$$

Два последних неравенства с учетом интервала изменения параметра λ приводят нас к неравенству

$$n_2(1-\mu_2) + \mu_2\Big(\frac{l_2}{T} + p_1 - 1 + \{k\} - n_2\Big) - 0,2\{k\} - (n+2)\varepsilon_1 < 1,$$

которое в указанных рамках изменения μ_2 и n_2 противоречиво.

Поступило в январе 1992 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берник В.И.* Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов //Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, №1. С. 24–45.
2. *Берник В.И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений //Acta arithm. 1983. Vol. 42. P. 219–253.
3. *Берник В.И.* Доказательство гипотезы А.Бэйкера в метрической теории трансцендентных чисел //ДАН СССР. 1984. Т. 277, №5. С. 1036–1039.
4. *Берник В.И.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов //Acta arithm. 1989. Vol. 53. P. 17–28.
5. *Спринджук В.Г.* Проблема Малера в метрическай теории чисел. Минск: Наука и техника, 1967.
6. *Baker A.* On a theorem of Sprindžuk //Proc. Roy. Soc. London A. 1968. Vol. 292. P. 2–104.