А. В. Малышев, Замечание о звездном множестве, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1973, том 33, 94–96

А.В.Малышев

ЗАМЕЧАНИЕ О ЗВЕЗДНОМ МНОЖЕСТВЕ

Мы предлагаем здесь небольшое обобщение известного соотношения (см., например, [I], стр.153-154) между постоянной Эрмита $\gamma(F)$ данной лучевой функции $F(x)$ и критическим определителем $\Delta(\mathcal{L}_F)$ соответствующего ей звездного тела $F(x)\leq 1$. Это просто получаемое предложение нам не встречалось в литературе, и мы вынуждены привести его, ибо оно используется в следующей статье*), посвященной методу Морделла.

Пусть $\mathbb{R}^n$ - n-мерное евклидово пространство. Обобщенной лучевой функцией $F(x)$ мы будем называть функцию, заданную на $\mathbb{R}^n$, принимающую вещественные значения или $+\infty$ и обладающую следующими двумя свойствами:

I) $F(x)\geq 0$; $F(0)=0$ (считаем, что $+\infty > 0$);

2) $F(\lambda x)=\lambda F(x)$ для любого вещественного числа $\lambda>0$ (подразумевается, что $\lambda\cdot+\infty=+\infty$).

Обобщенная лучевая функция отличается от обычной лучевой функции, в частности, отсутствием требования непрерывности. Множество $\mathcal{L}_F$ точек с условием

$$F(x)\leq 1 \tag{I}$$

является звездным множеством ([I], стр.135).

Пусть Λ - решетка точек в $\mathbb{R}^n$ ([I], стр.19). Точную нижнюю границу

$$m(F,\Lambda)=\inf_{\substack{a\in\Lambda\\ a\neq 0}} F(a), \tag{2}$$

взятую по всем точкам $a\neq 0$ решетки Λ, мы будем называть однородным арифметическим минимумом (или просто минимумом) функции F в решетке Λ; "минимум" может не достигаться. Ясно, что $m(F,\Lambda)\geq 0$. Величина

$$\gamma(F)=\sup_{\Lambda}\frac{m(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}, \tag{3}$$

где $d(\Lambda)$ - определитель решетки Λ, а точная верхняя граница берется по всем решеткам из $\mathbb{R}^n$, называется постоянной

*) Этот Сборник, стр. 97-115.

Эрмита функции F.

Теорема. Пусть F – обобщенная лучевая функция; $\mathcal{L}_F$ – отвечающее ей звездное множество, определяемое неравенством (I). Тогда

$$\gamma(F)=\{\Delta(\mathcal{L}_F)\}^{-\frac{1}{n}}, \tag{4}$$

где $\Delta(\mathcal{L}_F)$ – критический определитель множества $\mathcal{L}_F$ (см. [I], стр. I06–I07). Если $\Delta(\mathcal{L}_F)=+\infty$, то равенство (4) понимается как $\gamma(F)=0$; если $\Delta(\mathcal{L}_F)=0$, то равенство (4) понимается как $\gamma(F)=+\infty$.

Доказательство. I) Если $0<\gamma(F)<+\infty$, то для любого $\varepsilon>0$

$$\gamma(F)=\sup_{\Lambda}\frac{m(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}=\sup_{\substack{\Lambda\\ 0<m(F,\Lambda)<+\infty}}\frac{m(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}=$$

$$=\sup_{\substack{\Lambda\\ m(F,\Lambda)=1+\varepsilon}}\frac{m(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}=(1+\varepsilon)\frac{1}{\{\inf d(\Lambda)\}^{1/n}}. \tag{5}$$

Так как любая решетка Λ с условием $m(F,\Lambda)=1+\varepsilon$ в силу (I) и (2) является $\mathcal{L}_F$-допустимой, то

$$\inf_{\substack{\Lambda\\ m(F,\Lambda)=1+\varepsilon}} d(\Lambda)\geq\Delta(\mathcal{L}_F),$$

так что (5) приводит к неравенству

$$\gamma(F)\leq(1+\varepsilon)\{\Delta(\mathcal{L}_F)\}^{-\frac{1}{n}}$$

и так как $\varepsilon>0$ произвольно, то

$$\gamma(F)\leq\{\Delta(\mathcal{L}_F)\}^{-\frac{1}{r}}. \tag{6}$$

С другой стороны, если решетка Λ является $\mathcal{L}_F$-допустимой, то в силу (I) и (2) $m(F,\Lambda)\geq 1$, а потому

$$\gamma(F)=\sup_{\Lambda}\frac{m(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}\geq\sup_{\substack{\Lambda\\ \Lambda-\mathcal{L}_F\text{-доп.}}}\frac{m(F,\Lambda)}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}}\geq$$

$$\geqslant \sup_{\Lambda - \mathcal{L}_F\text{-доп.}} \frac{1}{\{d(\Lambda)\}^{1/n}} = \frac{1}{\{\inf_{\Lambda - \mathcal{L}_F\text{-доп.}} d(\Lambda)\}^{1/n}} = \{\Delta(\mathcal{L}_F)\}^{-\frac{1}{n}}. \qquad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), получаем (4) в случае $0<\gamma(F)<+\infty$. При этом $0<\Delta(\mathcal{L}_F)<+\infty$.

2) Если $\gamma(F)=0$, то в силу (3),(I) и (2) ни одно из решеток Λ не является $\mathcal{L}_F$ -допустимой, так что $\Delta(\mathcal{L}_F)=+\infty$.

3) Если $\gamma(F)=+\infty$, то в силу (5) и инвариантности $m(F,\Lambda)\{d(\Lambda)\}^{-\frac{1}{n}}$ при замене Λ на $t\Lambda$ по $\varepsilon>0$ найдется решетка Λ с условием

$$1+\varepsilon \leqslant m(F,\Lambda) \leqslant +\infty, \quad d(\Lambda)<\varepsilon.$$

Решетка Λ является $\mathcal{L}_F$ -допустимой. Так как $\varepsilon>0$ произвольно мало, то $\Delta(\mathcal{L}_F)=0$.

Теорема доказана.

В силу определения (3) и равенства (4) справедливо следующее предложение.

Следствие. Пусть $F(x)$ - обобщенная лучевая функция; Λ - решетка определителя $d(\Lambda)$. Тогда

$$m(F,\Lambda) \leqslant \{\Delta(\mathcal{L}_F)\}^{-\frac{1}{n}} \{d(\Lambda)\}^{\frac{1}{n}}. \qquad (8)$$

Цитированная литература

[I] Касселс Дж. Введение в геометрию чисел, М., 1965.