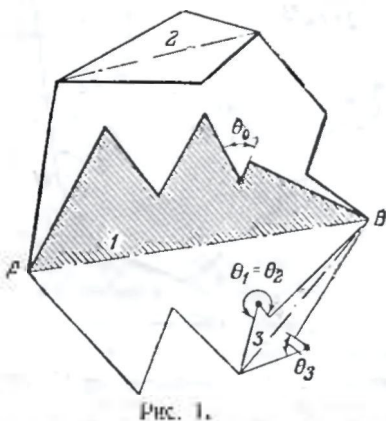


КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

1. **Р. Г. Бинг и Н. Д. Казаринов** (R. H. Bing, N. D. Kazari-noff, *Мадисон, Висконсин, США*). **О конечности числа отражений, переводящих плоский невыпуклый многоугольник в выпуклый.** Пусть P — простой невыпуклый n -угольник (рис. 1), AB — сторона выпуклой оболочки H многоугольника P^1 , имеющая с P только две общие точки A и B . Часть $H - P$, прилежащую к AB (на рис. 1 заштрихована), отобразим симметрично от AB ; в результате из исходного многоугольника путем замены в нем соответствующей части периметра ее зеркальным отображением, получим новый многоугольник $s(P)$, где s — примененная к P операция отражения. Ясно, что $s(P)$ есть k -угольник ($n - 2 \leq k \leq n$), стороны которого равны соответствующим сторонам P . Рассмотрим последовательность многоугольников $\{r_m(P)\}$, где $r_0(P) = P, r_m(P) = r_m(r_{m-1}(P))$ ($m > 0$) и все r_m при $m > 0$ суть произвольно выбранные операции отражения s .



Теорема. *Последовательность $\{r_m(P)\}$ конечна, и ее последний член есть выпуклый k -угольник ($k \leq n$)².*

Доказательство. Пусть V_0 — произвольная вершина P и $V_m = r_m(V_{m-1})$ ($m \geq 1$). Допустим, что последовательность $\{r_m(P)\}$ бесконечна.

¹) Выпуклой оболочкой многоугольника называется наименьший выпуклый многоугольник, содержащий данный. (Все примечания к настоящей заметке — редакционные.)

²) Эта теорема позволяет свести решение ряда экстремальных задач для простых многоугольников к (более простым!) задачам, касающимся выпуклых многоугольников. Несколько иное доказательство той же теоремы см. Ю. Г. Решетняк, Об одном приеме превращения невыпуклой ломаной в выпуклую, Успехи матем. наук 12, № 3 (75), 1957, стр. 189—191.

1°. Докажем сначала, что $V_m \rightarrow V$ при $m \rightarrow \infty$; отсюда будет следовать, что последовательность $\{r_m(P)\}$ точно сходится и имеет пределом некоторый предельный k -угольник, причем $k \leq n$. Для доказательства заметим, что если E, F, G — три внутренние точки H , не лежащие на одной прямой, то три последовательности расстояний $\{EV_m\}$, $\{FV_m\}$, $\{GV_m\}$ являются ограниченными последовательностями неубывающих положительных чисел¹⁾. Пусть

$R_E = \lim_{m \rightarrow \infty} EV_m$; аналогично определяются R_F и R_G . Три окружности с центрами в точках E, F и G и с радиусами R_E, R_F, R_G должны иметь по крайней мере одну общую точку, а поскольку точки E, F, G не лежат на одной прямой, то они имеют единственную общую точку V . Это доказывает 1°.

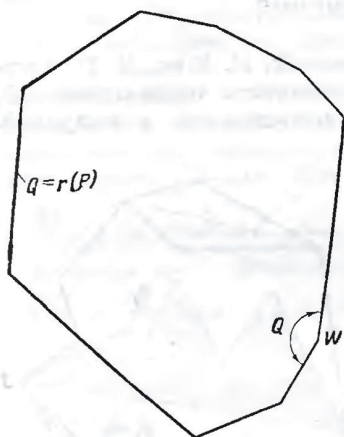


Рис. 2.

Пусть теперь W — любая вершина выпуклой оболочки Q предельного многоугольника $r(P)$ (рис. 2).

2°. Докажем, что любая вершина $r(P)$ получена в результате конечного числа N_W отражений. Чтобы доказать это, будем рассуждать следующим образом. Пусть θ_m есть угол многоугольника $r_m(P)$, соответствующий углу θ многоугольника $r(P)$ при

вершине W . Мы знаем из 1°, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m = \theta$. Кроме того, $\theta < \pi$. Но если W_m не совпадает с W_{m+1} для некоторого m и если $\theta_m < \pi$, то $\theta_{m+1} = 2\pi - \theta_m > \pi$, а если $\theta_m > \pi$, то $\theta_{m+1} = 2\pi - \theta_m < \pi$ (см. рис. 1). Следовательно, $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m = \theta < \pi$ только в том случае, если все θ_m одинаковы, начиная с некоторого m , т. е. тогда и только тогда, когда W получится в результате конечного числа отражений.

3°. Пусть теперь $N = \max N_W$ для всех вершин N многоугольника Q . Тогда $r_N(P) = Q = r(P)$ ²⁾.

Это очевидно! Доказательство завершено.

1) Ограниченность следует, например, из того, что все $r_m(P)$, как многоугольники одного и того же периметра p , имеют диаметр, меньший $\frac{p}{2}$, и, кроме того, имеют общую часть с H .

2) Q совпадает с $r_N(P)$, так как в противном случае существовала бы операция отражения, выводящая $r_N(P)$ за пределы Q , и Q не могло бы быть выпуклой оболочкой $r(P)$.

Предположение. При фиксированном n для всех n -угольников и при любом выборе операций обращения r_m число N ограничено величиной $2n$.

Замечание. Многоугольник P не обязательно должен быть простым.

Доказательство этой теоремы, данное Б. Секефальви-Надем [см. B. Sz.-N ad y, Amer. Math. Monthly 46, 1939, стр. 176—177], неверно.

2. А. Г. Дорфман (Горький). Ромбокубооктаэдр и взаимные им многогранники. Выпуклый многогранник называется *равноугольно-полуправильным* или *архимедовым*, если все его многогранные углы равны между собой,

а все грани — правильные многоугольники нескольких типов. Простейшими примерами архимедовых многогранников являются призмы с правильными многоугольниками в основаниях и квадратными боковыми гранями и *скошенные призмы*, или *антипризмы* (основания — правильные многоугольники, боковые грани — равносторонние треугольники).

Кроме двух бесконечных серий — призм и скошенных призм, — существует 14 равноугольно-полуправильных многогранников¹⁾. К ним принадлежит ромбокубооктаэдр (рис. 1, а) и обнаруженный В. Г. Ашкинзуе²⁾ *скошенный ромбокубооктаэдр* (рис. 1, б), оставшийся незамеченным около двух тысяч лет.

Выпуклый многогранник с одинаковыми гранями и правильными многогранными углами нескольких типов называется *равногранно-полуправильным*. Простейшими примерами равногранно-полуправильных многогранников являются *дипирамиды* с гранями, делящими пополам ребра призм Архимеда. Все остальные равноугольно- и равногранно-полуправильные многогранники находятся

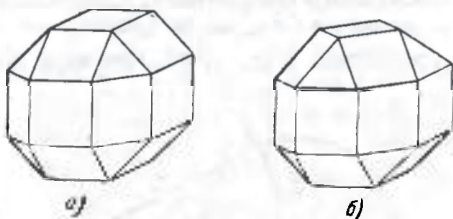


Рис. 1.

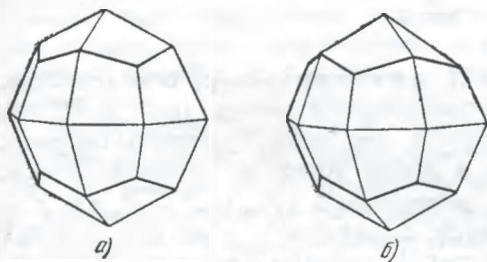


Рис. 2.

¹⁾ Они приводятся, например, в книге: Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956, стр. 182—185.

²⁾ В. Г. Ашкинзуе, О числе полуправильных многогранников, Математическое просвещение, вып. 1, 1957.