

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Крутилин, А. П. Ращепкин, Распределение электрических полей и токов в МГД-канале рамочного исполнения в зоне скачка магнитного поля, *ТВТ*, 1979, том 17, выпуск 1, 179–184

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.220.255.141

9 ноября 2024 г., 00:13:12



УДК 538.3:538.4:621.362

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ТОКОВ В МГД-КАНАЛЕ РАМОЧНОГО ИСПОЛНЕНИЯ В ЗОНЕ СКАЧКА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Брутилин В. А., Ращенко А. П.*

На основе приближенного решения задачи исследовано влияние неоднородности магнитного поля в концевых зонах МГД-канала рамочного исполнения с постоянным наклоном рамок на характеристики серийного МГД-генератора.

Применение серийной схемы включения секционированных электродов канала МГДГ позволит в определенной мере сократить количество независимых нагрузок, а в конечном итоге за счет некоторого ухудшения характеристик канала даже свести все нагрузки к одной. В конструктивном отношении такая схема удачно реализуется в каналах рамочного исполнения, для которых общая теория электрических процессов достаточно полно разработана лишь в предположении постоянства магнитного поля, геометрических размеров канала и параметров плазмы. Однако вследствие неоднородности, например, магнитного поля электрические поля и токи в концевых зонах канала существенно отклоняются от нормального распределения их в основной зоне. В связи с этим появляются дополнительные требования к конструктивному исполнению концевых участков рамочного канала, и необходим анализ электрических процессов в зоне неоднородного магнитного поля.

В литературе рассматривались вопросы конструктивного исполнения электродов концевых участков и описания специфических особенностей протекания электрических процессов. Естественно, что влияние концевых явлений на процессы в активной зоне зависит от исполнения канала. В работе [1], например, проведены исследования электрических процессов в канале, когда рамки при  $x < 0$ ,  $y = 0$  (рис. 1) имеют электрический контакт, представляя собой один общий электрод, к которому подключается внешняя нагрузка. Магнитное поле при этом полагается постоянным. Аналогичная задача, но с учетом неоднородности магнитного поля (что, впрочем, не оказывает влияния на процессы в активной зоне, так как противолежащие электроды при  $x = 0$  полагаются замкнутыми), решалась в [2] численными методами. Были предложены также исполнения каналов с меняющимся наклоном рамок в зонах неоднородного магнитного поля [3]. Однако достаточно строгого анализа сопутствующих этому электрических процессов в литературе не приводилось.

В данной работе предпринята попытка описать структуру вихревых электрических токов в зоне скачка магнитного поля применительно к каналам рамочного исполнения в приближении малых магнитных чисел Рейнольдса. Положим, что по рамочному каналу с шириной  $h$  ( $|x| < \infty$ ) и высотой  $\Delta$  с наклоном рамок, равным  $\alpha$  (рис. 1), плазма движется с постоянной скоростью  $v$ . Тогда, исходя из системы уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома,

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}, \mathbf{j} + \alpha \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

математическую формулировку задачи в двумерной постановке с учетом оговоренных в [4] допущений можно свести к уравнению для индуцированного магнитного поля в канале

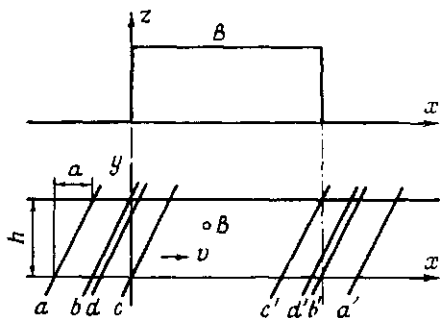


Рис. 1

$$\frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y^2} - \mu \sigma v \frac{\partial B_2}{\partial x} = \left( \mu \sigma v - \alpha \frac{\partial B_2}{\partial y} \right) \frac{\partial B_1}{\partial x}. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) результирующее магнитное поле представлено в виде суммы внешнего  $B_1$  и индуцированного токами в плазме  $B_2$  магнитных полей  $B = B_1 + B_2$  ( $\alpha$  — некоторая константа в законе Ома).

Поскольку для рамочных каналов должны выполняться соотношения

$$j_v(x, 0) = j_v(x+a, h), \quad E_x(x, 0) = E_x(x+a, h),$$

то с помощью закона Ома легко показать, что на границах полосы  $y=0$  и  $y=h$  вторичное поле подчиняется условиям

$$B_2(x, 0) - B_2(x+a, h) = -\mu I, \\ \frac{\partial B_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial B_2(x+a, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = \mu \beta j_v(x, 0) [\theta(x+a) - \theta(x) - \theta(x-l+a) + \theta(x-l)]. \quad (3)$$

Здесь принято, что внешнее магнитное поле в канале меняется по закону

$$B_1 = B_0 [\theta(x) - \theta(x-l)], \quad (4)$$

где  $l$  — длина активной зоны канала;  $\theta(z)$  — единичная обобщенная функция, равная 0 при  $z < 0$  и 1 при  $z \geq 0$  соответственно;  $\beta = \alpha B_0$  — параметр Холла, определенный по величине внешнего, а не, как следовало бы, результирующего магнитного поля; в дальнейшем ограничимся решениями при малых магнитных числах Рейнольдса;  $I = I_n / \Delta$  — приведенное к единице высоты канала значение тока нагрузки  $I_n$  генератора.

На основе приближенного (с погрешностью менее 10%) решения задачи (2), (3) методом осреднения функциональных поправок [5] распределение плотности тока на электродных стенках канала можно представить зависимостями

$$x < -a, \\ j_x = Ih(h^2 + a^2)^{-1} + (\sigma v B_0 - \beta A) M + \beta DN; \\ j_v = -Ia(h^2 + a^2)^{-1} - (\sigma v B_0 - \beta A) N + \beta DM, \\ -a < x < 0, \\ j_x = Ih(h^2 + a^2)^{-1} + (\sigma v B_0 - \beta A) M + \beta D [N - h^2 / 2(a^2 + h^2)]; \\ j_v = -Ia(h^2 + a^2)^{-1} + (\sigma v B_0 - \beta A) [N - h^2 / 2(a^2 + h^2)] + \beta DM, \\ x > 0, \\ j_x = Ih(h^2 + a^2)^{-1} + (\sigma v B_0 - \beta A) M + \beta D [N - h^2(a^2 + h^2)^{-1}], \\ j_v = -Ia(h^2 + a^2)^{-1} - (\sigma v B_0 - \beta A) [N + h^2(a^2 + h^2)^{-1}] + \beta DM, \quad (5)$$

где

$$M = \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{ch} \omega h x - \cos \omega a x}{\operatorname{ch} \omega h (x+a) - \cos \omega a (x+a)} e^{-\omega a h},$$

$$N = \frac{1}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega ax}{e^{\omega h|x|} - \cos \omega ax} + \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega a(x+a)}{e^{\omega h|x+a|} - \cos \omega a(x+a)} \right),$$

$$D = -[\sigma v B_0 h^2 + I(2a - \beta h)] / 2(h^2 + a^2); Ah = I + Da.$$

В приведенных формулах принято  $\omega = 2\pi(h^2 + a^2)^{-1}$ .

Окончательные выражения для  $x$ - и  $y$ -составляющих плотности тока даны с учетом двух обстоятельств. Первое,  $j_{x,y}(x, 0) = j_{x,y}(x+a, h)$ , поэтому структура токов представлена только для  $y=0$ . Плотность тока на электродной стенке при  $y=h$  имеет аналогичную функциональную зависимость, сдвинутую по оси  $x$  на величину наклона рамок  $a$ , т. е. в формулы вместо  $x$  следует подставить  $(x+a)$ . Второе, токи, обусловленные неоднородностью магнитного поля, быстро затухают, поэтому приведено распределение токов только на входном участке канала, исключены слабые, учитывающие взаимное влияние концевых участков генератора. Таким образом, при заданном токе нагрузки генератора  $I$  легко находятся токи на электродах и после интегрирования с привлечением закона Ома потенциальная картина поля в канале.

Анализ полученных результатов показывает, что в зоне скачка магнитного поля образуется вихрь электрического тока, который, как и в случае безэлектродных каналов [6], имеет интегрируемую особенность в точках  $x=0$ ;  $y=0, h$ . Здесь, однако, в силу прямой электрической связи по рамкам канала он вызывает концентрацию токов в зонах  $x=-a, y=0$  и  $x=a, y=h$ . При  $\beta=0$   $j_y$  не имеет подобных особенностей и претерпевает в особых точках лишь разрывы первого рода.

В активной зоне канала, при  $x > 2a$ , плотность тока становится практически постоянной и равной

$$j_x = -\sigma v B_0 \frac{ah}{h^2 + a^2} + I \frac{h + \beta a}{h^2 + a^2},$$

$$j_y = -\sigma v B_0 \frac{h^2}{h^2 + a^2} + I \frac{\beta h - a}{h^2 + a^2}.$$
(6)

При этом, естественно, удовлетворяется присущее рамочным каналам условие

$$E_x a + E_y h = 0. \quad (7)$$

На первый взгляд, может показаться странной независимость  $y$ -составляющей плотности тока и, значит, токов в рамках в центральной зоне канала от величины тока нагрузки генератора  $I$  при выборе наклона рамок  $a/h = \beta$  и, в частности, при идеальном ( $h/a = \beta$ ) наклоне, если  $\beta = 1$ . Между тем это действительно так, поскольку из закона Ома с учетом (7) для значений  $\beta = a/h$  следует

$$j_y = -\frac{\sigma v B_0}{1 + \beta^2} \left[ 1 - \frac{E_y}{vB} \left( 1 - \frac{\beta h}{a} \right) \right] \rightarrow \frac{\sigma v B_0}{1 + \beta^2} \rightarrow \frac{\sigma v B_0 h^2}{h^2 + a^2}$$

что соответствует (6).

Распределение токов в канале холловского генератора определяется полученными формулами, если положить в них  $a=0$ .

На рис. 2, а, б показаны распределения  $x$ - и  $y$ -составляющих плотности тока, отнесенных к  $\sigma v B_0$ , на катодной ( $y=0$ ) стенке канала. Они рассчитаны по найденным зависимостям для случая  $a/h=1$ . Начало координат совпадает с точкой скачка магнитного поля в канале. Кривая 1 дает распределение токов при  $\beta=0$  и  $I=0$ , т. е. в режиме холостого хода генератора. Кривые 2-4 описывают характер изменения плотности тока при параметре Холла  $\beta=1$  соответственно в режимах холостого хода генератора  $I=0$ , оптимальной нагрузки  $I = \sigma v B_0 h/2$  (когда в центральной зоне канала  $x$ -составляющая плотности тока равна нулю) и идеальной

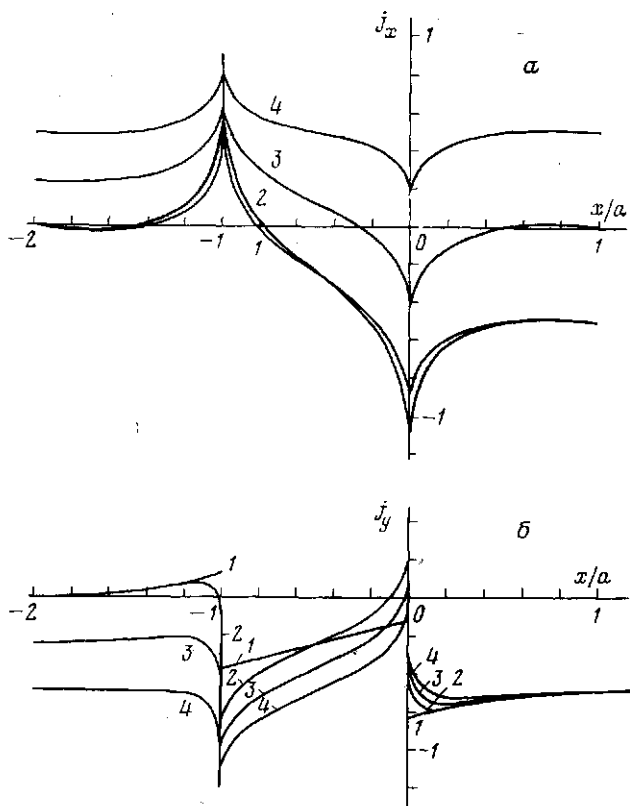


Рис. 2

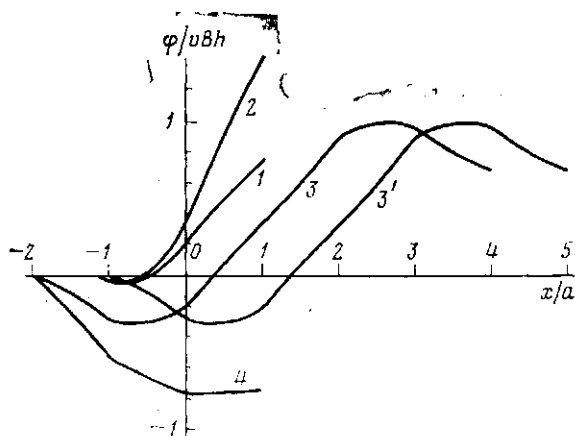


Рис. 3

короткого замыкания  $I = \sigma v B_0 h$  (когда в центральной зоне канала  $x$ -составляющая напряженности электрического поля равна нулю). Приведенные кривые иллюстрируют появление в рамках канала дополнительных контуров тока, вызванных неоднородностью магнитного поля в концевых зонах:  $x$ -составляющая плотности тока изменяется от постоянных значений на участках  $x < -a$  до  $x > 0$  в общем-то монотонно с логарифмическими особенностями в точках  $x = -a$ ,  $x = 0$ . Характер распределения  $y$ -составляющей плотности тока показывает, что ток нагрузки обтекает вихрь тока в зоне скачка магнитного поля по рамкам канала, вызывая увеличение тока в рамках при  $-a < x < -0,5a$  на катодной стенке канала

и, следовательно, при  $0 < x < 0,5a$  на анодной стенке с соответствующим уменьшением его на участке  $-0,5a < x < 0$ . В активной зоне канала  $y$ -составляющая плотности тока принимает постоянные значения в широком диапазоне изменения нагрузки от режимов холостого хода вплоть до короткого замыкания. Таким образом, противодействие электрических токов в плазме не меняется (без учета процессов в концевых участках) с нагрузкой генератора. При этом лишь возникают поперечные усилия, вызванные продольным током, прижимающие поток к анодной стенке в режиме холостого хода и к катодной — при коротком замыкании. Такая ситуация, однако, имеет место только при  $\beta=1$ . При других значениях параметра Холла, например  $\beta=2$  и, естественно, при наклоне рамок канала  $h/a=2$ , с ростом тока нагрузки генератора  $y$ -составляющая плотности тока, согласно (6), возрастает от  $-0,8\sigma v B_0$  в режиме холостого хода до  $-0,2\sigma v B_0$  в режиме короткого замыкания генератора, и, наоборот, убывает от  $-0,2\sigma v B_0$  до  $-0,8\sigma v B_0$  при  $\beta=0,5$  и согласованном наклоне рамок  $h/a=0,5$ . Такой характер изменения  $y$ -составляющей плотности тока в канале в зависимости от нагрузки может привести при  $\beta > 1$  к неустойчивому режиму работы серийных генераторов.

Неограниченное возрастание на отдельных участках канала продольных токов может повлечь к резкому увеличению в особых точках напряжения между соседними рамками и привести к последовательному закоорачиванию их по всей длине канала. На рис. 3 приведена потенциальная картина поля на катодной стенке входной зоны канала, рассчитанная по формуле

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = E_x = \frac{j_x}{\sigma} + \frac{\beta j_y}{\sigma} \quad (8)$$

при  $a/h=1$  в различных режимах работы генератора и величинах параметра Холла. Как и прежде, начало координат совмещено с точкой скачка магнитного поля, а нулевым принят потенциал рамки, удаленной от катодной стенки ( $y=0$ ) от скачка поля на расстояние  $x=-2a$ . На рис. 3 кривая 1 дает распределение потенциала на катодной стенке канала в режиме холостого хода при  $\beta=0$ , кривая 2 — при  $\beta=1$ . Потенциалы рамок в режиме оптимальной нагрузки ( $j_x=0$  в центральной зоне канала) при  $\beta=1$  меняются на катодной стенке согласно кривым 3 и на анодной — 3', причем для наглядности кривые дополнены распределением потенциалов на выходном участке канала с длиной  $l=3a$ . При большей длине канала напряжение генератора линейно возрастает на величину  $\Delta U = -E_x(l-3a)$ , которая легко определяется при учете (6) и (8). Потенциалы рамок в режиме короткого замыкания ( $E_x=0$ ) центральной зоны канала и  $\beta=1$  распределяются в соответствии с кривой 4.

Проведенные расчеты показывают, что интегрируемые особенности токов не приводят к заметному превышению напряжений между рамками в зоне скачка магнитного поля по сравнению с напряжениями в активной зоне. Отклонения будут еще меньше в случае непрерывного изменения магнитного поля в концевых зонах, что обычно имеет место в реальных каналах. В режиме оптимальной нагрузки максимальное напряжение генерируется между рамками канала, размещенными по катодной стенке на расстоянии  $0,8a$  от скачка магнитного поля на входе и  $l-0,2a$  — на выходе, т. е. между рамками, размещенными в основном за пределами магнитного поля. В случае медленного убывания поля максимальное напряжение будет генерироваться между рамками, еще более удаленными в область неоднородного поля. Используя это, можно несколько увеличить мощность генератора. Проведенные расчеты показывают также, что потенциалы рамок при  $-a < x < 0$  на катодной и при  $0 < x < a$  на анодной стенках в режиме оптимальной нагрузки меняются незначительно, поэтому их можно было бы выполнить в виде сплошного электрода, как это предусматривалось, например, в [1, 2], и прийти к серийному гене-

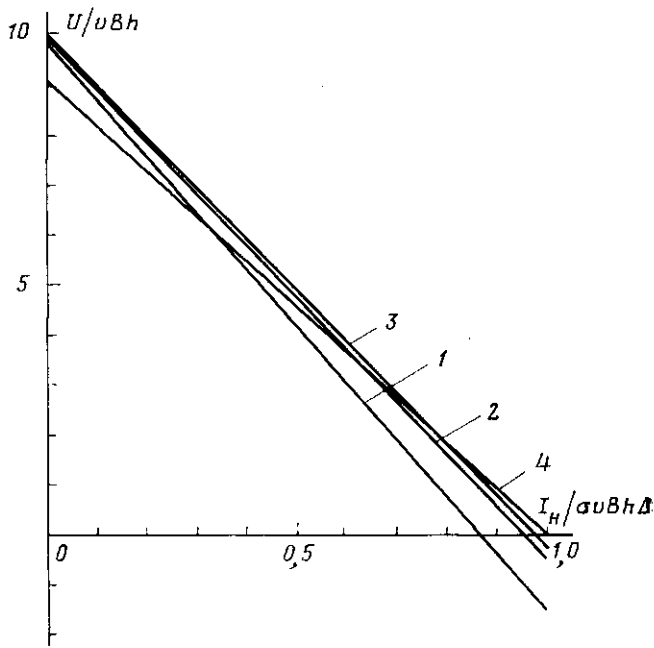


Рис. 4

ратору с одной нагрузкой. Однако приведенные кривые дают лишь принципиальную зависимость распределения потенциалов, с одной стороны, вследствие приближенного характера полученного решения задачи, с другой — из-за допущения скачкообразного изменения магнитного поля в концевых зонах. В реальных установках рамки с максимальной разностью потенциалов и область, в пределах которой потенциалы рамок отличаются незначительно, следует определять экспериментально для каждого заданного тока нагрузки генератора.

На рис. 4 приведены расчетные вольт-амперные характеристики серийного генератора длины  $l=10h$  при  $\beta=1$  и наклоне рамок канала  $h/a=1$ . Характеристики 1–4 соответствуют условиям включения нагрузки между рамками  $a-a'$ ,  $b-b'$ ,  $d-d'$  и  $c-c'$  (рис. 1). Таким образом, наиболее предпочтительным является включение нагрузки между рамками  $d-d'$ , приводящее к уменьшению мощности генератора в сравнении с идеальной расчетной на 4% при коэффициенте нагрузки  $k=0,5$ . Излишне удаленным от активной зоны является включение нагрузки на рамки  $a-a'$ , что приводит к снижению удельной мощности на 15%, и нерациональным можно считать включение нагрузки на рамки  $c-c'$ , приводящее к снижению мощности на 9%. Удовлетворительные характеристики, видимо, может иметь генератор рамочного исполнения с одной нагрузкой, если участки канала  $x < -a$  и  $x > l$  по сечениям  $b$  и  $b'$  выполнить сплошными и подключить к ним нагрузку генератора.

Институт электродинамики  
Академии наук УССР

Поступила в редакцию  
5 XII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. T. Norris, J. B. Peewood. Proc. IEE, 115, 4, 1968.
2. Ф. П. Базаров, Э. Н. Куфа, В. С. Постников. Магнитная гидродинамика, № 2, 1975.
3. Р. Роза. Магнитогидродинамическое преобразование энергии. «Мир», 1970.
4. А. В. Вагажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. «Наука», 1970.
5. Ю. Д. Соколов. Метод осреднения функциональных поправок. «Наукова думка», Киев, 1967.
6. А. К. Григориади, Ю. П. Емец, А. П. Ращепкин. Магнитная гидродинамика, № 3, 1973.