Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Кириченко, В. Тиморин, Самоподобие,
Квант, 2025, номер 2, 20–28

https://www.mathnet.ru/kvant4561

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
12 декабря 2025 г., 15:26:37

Самоподобие

В.КИРИЧЕНКО, В.ТИМОРИН

САМОПОДОБНАЯ СИСТЕМА – ЭТО система, подобная своей части. В этом описании слово «подобие» нужно воспринимать в обобщенном смысле, точнее говоря, нужно допускать различные интерпретации этого понятия. Например, подобие в музыке выражается повторением одной и той же темы в разных тональностях, как в фугах Баха.[1] Самоподобие в изобразительном искусстве возникает, когда на картину помещают уменьшенную копию самой картины. Такой прием называют эффектом Дросте и часто используют на рекламных плакатах (рис. 1). Литография Эшера «Галерея гравюр» – интересный с математической точки зрения образец самоподобия в искусстве.[2] Как только возникает очередная формализация подобия, вместе с ней приобретает смысл и концепция самоподобия.

Мы кратко обсудим все многообразие связанных с самоподобием *математических* понятий и явлений (см. также статьи [3]–[7]), а потом достаточно подробно остановимся на одном конкретном примере.

Рис. 1. Реклама какао Дросте, художник Ян Миссет, 1904 г.

Логика

Лингвистическое самоподобие известно в логике и языкознании как *автореферентность*. Высказывание считается автореферентным, если оно ссылается, явно или неявно, само на себя. Скажем, истинность такого утверждения[3]:

В ЭТОЙ ФРАЗЕ ДВАДЦАТЬ ВОСЕМЬ БУКВ

легко проверить, пересчитав в нем буквы.

Классический пример – *парадокс лжеца*. Человек утверждает следующее: та фраза, которую он произносит в настоящий момент, ложна (коротко: «я лгу»). Здесь автореферентность лежит на поверхности. Этот пример содержит в себе противоречие: допуская по очереди, что приведенное

[1] См. замечательную книгу [1], в которой более подробно обсуждаются самоподобные явления в музыке, искусстве и математической логике.

[2] Математическому смыслу «Галереи гравюр» посвящена статья [2]. На сайте авторов https:/www.math.leidenuniv.nl/smitbde/escherdroste/ размещены анимации, выявляющие самоподобие литографии.

[3] Этот пример мы взяли из статьи [8], где можно найти множество других лингвистических примеров самоподобия.

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20250202

высказывание является правдой или неправдой, мы каждый раз выводим из нашего предположения его противоположность. Вариация парадокса лжеца – история брадобрея (т.е. цирюльника, парикмахера), который бреет всех тех и только тех жителей своей деревни, кто не бреется сам.

Невозможно понять, должен ли он сам при таком подходе бриться. Автореферентность состоит в том, что должностная инструкция брадобрея опирается на представление о группе людей (все те жители деревни, кто не бреется сам), которая может содержать и самого брадобрея, причем описание этой группы явно коррелирует с должностной инструкцией.

Мы видим из этого примера, что автореферентность может приводить к парадоксам. Однако так бывает не всегда. Если Вася говорит «я никогда не говорю правды», то в этом высказывании есть автореферентность, но нет противоречия. Вы можете легко понять, истинно или ложно данное конкретное высказывание. Предположив, что Вася сейчас говорит правду, получим противоречие. В том, что сейчас Вася лжет, никакого противоречия нет, поэтому нам так и следует считать: Вася лжет. Правда, из этого допущения вытекает, что Вася хотя бы раз в жизни сказал или скажет правду. Но у нас нет никаких данных для того, чтобы понять, что именно из сказанного Васей – правда. Может даже так быть, что Вася еще ни разу не сказал правды, но, чтобы мир и логика уцелели, должен совершить этот поступок в будущем... Звучит подозрительно (не правда ли?), когда корректность логической системы зависит от честности Васи.

Однако в математике автореферентность активно используется в позитивном ключе и не приводит к парадоксам. Более того, свободная от парадоксов автореферентность очень часто применяется для доказательства теорем и определения понятий. Важнейший пример: доказательства по индукции. Это метод доказательства, при котором мы предполагаем справедливость некоторого утверждения $P(n)$, зависящего от натурального параметра n, при определенном значении n_0, и выводим это же утверждение для $n = n_0 + 1$. Можно считать, что здесь автореферентность отсутствует: мы выводим $P(n_0 + 1)$ из $P(n_0)$, например $P(2)$ из $P(1)$, а это разные утверждения. Тем не менее, суть доказательства по индукции состоит не в том, чтобы вывести $P(2)$ из $P(1)$, потом $P(3)$ из $P(2)$ и т.д., а в том, чтобы вывести $P(n+1)$ из $P(n)$ сразу для всех n.

А вот это уже автореферентность, потому что, как только n превращается в переменную величину, разница между $P(n+1)$ и $P(n)$ становится очень тонкой. Эта разница, конечно, есть: высказывания $P(n+1)$ и $P(n)$ не совпадают; они именно что *подобны*. Но если вы попытаетесь объяснить суть доказательства по индукции своему младшему брату или сестре, то вполне можете столкнуться с таким вопросом. Почему нельзя чисто логически вывести утверждение $P(n+1)$ из $P(n)$, просто заменив n на $n + 1$ в предположении индукции? Ведь n – это любое число! Первый автор прекрасно помнит, как в детстве мучила этим вопросом свою маму, когда та рассказывала дочке о методе математической индукции.

Свободная от парадоксов автореферентность также часто применяется в алгоритмах и компьютерных программах под именем *рекурсии*. Например, один из алгоритмов в известной игре «Ханойская башня» состоит в повторении подобных друг другу процедур ([9]). Процедуры на разных шагах не совпадают буквально – в каждой задействовано разное количество колец. С каждым шагом количество затронутых процедурой колец уменьшается на один, поэтому весь процесс рано или поздно заканчивается. Чисто математический пример рекурсии – классическое определение последовательности Фибоначчи f_n с помощью рекуррентного соотношения $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ и начальных условий $f_0 = f_1 = 1$.

Алгебра и теория чисел

Уравнение относительно неизвестной величины x по сути представляет собой неявное описание этой величины. Как правило, x встречается в уравнении более

одного раза (уравнения типа $\sqrt{x} = 2$ слишком просты). Уравнение относительно x можно интерпретировать как *самоподобное описание* вида $x = f(x)$, где $f(x)$ – некоторая функция от x. Вот конкретный пример:

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

С одной стороны, можно легко свести его к квадратному уравнению на x, а потом воспользоваться известной формулой для корней квадратного уравнения. Читатель проделает это самостоятельно, а мы этих формул писать не будем. С другой стороны, можно подставить вместо x в правой части саму эту правую часть (раз она равна x, что и утверждает уравнение):

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Продолжая этот процесс, приходим к бесконечному выражению, называемому *цепной дробью*. Нужно, конечно, уточнить, в каком смысле это бесконечное выражение может представлять или не представлять конкретное число (мы этого делать не будем). Заметим, однако, что любое рациональное число представляется конечной цепной дробью. Таким образом, наличие бесконечной цепной дроби для x свидетельствует о том, что число x иррационально. Вот примерно так можно выводить содержательные математические следствия из самоподобия.

Цепные дроби тесно связаны с так называемым *алгоритмом Евклида*. Этот алгоритм придумал Евдокс (ученик Платона), а Евклид просто записал результаты Евдокса, включив их в свой знаменитый учебник «Начала». Изначальная и самая непосредственная цель алгоритма: для данных величин a и b (будем про них думать как про положительные действительные числа, хотя концептуально это отличается от оригинального подхода Евдокса) понять, являются ли они *соизмеримыми*, т.е. можно ли найти такую величину c, которая послужит общей единицей измерения для a и b так, что и a, и b окажутся целыми кратными величины c. Возьмем неупорядоченную пару $\{a, b\}$ и построим новую пару следующим образом. Будем считать, что $a < b$ – это предположение не ограничивает общности, поскольку пара неупорядоченная. Новая пара тогда будет состоять из величин $b - a$ и a. Это шаг алгоритма Евклида; его нужно повторять до тех пор, пока в очередной паре не окажутся совпадающие величины. В этот момент алгоритм заканчивается: если последняя пара равна $\{c, c\}$, то c и есть общая единица измерения для a и b.

Если a и b соизмеримы, то алгоритм Евклида закончится за конечное число шагов. Таким образом, если действие алгоритма продолжается до бесконечности, то величины a и b несоизмеримы. Пусть, например, после одного или нескольких шагов алгоритма мы получили пару $\{a_1, b_1\}$, подобную исходной паре, т.е. такую, что $b_1/a_1 = b/a$. Сделаем еще столько же шагов и получим пару $\{a_2, b_2\}$, подобную парам $\{a_1, b_1\}$ и $\{a, b\}$. Фактически, шаги алгоритма Евклида начинают повторяться, только в меньшем масштабе. Таким образом, процесс никогда не остановится.

В случае описанного самоподобия алгоритма Евклида можно заключить, что a и b несоизмеримы. Именно таким способом пифагорейцы доказали, что сторона квад-

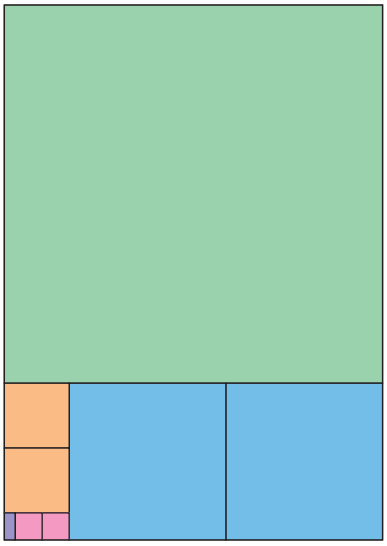

Рис. 2. Самоподобное описание прямоугольника формата А4

рата несоизмерима с его диагональю (и тем самым опровергли изначальный тезис своего учителя о том, что все на свете можно описать при помощи натуральных чисел – тезис пришлось модифицировать).

У приведенного примера имеется геометрическая интерпретация. Возьмите обычный лист бумаги формата А4. Отрежьте от него квадрат так, чтобы сторона квадрата совпала с меньшей из сторон листа (рис. 2). Получится узкая полоска бумаги, от которой таким способом можно отрезать уже не один, а два квадрата. А после этого увидите самоподобие: оставшаяся маленькая узкая полосочка будет подобна (в смысле евклидовой геометрии) предыдущей узкой полоске. Длинная сторона листа формата А4 относится к короткой стороне (примерно) как $\sqrt{2}$ к 1 (подробнее см. в [10]). Геометрический процесс с отрезанием квадратов приводит к самоподобному описанию величины $\sqrt{2}$.

Комбинаторика

Двоичные, или *бинарные*, *слова* – это конечные последовательности из нулей и единиц, т.е. те слова, которые «понятны» широким массам компьютерных процессоров. Нетрудно написать компьютерную программу, которая получает на входе двоичное слово и осуществляет подстановку

$$0 \mapsto 01, \quad 1 \mapsto 0,$$

т.е. вместо каждого нуля подставляет комбинацию двоичных символов 01, а каждую единицу заменяет нулем. Такая подстановка называется *подстановкой Фибоначчи*, и скоро будет понятно почему. Начнем с двоичного слова 0, т.е. со слова, состоящего из одного нуля. Применяя подстановку Фибоначчи к этому слову несколько раз, получаем следующие слова:

$$0 \mapsto 01 \mapsto 010 \mapsto 01001 \mapsto 01001010 \mapsto \ldots$$

Можно заметить несколько закономерностей и доказать их по индукции. Во-первых, каждое слово полученной последовательности является начальным фрагментом следующего за ним слова. Даже более того: следующее слово получается как *конкатенация* текущего слова и предыдущего слова, т.е. если слово, выписанное на n-м месте, обозначить через w_n, то слово w_{n+1} получается из w_n дописыванием слова w_{n-1} справа. Отсюда сразу же вытекает, что количество букв в слове w_n выражается последовательностью Фибоначчи:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 3 = 2 + 1,$$
$$f_4 = 5 = 3 + 2,\ f_5 = 8 = 5 + 3, \ldots$$

Поскольку w_n при $n < m$ является начальным фрагментом в w_m, имеется бесконечное вправо слово, т.е. бесконечная последовательность α из нулей и единиц, такая, что каждое w_n встречается в качестве начального отрезка этой последовательности. *Самоподобие* последовательности α состоит в том, что $s(\alpha) = \alpha$, где s – подстановка Фибоначчи. Другими словами, если в последовательности α заменить каждый ноль словом 01, а каждую единицу заменить нулем, то в результате получится та же самая последовательность. Бинарные последовательности с такого рода самоподобием часто возникают в динамических системах, как мы еще увидим ниже.

Геометрия

Подобие в геометрии, пожалуй, богаче всего математическим и визуальным содержанием. Как мы уже упоминали, геометрическое самоподобие вдохновляет художников на создание произведений искусства с интересным математическим подтекстом. Самоподобные фигуры часто называют *фракталами*.

Вот один из простейших примеров фракталов. Для его описания нам потребуется следующая терминология: *замкнутым треугольником* будем называть треугольник, рассматриваемый вместе с границей и внутренностью; если же речь пойдет только про внутренность треугольника, то так и будем писать. Начнем с замкнутого треугольника. Выкинем из него внутренность треугольника с вершинами в серединах всех сторон исходного треугольника. Останутся три замкнутых треугольника, каждый из которых подобен исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Повторим эту процедуру

для каждого из трех оставшихся замкнутых треугольников: останется девять замкнутых треугольников. И так далее. У нас теперь есть описание бесконечного процесса, в частности, бесконечного множества внутренностей треугольников, которые нужно выкинуть. Выкинув все эти внутренности одновременно, мы получим очень дырявое множество точек плоскости, которое называется *треугольником Серпинского*.

Треугольник Серпинского обладает самоподобием. А именно, в нем помещается три уменьшенных копии самого этого треугольника; при этом каждая из копий в два раза меньше исходной фигуры. Если предположить, что треугольник Серпинского имеет площадь S, то площадь каждой из трех уменьшенных копий должна составлять $\frac{1}{4}S$ (при уменьшении масштаба в два раза площади уменьшаются вчетверо), и мы получаем уравнение $S = \frac{3}{4}S$, из которого вытекает, что $S = 0$. Таким образом, площадь должна быть нулевой просто потому, что она неправильно масштабируется. Иначе говоря, площадь не является подходящей мерой для треугольника Серпинского. Можно, однако, вообразить себе подходящую меру, которая при уменьшении фигуры в два раза (т.е. при сжатии фигуры, когда все расстояния делятся пополам) умножается не на $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, а на $\left(\frac{1}{2}\right)^d$ для некоторого положительного $d > 0$, которое еще нужно подобрать. Поскольку треугольник Серпинского составлен из трех копий, каждая в два раза меньше оригинала, подходящая мера S треугольника Серпинского равна $3\left(\frac{1}{2}\right)^d S$. В этом случае равенство $S = 3\left(\frac{1}{2}\right)^d S$ окажется возможным для конечного положительного значения величины S. Это значит, что $d = \log_2 3$. Число d, которое отвечает за масштабирование подходящей меры, называется *размерностью* фигуры. Размерность треугольника Серпинского, таким образом, равна иррациональному числу между 1 и 2.

Динамические системы

До сих пор мы обсуждали очень общие вещи на общеизвестных примерах. Пример в этом разделе носит более специальный характер, но по этой причине снижается вероятность того, что вы его уже где-то видели. Многие классические головоломки, такие как танграм, стомахион или пентамино, основаны на следующем принципе. Имеется форма в виде многоугольника и ее замощение несколькими многоугольными кусочками. Для начала кусочки нужно вытащить и перемешать, а потом попытаться составить из них исходную фигуру. Иногда это можно сделать несколькими способами.

Если имеется два разных способа составить одну и ту же фигуру Δ из одинаковых кусочков, то мы можем определить отображение f фигуры в себя. Возьмем точку p из Δ и отметим, какая точка какого куска первого замощения совпала с p. Затем этот кусок первого замощения нужно переместить в то положение, которое он занимает во втором замощении; вместе с куском переместится и точка. Конечное положение точки обозначим через $f(p)$.

На рисунке 3 представлен пример подобного отображения. Пусть Δ – это прямоугольный равнобедренный треугольник ABC;

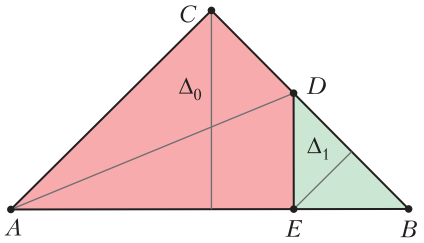

Рис. 3. Части Δ_0, Δ_1 треугольника Δ, на которых отображение f действует как движения плоскости

он симметричен относительно высоты, опущенной на гипотенузу из вершины C. Отрезок DE, разбивающий треугольник на две части и перпендикулярный (в точке E) гипотенузе AB, выбран так, чтобы обе части имели осевую симметрию. Заметим, что треугольник $\Delta_1 = DEB$ в любом случае подобен всему треугольнику Δ и по этой

причине имеет осевую симметрию автоматически. А вот четырехугольник $\Delta_0 = ACDE$ будет симметричен относительно диагонали AD только при специальном выборе точки D – как именно ее нужно выбрать, вы легко разберетесь.

Замечание. Разбиение треугольника Δ на симметричный четырехугольник Δ_0 и треугольник Δ_1, подобный треугольнику Δ, дает особенно простое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$ через самоподобие. Обозначим через a и b, соответственно, гипотенузу и катет треугольника Δ. Тогда несложно убедиться, что гипотенуза и катет треугольника Δ_1 равны $2b - a$ и $a - b$ соответственно. Поэтому если стороны треугольника Δ имеют общую меру, или общую единицу измерения $c > 0$, т.е. c укладывается целое число раз как в a, так и в b, то эту же общую меру имеют и стороны меньшего треугольника Δ_1. Теперь проделаем все те же построения и рассуждения с треугольником Δ_1 вместо Δ. Продолжая процесс, мы получим бесконечную последовательность подобных треугольников, длины сторон которых стремятся к нулю, поэтому не могут иметь никакой общей меры.[4]

Вернемся к динамике. Обозначим через v_0, v_1, соответственно, преобразования кусков Δ_0, Δ_1, осуществляющие их осевую симметрию. Через u мы обозначим преобразование осевой симметрии для всего треугольника Δ. Теперь заметим, что преобразование $u \circ v_1$ (состоящее в том, что мы сначала применяем v_1, а потом u) является вращением треугольника Δ_1 относительно некоторой точки (найдите эту точку!). Аналогичным образом $u \circ v_0$ совпадает с некоторым вращением четырехугольника Δ_0.

Рассмотрим отображение f, которое на Δ_0 действует как $u \circ v_0$, а на Δ_1 как $u \circ v_1$. Это отображение перекладывает два куска Δ_0, Δ_1 треугольника Δ, как в пазле. Заметим, что f определено всюду на Δ, кроме отрезка DE, являющегося общей стороной для Δ_0 и Δ_1. Теперь – и это концептуально важный шаг – будем смотреть на f как на *динамическую систему*, т.е. будем применять это отображение много раз. Начнем с какой-нибудь точки p, лежащей в Δ, но не на отрезке DE. Применим к этой точке отображение f, получим точку $f(p)$. Если $f(p)$ снова не попала на отрезок DE, то мы можем применить наше отображение еще раз и получить точку $f^2(p) = f(f(p))$ и так далее – процесс можно продолжать до тех пор, пока очередная точка не окажется на отрезке DE, а если этого не случится никогда, то процесс можно продолжать до бесконечности. В частности, $f^m(p)$ обозначает результат m-кратного применения отображения f к точке p. Последовательность $p, f(p), f^2(p), \ldots, f^m(p), \ldots$ называется *орбитой* точки p. Орбиты могут быть конечные и бесконечные, в зависимости от того, все ли итерации определены. Кроме того, часто продолжают указанную последовательность влево, добавляя точки $\ldots$, $f^{-2}(p)$, $f^{-1}(p)$, полученные как итерации обратного отображения f^{-1}, примененные к p, и считают орбитой всю – возможно, бесконечную в обе стороны – расширенную последовательность.

Точка p называется *периодической периода* m, если все итерации $p, f(p), f^2(p), \ldots$ $\ldots, f^m(p)$ определены, причем $f^m(p) = p$. Интересное свойство рассматриваемого перекладывания состоит в наличии точек сколь угодно большого периода. Более того, периодические точки образуют интересное самоподобное множество, состоящее из восьмиугольников (рис. 4). Все эти восьмиугольники подобны друг другу (в обычном геометрическом смысле), но могут иметь сколь угодно маленький размер. Точки, для которых определены все итерации отображения f, но которые при этом не

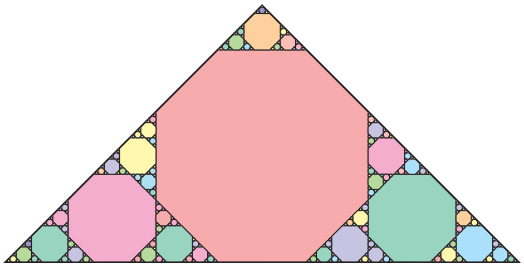

Рис. 4. Периодические области образуют самоподобную, фрактальную, фигуру

[4] Это доказательство мы позаимствовали из статьи [11].

являются периодическими точками, называются *апериодическими*. Наконец, те точки, для которых не все итерации определены, т.е. которые после нескольких итераций попадают ровно на границу между кусками Δ_0 и Δ_1, а именно на отрезок DE, называются *граничными*. Все точки треугольника Δ тем самым классифицируются как периодические, апериодические и граничные.

Укажем одну периодическую, и даже неподвижную, точку p_0. Это точка, в которой ось симметрии четырехугольника Δ_0 пересекает ось симметрии треугольника Δ. Такая точка, в силу своего определения, должна быть неподвижной как относительно v_0, так и относительно u, а следовательно, $f(p_0) = u(v_0(p_0)) = p_0$. Более того, на все точки, близкие к p_0, отображение f действует как вращение вокруг p_0; угол вращения равен удвоенному углу между осями отражений v_0 и u. Итак, вокруг точки p_0 имеется некоторая область U_0, которая поворачивается вокруг p_0 под действием f и таким образом переходит в саму себя. Можно показать, что U_0 – восьмиугольник, вписанный в Δ.

Чтобы точно описать динамическое самоподобие отображения f, нам понадобится определение отображения первого возвращения. Вообще говоря, можно определять отображение первого возвращения в произвольную фигуру Q, но мы ограничимся случаем, когда Q – многоугольник, являющийся частью треугольника Δ.

Определение 1. Пусть орбита точки q из Q *вернулась* в Q через время t, т.е. оказалось, что точка $f^t(q)$ снова лежит в Q. В данном случае время t – это целое положительное число. Минимальное такое t называется *временем первого возвращения* точки q в область Q; обозначим это время через t_q.

А если никакого t с данным свойством не существует, по положим $t_q := \infty$.

Определение 2. *Отображением первого возвращения* в Q называется отображение $\mathcal{R}_Q f$, переводящее точку q в точку $f^{t_q}(q)$.

Вообще говоря, это отображение определено не везде в Q, а только на тех точках q, для которых $t_q < \infty$. Может так случиться, что орбита точки q выпадает из области определения отображения f, т.е. оказывается на отрезке DE еще до того, как вернуться в Q, – такие точки q обязаны быть граничными. Еще, теоретически, может случиться так, что вся орбита точки q определена, но никогда не возвращается в Q.

Попробуйте найти отображение первого возвращения в Δ_1. Для этого вам нужно взять бумагу и нарисовать несколько картинок. Никаких формул можно не писать. Поскольку f действует как $u \circ v_1$ на треугольнике Δ_1, то он при первой итерации отображения f переходит в симметричный ему треугольник $u(\Delta_1)$. Вторая итерация действует в два шага, сначала отправляя $u(\Delta_1)$ в $v_0 \circ u(\Delta_1)$, а потом – в $u \circ v_0 \circ u(\Delta_1)$. И тем самым на второй итерации существенный кусок треугольника Δ_1 вернется в этот треугольник. Этот существенный кусок – четырехугольник, подобный куску Δ_0. От Δ_1 останется только маленький треугольник, который вернется в Δ_1 не на второй итерации, а на пятой (рис. 5, но прежде читателю рекомендуется попытаться самостоятельно нарисовать картинки и понять, как части треугольника Δ_1 возвращаются в Δ_1).

Если вы уже нарисовали картинки и тем самым представили себе, как выглядит отображение первого возвращения $f^* := \mathcal{R}_{\Delta_1} f$, то дальнейшее описание вам ничего нового уже не скажет. Все же приведем это описание, чтобы зафиксировать обозначения. Треугольник Δ_1 разбивается на две части, которые мы будем обозначать через Δ_0^* и Δ_1^*. Кусок Δ_0^* является симметричным четырехугольником, он возвращается в Δ_1 на второй итерации. А кусок Δ_1^* является прямо-

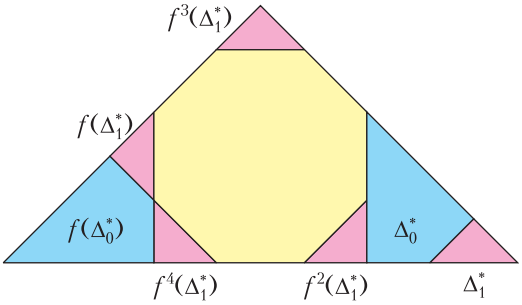

Рис. 5. Итерации отображения f

угольным равнобедренным треугольником, и он возвращается на пятой итерации. Таким образом, f^* совпадает с f^2 на Δ_0^* и с f^5 на Δ_1^*. Отрезок, отделяющий Δ_0^* от Δ_1^*, состоит из граничных точек, и на этом отрезке f^* не определено. Это полное описание отображения первого возвращения.

Вот что интересно: разбиение треугольника Δ_1 на два куска Δ_0^*, Δ_1^* подобно (в смысле обычной евклидовой планиметрии) разбиению треугольника Δ на Δ_0, Δ_1. Обозначим через h соответствующее преобразование подобия, т.е. такое преобразование плоскости, которое все расстояния уменьшает в одно и то же число раз и которое удовлетворяет равенствам

$$h(\Delta) = \Delta_1,\ h(\Delta_0) = \Delta_0^*,\ h(\Delta_1) = \Delta_1^*.$$

Это преобразование мы уже фактически использовали выше, когда доказывали иррациональность $\sqrt{2}$ через цепочку треугольников Δ, $h(\Delta)$, $h^2(\Delta)$,... Подобие h не только связывает геометрию двух разбиений, оно же связывает динамику отображения f с динамикой отображения f^*. А именно, имеет место формула

$$f^* = h \circ f \circ h^{-1},$$

в которой h^{-1} означает обратное отображение к h. Формулу следует читать так: чтобы понять, как отображение f^* действует на Δ_1, переведем Δ_1 в Δ отображением h^{-1} (тем самым увеличив масштаб), потом применим f, затем вернемся обратно в масштаб треугольника Δ_1 отображением h. Все, что происходит в большем масштабе с треугольником Δ под действием отображения f, происходит и в меньшем масштабе с Δ_1 под действием f^*.

Самоподобие помогает установить связь между динамикой отображения f и подстановками. Для этого нам понадобится определение маршрута.

Определение 3. Рассмотрим точку $p \in \Delta$. Если точка p лежит в Δ_0 (соответственно, в Δ_1), то назовем *адресом* точки p символ 0 (соответственно, 1). У точек на отрезке DE адреса нет.

Определение 4. Если у точек p, $f(p)$, $f^2(p)$,... (это может быть конечная или бесконечная последовательность) есть адреса, то последовательность этих адресов называется *маршрутом* точки x.

Можно говорить про конечные или бесконечные маршруты. Бесконечные маршруты возможны только для неграничных точек.

Неподвижная точка p_0 имеет маршрут 0^∞ (бесконечная последовательность из нулей). Нетрудно убедиться в том, что точка $h(p_0)$ имеет маршрут $(10)^\infty$ (последовательность 10, повторенная бесконечно много раз). В самом деле, маршрут 10 возвращает четырехугольник Δ_0^* обратно в Δ_1, а точка $h(p_0)$ при этом возвращается на место, поскольку отображение h вообще обязано переводить неподвижные точки отображения f в неподвижные точки отображения f^*. Далее, рассмотрим точку p с произвольным маршрутом $\alpha_0\alpha_1\ldots$; здесь α_i – это символы 0 или 1. Чему равен маршрут точки $h(p)$? Из самоподобия вытекает, что маршрут точки $h(p)$ относительно f^* совпадает с $\alpha_0\alpha_1\ldots$, т.е. при итерациях отображения f^* точка $h(p)$ попадает в Δ_0^* и Δ_1^* в той же последовательности, в которой точка p попадает в Δ_0 и, соответственно, в Δ_1 при итерациях отображения f. Однако, чтобы преобразовать маршрут относительно f^* в маршрут относительно f, нужно вместо каждого символа f^*-маршрута подставить маршрут соответствующего первого возвращения в Δ_1. Например, адрес 0 в f^*-маршруте означает, что точка орбиты попала в Δ_0^*. Маршрут ее возвращения в Δ_1 равен 10, поэтому вместо 0 нужно подставить 10. Далее, вместо 1 нужно подставить маршрут возвращения точки из Δ_1^* в Δ_1, т.е. 10000. Итак, маршрут точки $h(p)$ получается из маршрута точки p применением подстановки

$$s : 0 \mapsto 10,\ 1 \mapsto 10000.$$

В частности, маршрут точки $h^2(p_0)$ равен $s\left(s\left(0^\infty\right)\right) = (1000010)^\infty$, а значит, эта точка имеет период 7 (маршрут возвращения точки $h^2(p_0)$ в треугольник $\Delta^{**} := h^2(\Delta)$ имеет, очевидно, период 7, а с другой стороны, при возвращении в треугольник Δ^{**} точка сразу же вернется

на место, поскольку она неподвижна относительно отображения первого возвращения в Δ^{**}).

В заключение сформулируем несколько задач для читателей.

Задачи

1. Чему равен период точки $h^n(p_0)$?

2. Слово $s^n(1)$ составляет некоторый начальный фрагмент в $s^{n+1}(1)$. Убедитесь, что найдется такая бесконечная бинарная последовательность ω, для которой $s^n(1)$ является начальным фрагментом для каждого n.

3. Убедитесь в том, что ω из предыдущей задачи – маршрут некоторой апериодической точки. Как найти эту точку в пределах заданной точности?

4. Выкинем из Δ внутренности всех периодических областей. Останется самоподобная фигура. Попробуйте понять, чему равна размерность этой фигуры.

Литература

1. *Д.Хофштадтер*. Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. — Самара: Бахрах-М, 2001.

2. *B. Smit, H. Lenstra.* The Mathematical Structure of Escher's Print Gallery. — Notices of the American Mathematical Society, 2003, vol. 50, n. 4.

3. *И. Соколов*. Фракталы. — «Квант», 1989, №5.

4. *Н. Долбилин*. Игра «Хаос» и фракталы. — «Квант», 1997, №4.

5. *Н. Долбилин*. Самоподобные мозаики. — «Квант», 1998, №2.

6. *Н. Долбилин*. Множества Жюлиа. — «Квант», 2008, №1.

7. *Дж. Х. Конвей, М. С. Патерсон*. Каверзная задача. — Математическое просвещение, 2021, сер. 3, № 28.

8. *С. Табачников*. У попа была собака... — «Квант», 1989, №6.

9. *А. Савин*. Ханойская башня. — «Квант», 1991, №11.

10. *Е. Смирнов*. Арифметика листа бумаги. — «Квантик», 2017, №1.

11. *T.M. Apostol*. Irrationality of The Square Root of Two — A Geometric Proof. — The American Mathematical Monthly, 2000, vol. 107, n. 9.

«КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

Э. Ландау и ученики

Профессор Эдмунд Ландау, автор книги «Основы анализа», ежегодно устраивал банкет для своих дипломников. При этом места для гостей обозначались не по именам или фамилиям, а в виде цитат (формул или иных ярких мест) из дипломных работ, выписанных на специальные карточки.

Один из выпускников очень волновался, что будет написано на его карточке, так как прекрасно понимал, что в его работе ничего толкового сделано не было. Тем не менее, никаких трудностей с определением своего места за столом у него не возникло: одну из карточек Ландау оставил пустой.

Э. Ландау и ферматисты

Профессор был не первым и не единственным математиком, кому приходилось отвечать на назойливые письма людей,

считавших, что им удалось доказать Великую теорему Ферма. Но он оказался первым, кто использовал в такой переписке современные технологии.

Ландау заказал в университетской типографии 500 бланков со следующим текстом: «Уважаемый ...! Благодарю Вас за присланную Вами рукопись с доказательством Великой теоремы Ферма. Первая ошибка находится на стр. ... в строке ...».