ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1993, том 328, № 2.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 621.371:537.312.62

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СВЕРХПРОВОДЯЩИМ ЦИЛИНДРОМ

© 1993 г. В. Ф. Кравченко

Представлено академиком Ю.А. Митропольским 28.09.92 г.

Поступило 09.10.92 г.

1. Используя результаты исследований, проведенных в [1 - 6] и [7], рассмотрим задачу дифракции произвольно падающей плоской волны на бесконечный сверхпроводящий цилиндр. На поверхности цилиндра имеют место сверхпроводящие импедансные краевые условия $\hat{Z}$ [1 - 6]. Характеристики среды не зависят от координаты z, направленной вдоль образующей цилиндра. Через Ω_0 обозначим поперечное сечение цилиндра, ограниченное контуром Γ_0, через Ω-область, внешнюю к Ω_0. Эта краевая задача сводится к определению в области Ω векторов комплексных амплитуд полного электромагнитного поля $\mathbf{E}(x, y, z)$ и $\mathbf{H}(x, y, z)$, удовлетворяющего в области Ω системе уравнений Максвелла [7], а на Γ_0 сверхпроводящим граничным условиям $\hat{Z}$.

Поскольку существуют трудности в случае, когда падающее поле плоской волны зависит от трех координат (x, y, z), а дифрагируемое тело является бесконечным сверхпроводящим цилиндром с конечным импедансом, трехмерную краевую задачу дифракции нельзя свести к двум скалярным двумерным задачам, как это можно осуществить для обычного идеального цилиндра. Поэтому в данной работе будет исследована краевая задача о дифракции поля наклонно падающей плоской волны, зависящего только от двух координат x и y, для случаев E- и H-поляризаций.

2. Предположим, что на бесконечный в направлении оси z сверхпроводящий цилиндр падает плоская E-поляризованная волна вида

$$\mathbf{E}^{\text{пад}}(x, y) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\alpha_0 x + i\beta_0 y), \qquad (1)$$
$$\mathbf{H}^{\text{пад}}(x, y) = \mathbf{H}_0 \exp(-i\alpha_0 x + i\beta_0 y),$$

где $\alpha_0 = k\cos\theta$, $\beta_0 = k\sin\theta$, θ – угол между направлением распространения плоской волны и отрицательным направлением оси x; $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ – комплексные амплитуды падающей волны. Поскольку падающее поле и форма объекта не зависят от координаты z, то полное и рассеянное поля также не зависят от координаты z.

Научно-исследовательский институт точных приборов, Москва

Полное поле $\mathbf{E}(x, y)$ и $\mathbf{H}(x, y)$ является решением системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(x, y) - i\,\omega\,\mu\,\mathbf{H}(x, y) = 0,$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(x, y) + i\,\omega\,\varepsilon\,\mathbf{E}(x, y) = 0, \qquad (2)$$

удовлетворяет сверхпроводящему импедансному граничному условию

$$[\mathbf{n}\,\mathbf{E}] = -\hat{Z}\,[\,\mathbf{n}\,[\mathbf{n}\,\mathbf{H}]\,], \qquad (3)$$

где $\hat{Z}$ имеет тот же физический смысл, что и в [1 - 6], $\mathbf{n}$ – нормаль, внешняя к области Ω, а также удовлетворяет условиям излучения на бесконечности. Следовательно, согласно утверждениям, сделанным в [7, 8], решение краевой задачи (1 - 3) существует и единственно.

3. Основываясь на некоторых результатах [9 - 12], рассмотрение решения краевой задачи сводим к случаям E- и H-поляризаций. Для случая E-поляризации компоненты векторов $\mathbf{E}(x, y)$ и $\mathbf{H}(x, y)$ электромагнитного поля выражаются через $E_z(x, y) = \psi(x, y)$ следующим образом:

$$E_x(x, y) = E_y(x, y) = H_z(x, y) = 0, \qquad (4)$$

$$H_x(x, y) = -\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y},\; H_y(x, y) = \frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x},$$

причем $\psi(x, y)$ удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta\psi(x, y) + k^2\psi(x, y) = 0. \qquad (5)$$

Граничные условия (3), используя тождество для двойного векторного произведения, преобразуем к виду, с помощью которого устанавливается связь между $\psi(x, y)$ и $\partial\psi(x, y)/\partial n$.

После замены E_z, H_x, H_y через функцию $\psi(x, y)$ и ее производные, а также пользуясь формулой (4), предыдущее соотношение запишем в виде

$$\psi(x, y) = -\frac{\hat{Z}}{\omega\mu}\left(\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}n_x + \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}n_y\right) = -i\frac{\hat{Z}}{\omega\mu}\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial n}. \qquad (5)$$

В (6) учтено, что $n_x^2 + n_y^2 = 1$. Как следует из (6), граничные условия (3) для E-поляризованого поля имеют вид граничных условий третьего рода:

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial n} = \frac{i\omega\mu}{\hat{Z}}\psi(x, y). \qquad (7)$$

Если ввести импеданс свободного пространства Z, то (7) можно записать в виде

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial n} = ik\frac{Z}{\hat{Z}}\psi(x, y), Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}, \qquad (8)$$

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu.$$

Таким образом, векторная задача дифракции для рассматриваемого случая свелась к скалярной двумерной задаче дифракции с граничными условиями третьего рода на поверхности сверхпроводящего цилиндра.

4. В случае H-поляризации компоненты векторов $\mathbf{E}(x, y)$, $\mathbf{H}(x, y)$ электромагнитного поля удовлетворяют системе уравнений Максвелла (2) и выражаются через $H_z(x, y) = \psi(x, y)$ аналогично тому, как это сделано в п. 3:

$$H_x(x, y) = H_y(x, y) = E_z(x, y) = 0, \qquad (9)$$

$$E_x(x, y) = \frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y}, E_y(x, y) = -\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x},$$

где $\psi(x, y)$ – решение однородного уравнения Гельмгольца (5).

Так же как и для случая E-поляризованого поля, граничные условия (3), связывающие на Γ_0 векторы $\mathbf{E}(x, y)$ и $\mathbf{H}(x, y)$, можно записать для случая H-поляризованного поля в виде скалярных граничных условий третьего рода для $\psi(x, y)$ и $\partial\psi(x, y) / \partial n$. Ввиду того, что

$$\mathbf{E} = \{E_x, E_y, 0\}, \mathbf{H} = \{0, 0, H_z\}, \mathbf{n} = \{n_x, n_y, 0\},$$

получим

$$[\,\mathbf{n}\,\mathbf{E}\,] = \hat{Z}\,\mathbf{H}. \qquad (10)$$

После некоторых операций с формулой (10) запишем соотношение вида

$$\frac{i}{\omega\varepsilon}\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial n} + \hat{Z}\psi(x, y) = 0 \qquad (11)$$

или

$$\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial n} = ik\frac{\hat{Z}}{Z}\psi(x, y). \qquad (12)$$

Следовательно, соотношения вида (8) и (12) являются для соответствующих E- и H-поляризаций решением скалярной двумерной задачи дифракции.

Функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям третьего рода.

5. Следуя [8, 9, 11, 12], получим с помощью формул Грина интегральное уравнение, позволяющее решить задачу о дифракции наклонно падающей плоской волны на сверхпроводящий цилиндр как для E-, так и для H-поляризаций. Согласно [8] полное поле $\psi(x, y)$ представляется в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, имеющих непрерывные плотности распределения:

$$\psi(M) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\left[\frac{\partial\psi(P)}{\partial n}g(M, P) - \psi(P)\frac{\partial g(M, P)}{\partial n_P}\right]d\Gamma_P +$$

$$+ \psi_0(\mathrm{M}), \qquad (13)$$

где $g(M, P)$ – функция Грина свободного пространства. Здесь функция Грина

$$g(M, P) = \frac{i\pi}{2}H_0^{(1)}(kr_{MP}), \qquad (14)$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода.

Для E-поляризации полное поле $\psi(x, y) = E_z(x, y)$, $u_0(x, y) = E_z^{\text{пад}}(x, y)$, а в случае H-поляризации $\psi(x, y) = H_z(x, y)$, $u_0(x, y) = H_z^{\text{пад}}(x, y)$.

В обеих поляризациях

$$u_0(x, y) = \exp(-\mathrm{i}\,\alpha_0 x + i\,\beta_0 y) \qquad (15)$$

при единичной амплитуде падающей волны.

Отметим, что интегральное уравнение для $\psi(P)$ может быть получено в том случае, если точку M опустить на Γ_0, а также учесть непрерывность потенциала простого слоя и разрыв потенциала двойного слоя при переходе через Γ_0, а также граничных условий третьего рода (8), (12). Получаем интегральное уравнение второго рода:

$$\psi_0(M) = 1/2\,\psi(M) + \qquad (16)$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\left[\frac{\partial g(M, P)}{\partial n_P} - i\xi g(M, P)\right]\psi(P)\,d\Gamma_P.$$

Здесь ядро определяется не только функцией Грина свободного пространства, но и ее нормальной производной. Оно также зависит от параметра $i\xi$, имеющего вид

$$\xi = \begin{cases} kZ/\hat{Z}, & E\text{-поляризации} \\ k\hat{Z}/Z, & H\text{-поляризации} \end{cases} \qquad (17)$$

и входящего в граничные условия (8, 12).

Численное решение интегрального уравнения (16) для соответствующей поляризации может быть осуществлено по методикам, изложенным в [13].

6. Таким образом, в работе найден новый более общий подход к решению задачи дифракции электромагнитных волн на сверхпроводящем цилиндре. Задавая конкретные физические параметры, входящие в $\hat{Z}$, можно определять диаграмму

направленности рассеянного поля, эффективный поперечник сечения. Граничное условие (3) переходит в граничное условие Леонтовича–Щукина при $d \gg | \delta |$ на поверхности массивного сверхпроводника, при $d/|\delta| \ll | i k \delta / Z(\omega) | \ll 1$ – в условие Леонтовича–Щукина на поверхности нормального проводящего металла. Здесь обозначения те же, что и в [1, 2]. В предельном случае с учетом граничных условий (3) результаты совпадают с [11, 14, 15]. Заметим, что при определенных физических параметрах сверхпроводящего импеданса $\hat{Z}$ возможно рассмотрение решения задачи дифракции и рассеяния волн на высокотемпературных сверхпроводниках в широком диапазоне частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравченко В.Ф.*// Докл. АН УССР. Сер. А. 1982. №1. С. 63 - 66.
2. *Кравченко В.Ф.*// ДАН. 1989. Т. 309. № 3. С. 594 - 598.
3. *Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Талдыкин И.В.*// ДАН. 1988. Т. 302. № 1. С. 72.
4. *Кравченко В.Ф., Чаплин А.Ф.* // ДАН. 1992. Т. 326. № 2. С. 272 - 275.
5. *Кравченко В.Ф., Чаплин А.Ф.* // ДАН. 1992. Т. 326. № 4. С. 633 - 636.
6. *Кравченко В.Ф., Чаплин А.Ф.* // ДАН. 1992. Т. 327. № 2. С. 208 - 211.
7. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
9. *Дмитриев В.И.* В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1966, Вып.5. С. 253 - 259.
10. *Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., МасаловС.А., Сологуб В.Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во ХГУ, 1973. 287 с.
11. *Галашникова Т.Н., Ильинский А.С.* Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1987. 208 с.
12. *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 295 с.
13. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Справ. пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 543 с.
14. *Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Шейко Т.И.*// ДАН. 1990. Т. 311. № 1. С. 67 - 71.
15. *Гончаренко А.А., Кравченко В.Ф., Пономарев В.И.* Дистанционное зондирование неоднородных сред. М.: Машиностроение, 1991. 256 с.