I. S. Grigoriev, V. A. Yegorov, S. Yu. Ryzhov, Optimization multiple-turn trajectories of interorbital flights of spacecraft,
Keldysh Institute preprints, 2005, 063

https://www.mathnet.ru/eng/ipmp704

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Ордена Ленина

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им. М.В. Келдыша

С.Ю.Рыжов, И.С.Григорьев, $\boxed{\text{В.А.Егоров}}$

ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ КА

Москва — 2005

Аннотация

Рассматриваются задачи оптимального управления многовитковыми перелётами КА между круговыми компланарными орбитами ИСЗ. Управление перелётом КА осуществляется посредством вектора тяги реактивного двигателя ограниченной тяги (РДОТ). Минимизируются затраты массы при ограниченном времени перелёта. Задача оптимального управления решается на основе принципа максимума. В результате численного решения методом стрельбы краевой задачи принципа максимума построены конкретные траектории многовитковых перелётов КА. Выявлены закономерности устройства экстремалей и свойства экстремалей лучшей структуры. Предложена простая схема построения многовитковых траекторий близких к экстремальным, которая позволяет выбирать оптимальные структуры для многовитковых траекторий.

S. Yu. Ryzhov, I. S. Grigoriev, $\boxed{\text{V. A. Egorov}}$

Optimization Multiple–Turn Trajectories of Interorbital Flights of Spacecraft

Abstract

Problems of multiple–turn trajectories optimization of flights between complanar circular orbits of an Earth satellite of a spacecraft equipped with the high limited thrust rocket engine with the thrust vector control are considered. Mass expenditure is minimized during limited flight time. Optimal control problems are solved numerically on the base of the maximum principle. Boundary problems are solved with shooting method. Extreme multiple–turn trajectories are determined. Regularity of construction and attributes of extreme trajectories of the best structure are revealed. The simple scheme of constructing the multiple–turn trajectories near to extreme ones which allows to choose the optimal structures for multiple–turn trajectories is proposed.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04–01–00346).

Решение задачи оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина сводится, как известно [1, 2, 3], к решению краевой задачи (краевой задачи принципа максимума). Как отмечалось в [4, §14 с. 113], наиболее точные и аккуратные численные решения задач оптимального управления связаны именно с решением соответствующих краевых задач принципа максимума. За прошедшие со времени выхода монографии [4] десятилетия справедливость этого утверждения не изменилась, и разработка надежных методов решения краевых задач принципа максимума по-прежнему актуальна.

Составной частью метода стрельбы решения краевой задачи принципа максимума, помимо решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, является решение системы нелинейных алгебраических уравнений для составляющих вектор-функции невязок. Как отмечалось в [5, §1 п.4], успешное применение любых методов нахождения корней систем алгебраических уравнений невозможно без удовлетворительного начального приближения, и именно это, в первую очередь, определяет успех решения краевой задачи в целом.

1. Постановка задачи. Плоское движение центра масс одноступенчатого КА переменной массы с реактивным двигателем ограниченной тяги в центральном ньютоновском гравитационном поле одного притягивающего центра в вакууме при управлении вектором тяги описывается в связанной с притягивающим центром полярной системе координат дифференциальными уравнениями [6]:

$$\begin{gathered}\dot m = -P/C, \quad \dot r = u, \quad \dot\varphi = v/r,\\ \dot u = (P\cos\theta)/m + v^2/r - \mu/r^2, \quad \dot v = (P\sin\theta)/m - uv/r,\end{gathered} \tag{1}$$

где r, φ, u, v — полярные координаты, радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости КА; $m \equiv M/M(0)$ — относительная масса КА; θ — угол между вектором тяги и радиус-вектором, отсчитываемый от положительного направления радиус-вектора в ту же сторону, что и угол φ; $P \equiv g_З n_0$, $g_З = 9.81\,\text{м}/c^2$ — гравитационное ускорение у поверхности Земли, $n_0 \equiv F/(M(0)g_З)$ — начальная тяговооруженность (перегрузка) КА, F — величина реактивной тяги двигательной системы (двигателя) КА, C — скорость истечения реактивной струи (постоянная величина, не зависящая от величины тяги), $C = g_З P_{\text{уд}}$, $P_{\text{уд}}$ — удельная тяга (постоянная величина); $\mu = g_З R_З^2$ — гравитационный параметр Земли, $R_З = 6378.25$км — радиус Земли.

При решении задачи рассматривается математическая модель описания управляемого движения центра масс КА, в которой фазовые переменные $m(t)$, $r(t)$, $\varphi(t)$, $u(t)$, $v(t)$ — непрерывные кусочно-гладкие функции, удовлетворяющие на участках непрерывности управляющих функций (управлений) $P(t)$, $\theta(t)$ системе (1), а функции $P(t)$, $\theta(t)$ — кусочно-непрерывные ограниченные:

$$0 \leq P(t) \leq P_{\max} < \infty, \quad 0 \leq \theta(t) < 2\pi \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{2}$$

В условиях (2) T — конечный момент времени; $P_{\max} \equiv g_З n_{0\max}$, $n_{0\max}$ — максимальное значение начальной тяговооруженности.

В начальный момент времени $t = 0$ КА движется по начальной круговой орбите ИСЗ радиуса R_0 с орбитальной скоростью $V_0 \equiv \sqrt{\mu/R_0}$:

$$m(0) = 1, \quad r(0) = R_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0. \tag{3}$$

В конечный заранее не фиксированный момент времени $t = T$ КА должен двигаться по конечной круговой орбите ИСЗ радиуса R_T с орбитальной скоростью $V_T \equiv \sqrt{\mu/R_T}$:

$$r(T) = R_T, \qquad u(T) = 0, \qquad v(T) = V_T. \tag{4}$$

Минимизируется компромиссный функционал $I_1 \equiv k_T T + k_m(1 - m(T))$ или эквивалентный ему функционал:

$$I \equiv \tau(\, m(\cdot), r(\cdot), \varphi(\cdot), u(\cdot), v(\cdot), P(\cdot), \theta(\cdot), T\,) \equiv k_T T - k_m m(T). \tag{5}$$

Коэффициенты компромисса k_T, k_m ($k_T \geq 0$, $k_m \geq 0$, $[k_T]_{cu} = c^{-1}$, $[k_m]_{cu} = 1$) не обращаются в ноль одновременно: $k_T^2 + k_m^2 > 0$. Использование такого функционала (при различных k_T, k_m) позволяет решать следующие четыре задачи [8, 9]:

- $T \to \inf$ — задача быстродействия при не ограниченной заранее конечной массе $(k_T = 1, k_m = 0)$;

- $T \to \inf, \quad m(T) \geq m^*$ — задача быстродействия при ограниченной конечной массе $(k_T > 0, k_m \geq 0)$;

- $1 - m(T) \to \inf, \quad T \leq T^*$ — задача минимизации затрат массы при ограниченном времени перелёта $(k_T \geq 0, k_m > 0)$;

- $1 - m(T) \to \inf$ — задача минимизации затрат массы при не ограниченном заранее времени перелёта $(k_T = 0, k_m = 1)$.

Обратим внимание, что подобные задачи оптимизации тректорий перелётов с малой тягой рассматриваются в работе [7]. Предлагаемый в этой работе подход использует осреднение краевой задачи (что предполагает малую величину тяги) и решение задачи быстродействия в качестве начального приближения. Переход от решения задач быстродействия при не ограниченной заранее массе к решению задач минимизации затрат массы при не ограниченном заранее времени перелета методом продолжения решения по параметру теоретически возможен, но требует значительных вычислительных затрат, связанных с происходящими при этом перестройками структуры траектории (о перестройках структуры траектории см., например, в [17]).

2. Переход к краевой задаче. Задача (1)-(5) представляет собой задачу оптимального управления и решается на основе принципа максимума Понтрягина [1, 2, 3]. Функция Понтрягина $\mathcal{H}$ и терминант l задачи имеют вид:

$$\begin{gathered}\mathcal{H}(m, r, \varphi, u, v, P, \theta, p_m, p_r, p_\varphi, p_u, p_v) \equiv -p_m P/C + p_r u + p_\varphi v/r + \\ +p_u((P\cos\theta)/m + v^2/r - \mu/r^2) + p_v((P\sin\theta)/m - uv/r),\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}&l \equiv \lambda_0(k_T T - k_m m(T)) + \lambda_{m0}(m(0) - 1) + \\ &+\lambda_{r0}(r(0) - R_0) + \lambda_{\varphi 0}\varphi(0) + \lambda_{u0}u(0) + \lambda_{v0}(v(0) - V_0) + \\ &+\lambda_{rT}(r(T) - R_T) + \lambda_{uT}u(T) + \lambda_{vT}(v(T) - V_T),\end{aligned} \tag{6}$$

где непрерывные кусочно-гладкие функции (сопряженные переменные) $p_i(t)$ ($i = m$, r, φ, u, v) и числа λ_0, λ_{i0} ($i = m$, r, φ, u, v), λ_{iT} ($i = r$, u, v) — множители Лагранжа.

Условия принципа максимума для рассматриваемой задачи имеют вид:

- уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряженная система: $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial i}$, $i = m, r, \varphi, u, v$):

$$\begin{cases} \dot{p}_m &= P(p_u \cos\theta + p_v \sin\theta)/m^2 \\ \dot{p}_r &= p_\varphi v/r^2 + p_u(v^2/r^2 - 2\mu/r^3) - p_v uv/r^2 \\ \dot{p}_\varphi &= 0 \\ \dot{p}_u &= -p_r + p_v v/r \\ \dot{p}_v &= -p_\varphi/r - p_u 2v/r + p_v u/r; \end{cases} \tag{7}$$

- условия трансверсальности по фазовым переменным ($p_i(0) = \dfrac{\partial l}{\partial i(0)}$, $p_i(T) = -\dfrac{\partial l}{\partial i(T)}$, $i = m, r, \varphi, u, v$):

$$\begin{gathered} p_m(0) = \lambda_{m0}, \quad p_r(0) = \lambda_{r0}, \quad p_\varphi(0) = \lambda_{\varphi 0}, \\ p_u(0) = \lambda_{u0}, \quad p_v(0) = \lambda_{v0}, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} p_m(T) = \lambda_0 k_m, \quad p_r(T) = -\lambda_{rT}, \quad p_\varphi(T) = 0, \\ p_u(T) = -\lambda_{uT}, \quad p_v(T) = -\lambda_{vT}; \end{gathered} \tag{9}$$

- условие стационарности по T $\quad (\mathcal{H}(T) = \dfrac{\partial l}{\partial T})$:

$$\mathcal{H}(T) = \lambda_0 k_T; \tag{10}$$

- условия оптимальности по управлениям:

$$\{P, \theta\}_{opt} = \underset{P \in [0, P_{\max}],\, \theta \in [0, 2\pi)}{\mathrm{arg\,abs\,max}}\, \mathcal{H}(\cdots, P, \theta, \cdots). \tag{11}$$

Следствия условий оптимальности (11):

$$(\cos\theta, \sin\theta)_{opt} \;=\; \begin{cases} (p_u/\rho, p_v/\rho), & \rho \neq 0 \quad \text{и} \quad \chi \geq 0, \\ (\cos\theta, \sin\theta)\ \forall\,\theta \in [0, 2\pi), & \rho = 0 \quad \text{или} \quad \chi < 0; \end{cases}$$
$$P_{opt} \;=\; \begin{cases} P_{\max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \\ \forall\, P \in [0, P_{\max}], & \chi = 0; \end{cases} \tag{12}$$

$\chi \equiv \rho - mp_m/C$ — функция переключения управления P, $\rho \equiv \sqrt{p_u^2 + p_v^2}$;

- условие неотрицательности:

$$\lambda_0 \geq 0; \tag{13}$$

- условие НЕРавенства Одновременно Нулю всех множителей Лагранжа (условие НЕРОН):

$$\sum_{i=r,\varphi,u,v,m} (||p_i||_{KC_1} + |\lambda_{i0}|) + \sum_{i=r,u,v} |\lambda_{iT}| + \lambda_0 \neq 0; \tag{14}$$

- условие нормировки множителей Лагранжа:

$$p_r^2(0) + p_u^2(0) + p_v^2(0) = 1. \tag{15}$$

Отметим, что из условий $\dot{p}_\varphi = 0$, $p_\varphi(T) = 0$ следует, что $p_\varphi(t) \equiv 0, \quad t \in [0; T]$.

Соотношения (1)-(4), (6)-(15) представляют собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (краевую задачу принципа максимума). Неизвестными в ней являются 10 постоянных интегрирования её системы дифференциальных уравнений (1), (7), время перелёта T и числовые множители Лагража λ_0, λ_{i0} $(i = m, r, \varphi, u, v)$, λ_{iT} $(i = r, u, v)$ — всего 20 неизвестных. Для их определения имеется 20 условий — 8 краевых условий (3), (4); 10 условий трансверсальности (8), (9); условие стационарности (10) и условие нормировки (15), связанное с однородностью функции Лагранжа по множителям Лагранжа, позволяющей выбирать множители Лагража с точностью до положительного сомножителя. Обращение в ноль суммы $p_r^2(0)+p_u^2(0)+p_v^2(0)$ влечет за собой обращение в ноль всех множителей Лагранжа [17], что противоречит условию НЕРОН (14). Таким образом, выбор нормировки (15) правомерен.

Анормальный случай в рассматриваемой задаче невозможен. Действительно, пусть $\lambda_0 = 0$. В силу автономности системы дифференциальных уравнений (1), (7) функция Понтрягина является её первым интегралом: тогда $\mathcal{H}(t) \equiv const = \lambda_0 k_T \quad \forall t \in [0;T]$, а так как $\lambda_0 = 0$, то $\mathcal{H}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0;T]$. Так как $p_m(T) = \lambda_0 k_m = 0$ и $\dot{p}_m(t) = P\rho/m^2 \geq 0$, то $p_m(0) \leq 0$, $\chi(0) = \rho(0) - m(0)p_m(0)/C \geq 0$. Представим функцию Понтрягина в виде $\mathcal{H}(t) = H_0(t) + H_1(t)$, где $H_0 = p_r u + p_\varphi v/r + p_u(v^2/r - \mu/r^2) - p_v uv/r$, $H_1 = \chi P/m$. Подстановка начальных условий (3) и $p_\varphi(0) = p_\varphi(T) = 0$ в функцию Понтрягина приводит к $H_0(0) = 0$ и потому $H_1(0) = \chi(0)P(0)/m(0) = 0$. Так как при $\chi(0) > 0$, $P(0) = P_{\max}$ и $H_1(0) > 0$, то $\chi(0) \leq 0$. Следствием неравенств $\chi(0) \geq 0$, $\chi(0) \leq 0$, $p_m(0) \leq 0$ будут равенства $\chi(0) = 0$, $\rho(0) = 0$, $p_m(0) = 0$. Так как $p_m(t)$ монотонно неубывающая функция, которая обращается в ноль на концах отрезка $[0,T]$, то $p_m(t) \equiv 0$, $\dot{p}_m(t) = P\rho/m^2 \equiv 0$, $t \in [0;T]$. Так как при постоянно выключенной тяге перелёт невозможен, то существует интервал $(\tau_0;\tau_1)$, на котором $P(t) \neq 0$ и $\rho(t) = 0$, $t \in (\tau_0;\tau_1)$. При этом на интервале $(\tau_0;\tau_1)$ обращаются в ноль все сопряженные переменные [17], т.е. решение сопряженной системы дифференциальных уравнений (7) пересекает нулевое решение и, в силу теоремы о существовании и единственности решения для системы дифференциальных уравнений, совпадает с ним на всей прямой. По условиям трансверсальности (8), (9) все множители Лагранжа равны нулю, что противоречит условию НЕРОН (14). Таким образом, $\lambda_0 \neq 0$.

Исключив λ_0 из условий (9), (10) получим условие:

$$k_m H(T) - k_T p_m(T) = 0. \tag{16}$$

В результате решения краевой задачи определятся удовлетворяющие условиям принципа максимума (необходимым условиям локальной оптимальности первого порядка) экстремальные траектории перелета КА (экстремали Понтрягина).

3. Вычислительная схема решения краевой задачи.

Верхняя грань $m_{\max}$ конечной массы КА, соответствующая решению задачи в импульсной постановке, для перелёта КА с РДОТ является точной: $m_{\max} \equiv \sup m(T)$, и, достигается на минимизирующей функционал $(1 - m(T))$ последовательности — "циклическом скользящем режиме", представляющем собой бесконечную последовательность переходных квазиэллиптических орбит (циклов) с включениями ограниченной тяги на малое время в окрестностях перицентров и(или) апоцентров этих орбит [14, 15, 16]. Так как тяга ограничена, а времена её включений малы — время перелёта будет сколь угодно велико. Целью работы является построение многовитковых траекторий перелётов КА, время перелёта по которым (а потому число витков вокруг Земли и число активных участков) ограничено.

Определение. Структурой многовитковой траектории в рассматриваемом случае называется пара чисел $a - b$, где a — количество активных участков в окрестности перицентра, b — в окрестности апоцентра. При этом сначала все включения двигателя происходят в окрестности перицентра, а потом апоцентра.

Будем искать экстремали Понтрягина в классе траекторий структуры $a - b$, т.е. траекторий с фиксированным количеством включений двигателя в окрестностях перицентра и апоцентра. Для построения траекторий заданной структуры $(a - b)$ (в предположении, что такие экстремали существуют) перейдём от "классической" вычислительной схемы решения краевой задачи методом стрельбы к вычислительной схеме многоточечной пристрелки. Для этого включим в вектор параметров пристрелки все фазовые и сопряженные переменные в точках переключения тяги, а также продолжительности активных и пассивных участков:

$$r_j, \varphi_j, u_j, v_j, m_j, p_{rj}, p_{\varphi j}, p_{uj}, p_{vj}, p_{mj}, T_j, \quad j = \overline{0, 2(a+b-1)}. \tag{17}$$

В вектор-функцию невязок включим соответствующие им условия стыковки участков траектории и задаваемые равенствами $\chi_j(T_j) = 0$ условия переключения тяги:

$$r_0(0) - R_0 = 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad v_0(0) - V_0 = 0, \quad m_0(0) - 1 = 0, \tag{18}$$

$$p_{r0}^2(0) + p_{u0}^2(0) + p_{v0}^2(0) - 1 = 0, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \alpha_j(T_j) - \alpha_{j+1}(0) = 0, \quad (\alpha = r, \varphi, u, v, m, p_r, p_\varphi, p_u, p_v, p_m,), \\ \chi_j(T_j) \equiv \sqrt{p_{uj}^2(T_j) + p_{vj}^2(T_j)} - m_j(T_j) p_{mj}(T_j)/C = 0, \end{gathered} \tag{20}$$

$j = \overline{0, 2(a+b-1)-1}$.

$$\begin{gathered} r_j(T_j) - R_T = 0, \quad u_j(T_j) = 0, \quad v_j(T_j) - V_T = 0, \\ p_{\varphi j}(T_j) = 0, \quad k_m H_j(T_j) - k_T p_{mj}(T_j) = 0, \quad j = 2(a+b-1), \end{gathered} \tag{21}$$

Здесь (18), (19) — условия в начале траектории, (19) — условие нормировки; (20) — условия стыковки участков траектории и условия переключения тяги $(\chi = 0)$ в моменты стыковки участков (так как активные и пассивные участки чередуются); (21) — условия в конце траектории. Время на каждом участке отсчитывается заново $(t_j \in [0; T_j])$. Общее время перелёта вычисляется как сумма продолжительностей всех участков $T = \sum_{j=0}^{2(a+b-1)-1} T_j$. Предполагается, что на четных (пассивных) участках тяга выключена, на нечётных (активных) участках тяга включена и максимальна $(P = P_{\max})$, её направление при этом определяется из условия оптимальности (12). На всех полученных с помощью такой вычислительной схемы траекториях проверяется выполнение условия оптимальности по управлению $P(t)$ (12). Условия (18) можно было бы исключить из вектор-функции невязок вместе с соответствующими компонентами из вектора параметров пристрелки. Влияния на сходимость метода Ньютона это не оказывает, и условия (18) приведены здесь для общности.

Размерность вектора параметров пристрелки и вектор-функции невязок, при использовании такой схемы, возрастает с 6 до $22(a+b)-11$. Следует отметить, что матрица производных имеет блочный вид и при её построении необходимо решать задачу Коши не более 11 раз на каждом участке. Такая схема избавляет от необходимости численного определения точек переключения тяги. При этом вычислительная ошибка определения нулей функции переключения переносится в погрешность определения нулей вектор-функции невязок и не накапливается при решении задачи Коши. Задача Коши решается на участках между точками переключения тяги $(t \in [0; T_j])$ отдельно, а не на всей протяженности перелёта сразу $(t \in [0; T])$. Всё это позволяет заметно уменьшить вычислительную ошибку и получить достаточную для сходимости метода Ньютона точность вычисления компонент вектор–функции невязок.

В данной работе рассматривались орбиты с отношением радиусов менее 11.94, и для построения начального приближения использовался двухимпульсный гомановский перелёт (первый импульс сообщается КА в перицентре переходной орбиты, второй — в апоцентре переходной орбиты). Пусть в результате решения краевой задачи для соответствующей задачи оптимизации в импульсной постановке (условие нормировки в задаче импульсной постановки берётся совпадающим с условием нормировки в исходной краевой задаче: $p^2_{r(imp0)} + p^2_{u(imp0)} + p^2_{v(imp0)} = 1$) построена двухимпульсная гомановская траектория:

$$r_{imp0} = R_0, \quad \varphi_{imp0} = 0, \quad u_{imp0} = 0, \quad v_{imp0} = V_0 + \Delta V_0,$$

$$m_{imp0} = e^{-\Delta V_0/C}, \quad p_{r(imp0)}, \quad p_{\varphi(imp0)} = 0, \quad p_{u(imp0)}, \quad p_{v(imp0)}, \quad p_{m(imp0)};$$

$$r_{imp1} = R_T, \quad \varphi_{imp1} = \pi, \quad u_{imp1} = 0, \quad v_{imp1} = V_T - \Delta V_1,$$

$$m_{imp1} = e^{-\Delta V_1/C}, \quad p_{r(imp1)}, \quad p_{\varphi(imp1)} = 0, \quad p_{u(imp1)}, \quad p_{v(imp1)}, \quad p_{m(imp1)}$$

— значения фазовых и сопряженных переменных в начале и конце этой траектории, ΔV_0, ΔV_1 — величины первого и второго импульсов. Признаком гомановского перелёта является сонаправленность векторов импульсов $\Delta\vec{V}_0, \Delta\vec{V}_1$ и векторов скоростей КА на начальной и конечной круговой орбитах (импульсы скорости осуществляются в перицентре и апоцентре переходной эллиптической орбиты), $\Delta V_0 = V_0(\sqrt{2R_T/(R_T+R_0)}-1)$, $\Delta V_1 = V_T(1-\sqrt{2R_0/(R_T+R_0)})$ [11]. В данной работе начальное приближение для решения исходной краевой задачи получается по следующим формулам (для удобства записи формул вместо индекса j использован индекс i; при этом $j=2i$ соответствует началу i-го активного участка, $j=2i+1$ — началу i-го пассивного участка) :

$$r_{2i}=r_{2i+1}=r_{imp0},\quad \varphi_{2i}=\varphi_{2i+1}=2\pi i,\quad u_{2i}=u_{2i+1}=0,$$

($i=\overline{0,a-1}$) (активные и пассивные участки начинаются в перицентре, угол φ возрастает на 2π после каждого пассивного участка);

$$v_{2i}=V_0+i\Delta V_0/a,\quad v_{2i+1}=V_0+\Delta V_0(i+1)/a,$$

($i=\overline{0,a-1}$) (трансверсальная составляющая вектора скорости после активного участка возрастает на $\Delta V_0/a$);

$$p_{r2i}=p_{r2i+1}=p_{r(imp0)},\quad p_{\varphi 2i}=p_{\varphi 2i+1}=0,\quad p_{u2i}=p_{u2i+1}=p_{u(imp0)},$$

$$p_{v2i}=p_{v2i+1}=p_{v(imp0)},\quad p_{m2i}=p_{m2i+1}=p_{m(imp0)},$$

($i=\overline{0,a-1}$) (сопряженные переменные в начале каждого участка полагаются равными соответствующим сопряженным переменным из решения задачи в импульсной постановке);

$$m_{2i}=e^{-i\Delta V_0/aC},\quad m_{2i+1}=e^{-(i+1)\Delta V_0/aC},\quad T_{2i}=C(m_{2i+1}-m_{2i})/P_{\max},$$

($i=\overline{0,a-1}$) (масса после активного участка вычисляется по формуле Циолковского, продолжительность активного участка вычисляется из расходного уравнения для массы ($\dot{m}=-P/C$));

$$T_{2i+1}=\frac{2\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2-v_{2i+1}^2/V_0^2)^{3/2}},$$

($i=\overline{0,a-2}$) (продолжительности пассивных участков равны периодам обращения по соответствующим кеплеровским орбитам);

$$T_{2i+1}=\frac{\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2-v_{2i+1}^2/V_0^2)^{3/2}},$$

($i=a-1$) (продолжительность пассивного участка перед началом включений в окрестности апоцентра равна, соответственно, половине периода обращения).

По аналогичным формулам получается начальное приближение для участков в окрестности апоцентра:

$$r_{2i}=r_{2i+1}=r_{imp1},\quad \varphi_{2i}=\varphi_{2i+1}=2\pi i-\pi,\quad u_{2i}=u_{2i+1}=0,$$

$$v_{2i}=V_T-(a+b-i)\Delta V_1/b,\quad v_{2i+1}=V_T-\Delta V_1(a+b-i-1)/b,$$

$$p_{r2i}=p_{r2i+1}=p_{r(imp1)},\quad p_{\varphi 2i}=p_{\varphi 2i+1}=0,\quad p_{u2i}=p_{u2i+1}=p_{u(imp1)},$$

$$p_{v2i}=p_{v2i+1}=p_{v(imp1)},\quad p_{m2i}=p_{m2i+1}=p_{m(imp1)},$$

$$m_{2i}=m_{2a-1}e^{-(i-a)\Delta V_1/bC},\quad m_{2i+1}=m_{2a-1}e^{-(i+1-a)\Delta V_1/bC},$$

$$T_{2i}=C(m_{2i+1}-m_{2i})/P_{\max},\quad T_{2i+1}=\frac{2\pi r_{2i+1}^{3/2}}{\sqrt{\mu}(2-v_{2i+1}^2/V_T^2)^{3/2}},$$

($i=\overline{a,a+b-2}$);

$$r_{2i}=r_{imp1},\quad \varphi_{2i}=2\pi i-\pi,\quad u_{2i}=0,\quad v_{2i}=V_T-(a+b-i)\Delta V_1/b,$$

$$p_{r2i}=p_{r(imp1)},\quad p_{\varphi 2i}=0,\quad p_{u2i}=p_{u(imp1)},\quad p_{v2i}=p_{v(imp1)},$$

$$p_{m2i}=p_{m(imp1)},\quad m_{2i}=m_{2a-1}e^{-(i-a)\Delta V_1/bC},\quad T_{2i}=C(m_{2i+1}-m_{2i})/P_{\max},$$

($i=a+b-1$).

При решении задачи Коши использовался метод Дормана–Принса 8(7) с автоматическим выбором шага [10] при ограничении оценки точности на шаге 10^{-13}. Система алгебраических уравнений решалась модифицированным методом Ньютона с использованием в условии сходимости нормировки Федоренко [13, §1].

4. Результаты и качественный анализ полученных решений.

Используя предложенную вычислительную схему и способ построения начального приближения удалось построить экстремальные многовитковые траектории в рассматриваемой задаче. Подчеркнем, что приведенные результаты соответствуют решению задачи при минимуме затрат массы и ограниченном количестве витков. Результаты представлены в таблицах 1–5 и на рисунках 1–5.

В таблице 1 представлено решение задачи в импульсной постановке, а в таблице 2 полученное с его помощью решение задачи в неимпульсной постановке (структура 10–5, $R_0 = 6.58$ тыс. км., $R_T = 7.0$ тыс. км., $n_0 = 0.05$). Сравнение сопряженных переменных показывает, что в рассматриваемом случае использование в качестве начального приближения решения в импульсной постановке дает 7 верных знаков после запятой для p_r и p_v и 3 для p_u.

В таблицах 3-5 представлены протяженности активных участков (по угловой дальности $\Delta\varphi$). На всех полученных экстремалях протяженность активных участков в окрестности перицентра и апоцентра линейно возрастает. Таким образом на экстремальных многовитковых траекториях все протяженности активных участков можно задать с помощью четырех чисел — по два параметра линейной функции для активных участков в перицентре и апоцентре.

На рисунках 1, 3 показаны характерные многовитковые траектории перелёта КА на ГСО структур 10–5 и 13–2 для параметров задачи $R_0 = 6.58$ тыс. км., $R_T = (43200\sqrt{\mu}/\pi)^{2/3} \simeq 42.26$ тыс. км., $n_0 = 0.05$; на рисунках 2, 4 показаны соответствующие этим траекториям функции переключения.

Зафиксируем общее количество включений двигателя ($a+b$). После построения экстремалей различной структуры (с различным соотношением $a-b$) для каждого из рассматриваемых наборов парамеров проводится выбор наилучшей по функционалу структуры многовитковой траектории. В таблице 6 и на рисунке 5 показана зависимость времени перелёта и конечной массы от структуры траектории (общее количество включений двигателя — 15). Для сравнения приведена также разность между значениями конечной массы на полученных экстремалях и значением конечной массы при двухимпульсном гомановском перелёте.

Расчеты показали, что выбор наилучшей структуры многовитковой траектории зависит главным образом от отношения R_T/R_0. Так, при $R_T = 10000$км наилучшей оказалась структура 9–6, при $R_T = 20000$км — 12–3, при $R_T = R_{\text{ГСО}}$ — 13–2. То есть, чем больше отношение R_T/R_0, тем больше на наилучшей структуре включений в окрестности перицентра. Это, в первую очередь, объясняется тем, что скорость движения в окрестности перицентра максимальна, а в окрестности апоцентра минимальна, и при одинаковой продолжительности работы двигателя КА проходит значительно большее расстояние по эллиптической траектории в окрестности перицентра, чем в окрестности апоцентра. При этом гравитационные потери при движении в окрестности перицентра больше гравитационных потерь при движении в окрестности апоцентра. Разница в скоростях в окрестности перицентров и апоцентров переходных орбит возрастает с увеличением радиуса конечной орбиты. В результате эффективнее увеличивать количество активных участков в перицентре, уменьшая их продолжительность таким образом, чтобы расстояние, проходимое КА за активный участок, было почти одинаковым для всех активных участков. Разница в протяженностях активных участков для траекторий на рисунках 1, 3 иллюстрирует сделанные выше выводы.

Проверим сделанное выше предположение. Рассмотрим протяженности по угловой дальности последнего активного участка в окрестности перицентра (α) и следующего за ним — первого активного участка в окрестности апоцентра (β). В терминах рассматриваемой задачи это означает, что на переходной орбите с радиусом перицентра $R_p = R_0$ и радиусом апоцентра $R_a = R_T$ эксцентрическая аномалия E_α, соответствующая истинной аномалии $\alpha/2$, связана с эксцентрической аномалией E_β для истинной аномалии $\pi - \beta/2$, как $E_\beta = \pi - E_\alpha$. Истинная аномалия ν

связана с экстцентрической E следующей формулой:

$$\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{R_a}{R_p}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

С помощью этой формулы получаем, что α и β должны быть связаны соотношением:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \frac{R_a}{R_p}\operatorname{tg}\frac{\beta}{4}. \qquad (22)$$

Таким образом для всех α и β из соотношения (22) можно построить β^* и α^*, соответственно. Рассмотрим величину

$$\Delta(\alpha,\beta) = \sqrt{(\alpha^* - \alpha)^2 + (\beta^* - \beta)^2},$$

выражающую отклонение углов α и β от "идеальных" (см., табл. 7). Из таблицы видно, что лучшие структуры по соотношению углов α и β, совпадают с лучшими по функционалу структурами.

Таким образом можно выделить следующие закономерности устройства экстремальных многовитковых межорбитальных перелётов между круговыми компланарными орбитами:

1. включения тяги происходят в окрестности перицентров и апоцентров переходных орбит;

2. протяженность (по угловой дальности φ) активных участков в окрестности перицентра линейно зависит от номера участка;

3. тоже самое верно для активных участков в окрестности апоцентра;

Установленные закономерности устройства экстремальных многовитковых траекторий позволяют предложить простую схему построения многовитковых траекторий близких к экстремальным.

Пусть задана структура траектории $a - b$. Рассмотрим следующую схему перелёта:

1. Задание начальных данных

- в начальный момент времени аппарат находится на многообразии:
$$r(0) = R_0, \quad \varphi(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0;$$
- задаются 3 угла: α, β, γ (α — протяженность по угловой дальности активных участков в окрестности перицентра, β — в окрестности апоцентра, γ — угол между радиус вектором и вектором тяги на активных участках в окрестности апоцентра).

2. Активные участки в окрестности перицентра

- первые $a-1$ витка состоят из одного активного и одного пассивного участка, при этом активный участок ограничен условиями $\varphi(t) \in [2\pi(k-1); 2\pi(k-1)+\alpha]$, $k = \overline{(1, a-1)}$, пассивный — $\varphi(t) \in [2\pi(k-1)+\alpha; 2\pi k]$, $k = \overline{(1, a-1)}$;
- виток a начинается активным участком траектории $\varphi(t) \in [2\pi(a-1); 2\pi(a-1)+\alpha]$, затем следует переходный пассивный участок;
- на всех активных участках в окрестности перицентра $P = P_{\max}$, $(\cos\theta, \sin\theta) \uparrow\uparrow (u, v)$, т.е. тяга максимальна и направлена по касательной к траектории.

3. Переходный пассивный участок

- пассивный $\varphi(t) \in [2\pi(a-1)+\alpha; 2\pi a - \pi + \alpha/2 - \beta/2]$;
- принципиально важно, чтобы середины всех активных участков находились на одной прямой — линии апсид переходных орбит.

4. Активные участки в окрестности апоцентра

- потом идут b витков, которые состоят из активного и пассивного участков (на последнем витке пассивный участок отсутствует), при этом активный участок ограничен условиями

$\varphi(t) \in [2\pi(k-1); 2\pi(k-1)+\beta]$, $k=\overline{(a+1, a+b)}$, пассивный — $\varphi(t) \in [2\pi(k-1)+\beta; 2\pi k]$, $k=\overline{(a+1, a+b-1)}$;

- на всех активных участках в окрестности апоцентра $P = P_{\max}$, $\theta = \gamma = const$, т.е. тяга максимальна и направлена под постоянным углом к радиус-вектору положения КА.

5. Условия в конце траектории:

$$r = R_T, \quad u = 0, \quad v = V_T.$$

При использовании такой схемы построения траектории в качестве независимой переменной вместо t можно рассматривать угол φ. Уравнения движения будут иметь вид:

- на пассивных участках

$$\dot{m} = 0, \quad \dot{r} = \frac{ur}{v}, \quad \dot{u} = v - \frac{\mu}{vr}, \quad \dot{v} = -u; \tag{23}$$

- на активных участках в окрестности перицентра

$$\begin{gathered} \dot{m} = -\frac{rP}{vC}, \quad \dot{r} = \frac{ur}{v}, \\ \dot{u} = v - \frac{\mu}{vr} + \frac{urP}{mv\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \dot{v} = -u + \frac{rP}{m\sqrt{u^2+v^2}}; \end{gathered} \tag{24}$$

- на активных участках в окрестности апоцентра

$$\begin{gathered} \dot{m} = -\frac{rP}{vC}, \quad \dot{r} = \frac{ur}{v}, \\ \dot{u} = v - \frac{\mu}{vr} + \frac{rP\cos\gamma}{mv}, \quad \dot{v} = -u + \frac{rP\sin\gamma}{mv}. \end{gathered} \tag{25}$$

Таким образом определена краевая задача — найти неизвестные параметры α, β, γ такие что, траектория построенная по указанной выше схеме переведет КА с исходной круговой орбиты:

$$r(0) = R_0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = V_0,$$

на конечную круговую орбиту:

$$r(2\pi(a+b-1)+\beta) = R_T,\ u(2\pi(a+b-1)+\beta) = 0,\ v(2\pi(a+b-1)+\beta) = V_T.$$

Как и при построении экстремалей Понтрягина, при решении задачи Коши использовался метод Дормана — Принса 8-7 с автоматическим выбором шага [10] при ограничении оценки точности на шаге 10^{-13}. Система алгебраических уравнений решалась модифицированным методом Ньютона с использованием в условии сходимости нормировки Федоренко [13, §1].

Решения такой краевой задачи можно использовать в качестве начального приближения для построения решений "соседних" структур.

Полученные таким образом траектории (будем для краткости называть их — *построенными*) оказываются близкими по затратам массы к экстремальным. В таблице 8 показаны затраты массы на построенных и экстремальных траекториях различных структур. Обратим внимание, что построенная траектория оптимальной структуры оказывается лучше экстремальных траекторий других структур. Это ещё раз подчеркивает важность правильного выбора структуры траектории.

При решении краевой задачи принципа максимума построение экстремалей Понтрягина с большим количеством витков требует значительных вычислительных затрат. Предложенная схема позволяет строить траектории с большим количеством витков значительно быстрее. Для примера были построены траектории состоящие из 200 витков для различных значений R_T, среди которых выделены лучшие по функциолналу (см. табл. 9).

Пример построенной траектории приведён на рисунке 6.

Проведем сравнение построенной траектории с решением задачи быстродействия (табл. 10). Видно, что в задаче быстродействия затраты массы для рассматриваемых параметров задачи на 4,1% (от общей начальной массы КА) выше, чем в абсолютно оптимальном по затратам массы — импульсном решении. Затраты массы на построенной траектории всего на 1,3% выше затрат массы в импульсном решении. Таким образом выигрыш построенного решения в полезной нагрузке по сравнении с решением задачи быстродействия около 3%, что для аппарата с начальной массой 500-600 кг составляет 15-20 кг. При этом перелёт по построенной траектории в 4 раза продолжительней, чем наискорейший перелёт.

В таблице 11 показаны значения функционала ($m(T)$) и величины $\Delta(\alpha, \beta)$, введенной выше, для построенных траекторий различных структур. Из таблицы видно, что на лучшей по функционалу структуре протяженность активных участков в окрестности перицентра меньше, чем на лучшей структуре по значению Δ , а активных участков в окрестности апоцентра — наоборот. Это согласуется с результатами для экстремальных траекторий, т.к. на экстремальных траекториях средняя протяженность по угловой дальности активных участков в окрестности перицентра меньше, чем протяженность последнего из них, а в окретности апоцентра средняя протяженность больше, чем протяженность первого такого активного участка.

Отметим, что с помощью рассмотренной схемы строятся траектории обладающие основными свойствами, которыми обладают экстремали Понтрягина для рассматриваемых задач, и какой-либо оптимизации не производится. Получаемые траектории оказываются близкими по функционалу к экстремальным и позволяют оценивать оптимальность выбора структуры многовитковой траектории. Выбор структуры многовитковой траектории, как было показано выше, влияет на затраты массы не меньше, чем выбор направления, величины и продолжительности включения тяги.

Авторы благодарны Григорьеву К.Г., Заплетину М.П., Сазонову В.В. за полезные обсуждения работы.

Список литературы

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов М.: Наука, 1969.

[2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление М.: Наука, 1979.

[3] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач М.: Изд-во МГУ, 1989.

[4] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления М.: Наука, 1978.

[5] Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука 1971.

[6] Гроздовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космичекого полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.

[7] Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелётов между некомпланарными эллиптическими орбитами. // Космические исследования, 2004, т.42, N3, с.1–20.

[8] Григорьев К.Г. О наискорейших маневрах космического аппарата. // Космические Исследования 1994, т.32, N1. с.56–69

[9] Григорьев К.Г. О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени. // Космические Исследования 1994, т.32, N2. с.45–60

[10] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений М.: Мир, 1990.

[11] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета М.: Наука, 1990.

[12] Григорьев К.Г., Федына А.В. Оптимальные перелеты космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между компланарными круговыми орбитами // Космические Исследования, 1995, т.33, N4. с. 403–416.

[13] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику М.: Изд-во МФТИ, 1994.

[14] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.

[15] Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.

[16] Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1977.

[17] Григорьев И.С., Григорьев К.Г., Петрикова Ю.Д. О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме // Космические Исследования, 2000, т.38, N2. с. 171–192.

Таблица 1: Импульсное решение ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 7.0$ тыс. км, $C = 14.715$ км/с)

импульсное решение				
	p_r	p_u	p_v	ΔV, м/с
$t = 0$	$1.183159 \cdot 10^{-03}$	$2.7449 \cdot 10^{-16}$	1.0000007	117.38
$t = T$	$1.078280 \cdot 10^{-03}$	$9.2120 \cdot 10^{-19}$	1.0000000	119.75

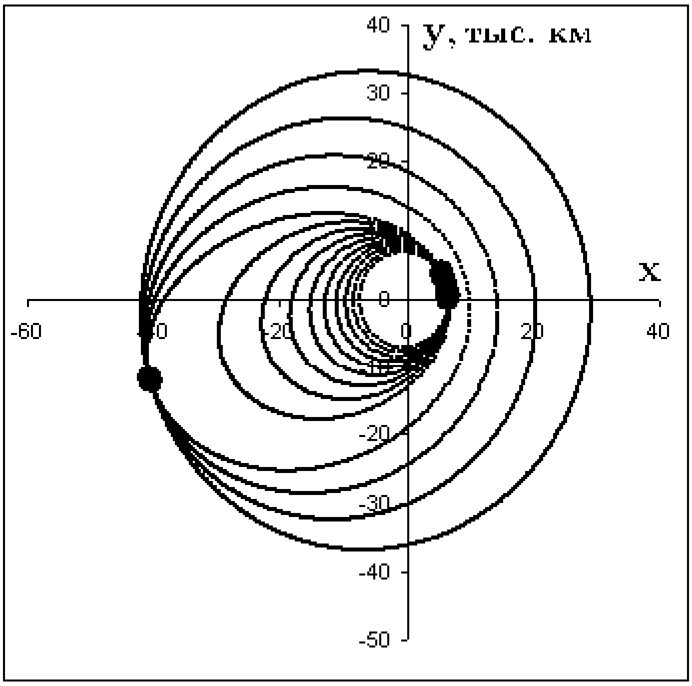

Рис. 1: Траектория структуры 10—5 ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = R_{\text{ГСО}}$, $n_0 = 0.05$, $C = 14.715$ км/с). Тонкие линии соответствуют движению КА с выключенным двигателем (пассивные участки), толстые — с включенным (активные участки).

Таблица 2: Решение структуры 10–5 ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 7.0$ тыс. км, $n_0 = 0.05$, $C = 14.715$ км/с, j — индекс участка)

j	p_r	p_u	p_v	t, с
0	$1.183158 \cdot 10^{-3}$	$-5.1037 \cdot 10^{-6}$	0.999999300	24.29
1	$1.183157 \cdot 10^{-3}$	$2.7103 \cdot 10^{-5}$	0.999999300	5308.83
2	$1.183157 \cdot 10^{-3}$	$-2.7103 \cdot 10^{-5}$	0.999999300	24.29
3	$1.183156 \cdot 10^{-3}$	$4.9103 \cdot 10^{-5}$	0.999999299	5333.57
4	$1.183156 \cdot 10^{-3}$	$-4.9104 \cdot 10^{-5}$	0.999999299	24.28
5	$1.183156 \cdot 10^{-3}$	$7.1104 \cdot 10^{-5}$	0.999999298	5358.55
6	$1.183156 \cdot 10^{-3}$	$-7.1105 \cdot 10^{-5}$	0.999999298	24.27
7	$1.183155 \cdot 10^{-3}$	$9.3105 \cdot 10^{-5}$	0.999999296	5383.77
8	$1.183155 \cdot 10^{-3}$	$-9.3107 \cdot 10^{-5}$	0.999999296	24.27
9	$1.183154 \cdot 10^{-3}$	$1.1511 \cdot 10^{-4}$	0.999999294	5409.25
10	$1.183154 \cdot 10^{-3}$	$-1.1511 \cdot 10^{-4}$	0.999999294	24.26
11	$1.183153 \cdot 10^{-3}$	$1.3711 \cdot 10^{-4}$	0.999999291	5434.98
12	$1.183153 \cdot 10^{-3}$	$-1.3712 \cdot 10^{-4}$	0.999999291	24.26
13	$1.183153 \cdot 10^{-3}$	$1.5912 \cdot 10^{-4}$	0.999999288	5460.97
14	$1.183153 \cdot 10^{-3}$	$-1.5912 \cdot 10^{-4}$	0.999999288	24.25
15	$1.183152 \cdot 10^{-3}$	$1.8113 \cdot 10^{-4}$	0.999999284	5487.23
16	$1.183152 \cdot 10^{-3}$	$-1.8113 \cdot 10^{-4}$	0.999999284	24.26
17	$1.183151 \cdot 10^{-3}$	$2.0335 \cdot 10^{-4}$	0.999999280	5513.74
18	$1.183151 \cdot 10^{-3}$	$-2.0315 \cdot 10^{-4}$	0.999999280	24.24
19	$1.183150 \cdot 10^{-3}$	$2.2515 \cdot 10^{-4}$	0.999999275	2746.53
20	$1.078301 \cdot 10^{-3}$	$3.8970 \cdot 10^{-4}$	0.999999225	47.46
21	$1.078297 \cdot 10^{-3}$	$-3.0990 \cdot 10^{-4}$	0.999999253	5567.37
22	$1.078297 \cdot 10^{-3}$	$3.0990 \cdot 10^{-4}$	0.999999253	47.43
23	$1.078293 \cdot 10^{-3}$	$-2.3010 \cdot 10^{-4}$	0.999999274	5618.40
24	$1.078293 \cdot 10^{-3}$	$2.3010 \cdot 10^{-4}$	0.999999274	47.41
25	$1.078288 \cdot 10^{-3}$	$-1.5031 \cdot 10^{-4}$	0.999999290	5670.43
26	$1.078288 \cdot 10^{-3}$	$1.5031 \cdot 10^{-4}$	0.999999290	47.38
27	$1.078284 \cdot 10^{-3}$	$-7.0529 \cdot 10^{-5}$	0.999999299	5723.48
28	$1.078284 \cdot 10^{-3}$	$7.0529 \cdot 10^{-5}$	0.999999299	47.36

Таблица 3: Протяженность активных участков по угловой дальности, рад. ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 10$ тыс. км, $n_0 = 0.05$, $C = 14.715$ км/с)

	структура						
участок	8–7	9–6	10–5	11–4	12–3	13–2	14–1
1	0.228	0.203	0.182	0.166	0.152	0.140	0.128
2	0.230	0.204	0.184	0.167	0.153	0.140	0.129
3	0.233	0.206	0.185	0.168	0.154	0.141	0.130
4	0.235	0.208	0.187	0.169	0.155	0.142	0.130
5	0.237	0.210	0.188	0.170	0.156	0.143	0.131
6	0.239	0.211	0.189	0.171	0.157	0.144	0.132
7	0.242	0.213	0.191	0.173	0.158	0.145	0.133
8	0.244	0.215	0.192	0.174	0.159	0.146	0.133
9	0.106	0.217	0.194	0.175	0.160	0.146	0.134
10	0.108	0.124	0.195	0.176	0.161	0.147	0.135
11	0.110	0.126	0.150	0.177	0.162	0.148	0.135
12	0.111	0.129	0.153	0.188	0.163	0.149	0.136
13	0.113	0.131	0.156	0.192	0.252	0.150	0.137
14	0.114	0.133	0.159	0.197	0.260	0.383	0.138
15	0.116	0.135	0.162	0.202	0.268	0.400	0.800

Таблица 4: Протяженность активных участков по угловой дальности, рад. ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = 20$ тыс. км, $n_0 = 0.05$, $C = 14.715$ км/с)

	структура						
участок	8–7	9–6	10–5	11–4	12–3	13–2	14–1
1	0.517	0.459	0.413	0.375	0.344	0.317	0.293
2	0.528	0.468	0.420	0.381	0.349	0.321	0.297
3	0.539	0.476	0.427	0.387	0.353	0.325	0.301
4	0.549	0.485	0.434	0.393	0.358	0.330	0.304
5	0.560	0.494	0.441	0.399	0.363	0.334	0.308
6	0.571	0.502	0.448	0.404	0.368	0.338	0.311
7	0.582	0.511	0.455	0.410	0.373	0.342	0.315
8	0.593	0.520	0.462	0.416	0.378	0.346	0.319
9	0.053	0.529	0.470	0.422	0.383	0.351	0.322
10	0.056	0.063	0.477	0.428	0.388	0.355	0.326
11	0.059	0.067	0.076	0.434	0.393	0.359	0.330
12	0.062	0.070	0.081	0.096	0.398	0.363	0.333
13	0.065	0.074	0.087	0.104	0.130	0.368	0.337
14	0.067	0.078	0.092	0.113	0.145	0.201	0.341
15	0.070	0.082	0.098	0.121	0.160	0.235	0.441

Таблица 5: Протяженность активных участков по угловой дальности, рад. ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = R_{\text{ГСО}}$, $n_0 = 0.05$, $C = 14.715$ км/с)

	структура						
участок	8–7	9–6	10–5	11–4	12–3	13–2	14–1
1	0.710	0.631	0.567	0.515	0.472	0.435	0.404
2	0.729	0.646	0.580	0.526	0.481	0.443	0.411
3	0.748	0.661	0.592	0.536	0.490	0.451	0.417
4	0.767	0.676	0.605	0.547	0.499	0.458	0.424
5	0.786	0.692	0.618	0.558	0.508	0.466	0.431
6	0.805	0.707	0.630	0.568	0.517	0.474	0.437
7	0.824	0.723	0.643	0.579	0.526	0.482	0.444
8	0.844	0.739	0.656	0.590	0.535	0.490	0.451
9	0.014	0.754	0.669	0.600	0.544	0.497	0.458
10	0.016	0.017	0.682	0.611	0.553	0.505	0.465
11	0.017	0.019	0.020	0.622	0.562	0.513	0.471
12	0.019	0.021	0.023	0.026	0.572	0.521	0.478
13	0.021	0.023	0.027	0.031	0.035	0.529	0.485
14	0.022	0.025	0.030	0.036	0.044	0.057	0.492
15	0.024	0.028	0.033	0.041	0.053	0.077	0.133

Таблица 6: Зависимость конечной массы от структуры траектории ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $n_0 = 0.05$, $C = 14.715$ км/с; жирным шрифтом выделена строка с наилучшей структурой)

структура	T, с	$m(T)$	$\Delta m = m(T) - m_{imp}$
$R_T = 10000$ км			
8–7	99294	0.90586558651	$3.78 \cdot 10^{-6}$
9–6	**96973**	**0.90586590545**	$\mathbf{3.46 \cdot 10^{-6}}$
10–5	94661	0.90586584984	$3.52 \cdot 10^{-6}$
11–4	92362	0.90586525857	$4.11 \cdot 10^{-6}$
12–3	90085	0.90586351796	$5.85 \cdot 10^{-6}$
13–2	87853	0.90585799790	$1.14 \cdot 10^{-5}$
14–1	86506	0.90582669757	$4.27 \cdot 10^{-5}$
$R_T = 20000$ км			
8–7	187025	0.81044436855	$1.65 \cdot 10^{-4}$
9–6	175457	0.81047679967	$1.32 \cdot 10^{-4}$
10–5	163939	0.81049882536	$1.10 \cdot 10^{-4}$
11–4	152477	0.81051277283	$9.65 \cdot 10^{-5}$
12–3	**141108**	**0.81051783720**	$\mathbf{9.15 \cdot 10^{-5}}$
13–2	129938	0.81050384974	$1.05 \cdot 10^{-4}$
14–1	122700	0.81036889480	$2.40 \cdot 10^{-4}$
$R_T = R_{\text{ГСО}}$			
8–7	419647	0.76461545509	$7.42 \cdot 10^{-4}$
9–6	378041	0.76476900259	$5.88 \cdot 10^{-4}$
10–5	336630	0.76487900895	$4.78 \cdot 10^{-4}$
11–4	295457	0.76496001015	$3.97 \cdot 10^{-4}$
12–3	254648	0.76502024264	$3.37 \cdot 10^{-4}$
13–2	**214631**	**0.76506224911**	$\mathbf{2.95 \cdot 10^{-4}}$
14–1	185458	0.76502538337	$3.32 \cdot 10^{-4}$

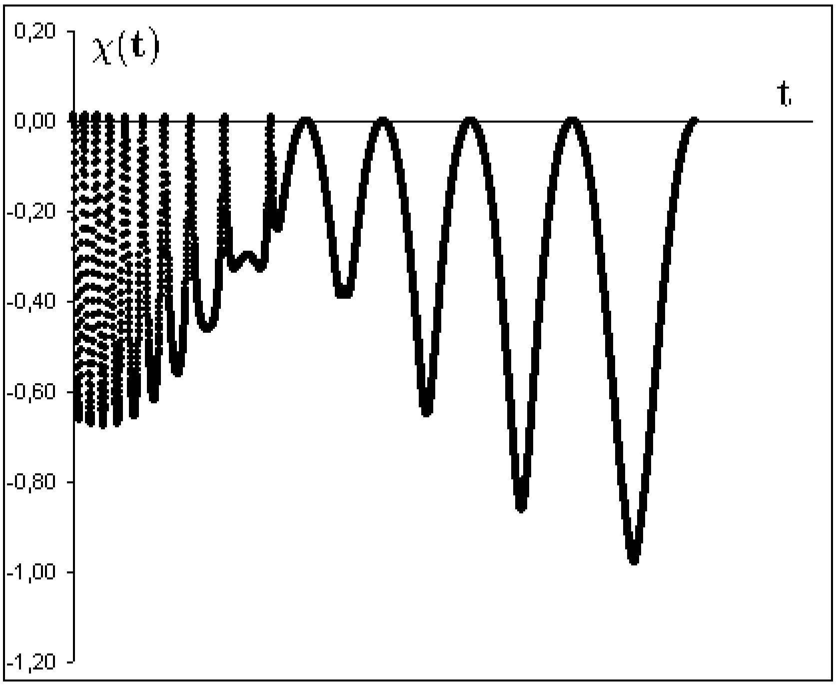

Рис. 2: Функция переключения для траектории структуры 10—5 ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = R_{\text{ГСО}}$, $n_0 = 0.05$, $C = 14.715$ км/с).

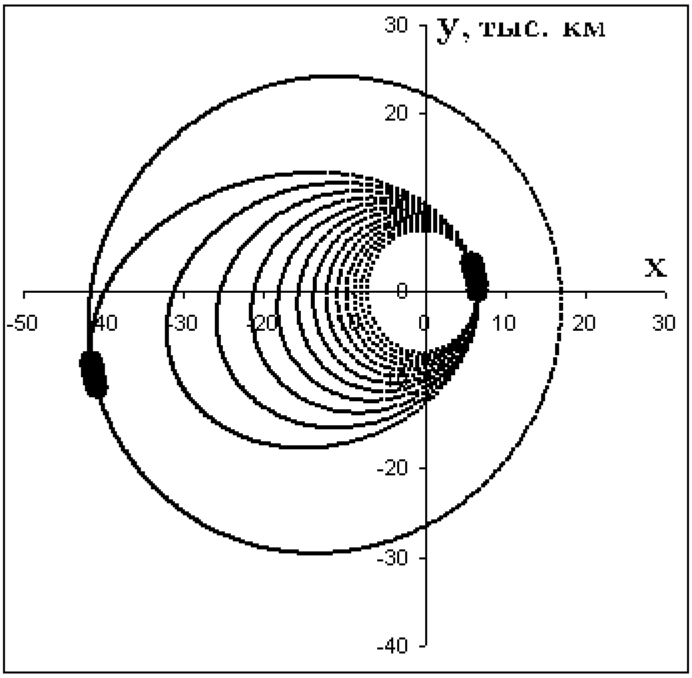

Рис. 3: Траектория структуры 13—2 ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = R_{\text{ГСО}}$, $n_0 = 0.05$, $C = 14.715$ км/с). Тонкие линии соответствуют движению КА с выключенным двигателем (пассивные участки), толстые — с включенным (активные участки).

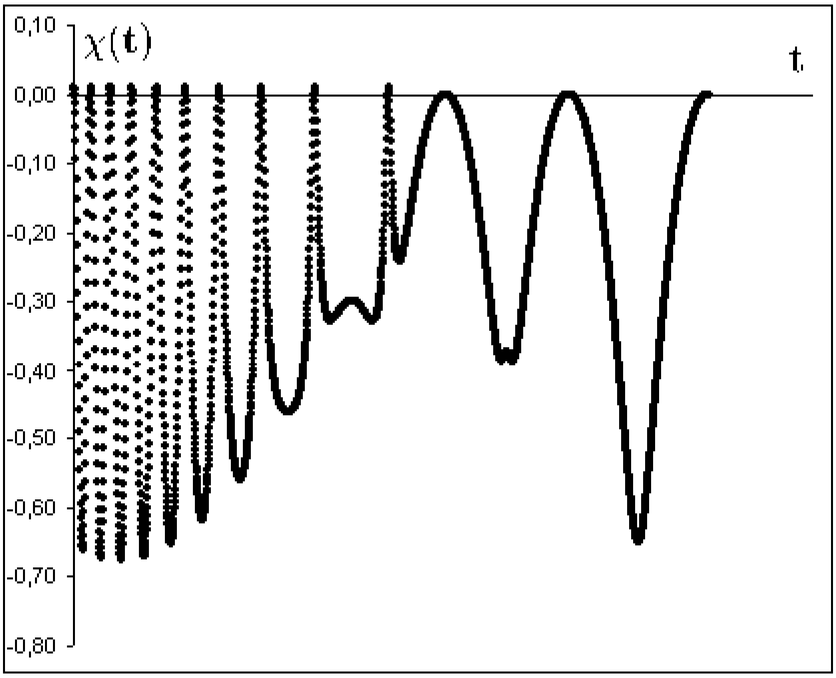

Рис. 4: Функция переключения для траектории структуры 13—2 ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = R_{\text{ГСО}}$, $n_0 = 0.05$, $C = 14.715$ км/с).

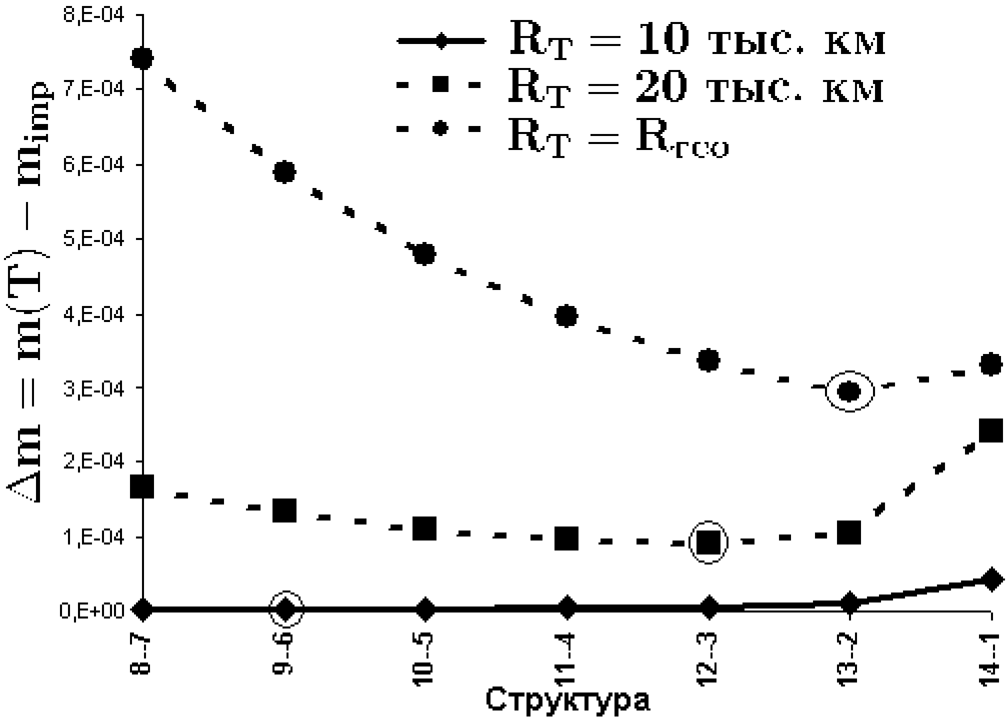

Рис. 5: Отличие значения конечной массы от импульсного решения для различных структур. Кружочками выделены лучшие по функционалу структуры.

Таблица 7: Сравнение траекторий разных структур ($R_0 = 6.58$ тыс. км; $n_0 = 5 \cdot 10^{-4}$; $C = 14.715$ км/с). Жирным шрифтом выделены траектории с наименьшим значением $\Delta(\alpha, \beta)$.

структура	α	β	$\Delta(\alpha, \beta)$
$R_T = 10000$ км			
8–7	0.2439	0.1064	0.09851
9–6	**0.2168**	**0.1243**	**0.03352**
10–5	0.1952	0.1495	0.03823
11–4	0.1775	0.1876	0.12861
12–3	0.1626	0.2517	0.26269
13–2	0.1498	0.3826	0.51479
14–1	0.1376	0.7999	1.27359
$R_T = 20000$ км			
8–7	0.5935	0.0535	0.45417
9–6	0.5288	0.0627	0.35650
10–5	0.4768	0.0758	0.25996
11–4	0.4340	0.0956	0.15150
12–3	**0.3983**	**0.1296**	**0.00567**
13–2	0.3677	0.2009	0.25154
14–1	0.3406	0.4415	1.01391
$R_T = R_{\text{ГСО}}$			
8–7	0.8439	0.0141	0.76284
9–6	0.7545	0.0166	0.65589
10–5	0.6820	0.0202	0.55909
11–4	0.6220	0.0258	0.46224
12–3	0.5717	0.0355	0.34833
13–2	**0.5288**	**0.0566**	**0.16850**
14–1	0.4919	0.1334	0.35690

Таблица 8: Зависимость конечной массы от структуры траектории ($R_0 = 6.58$ тыс. км; $n_0 = 0.05$; $C = 14.715$ км/с)

структура	экстремаль	построенная
$R_T = 20000$км		
11–4	0.81051277283	0.81050986668
12–3	**0.81051783720**	**0.81051361345**
13–2	0.81050384974	0.81048718289
$R_T = R_{\text{ГСО}}$		
12–3	0.76502024264	0.76500825009
13–2	**0.76506224911**	**0.76504832818**
14–1	0.76502538337	0.76494214382

Таблица 9: Лучшие построенные траектории состоящие из 200 витков ($R_0 = 6.58$ тыс. км; $n_0 = 5 \cdot 10^{-4}$; $C = 14.715$ км/с)

R_T, тыс. км	лучшая структура	$m(T)$	α, рад	β, рад	γ, рад	α°	β°	γ°
10	125-75	0.905684319	1.4872	1.0444	1.5707	85.21	59.84	89.99
15	147-53	0.840479849	2.2317	1.1765	1.5714	127.87	67.41	90.03
20	159-41	0.806323077	2.5318	1.0598	1.5726	145.06	60.72	90.10
25	168-32	0.785530852	2.6623	0.9842	1.5740	152.54	56.39	90.18
30	173-27	0.771739573	2.7561	0.8672	1.5756	157.91	49.69	90.27
35	177-23	0.762060727	2.8122	0.7864	1.5773	161.12	45.06	90.37
40	180-20	0.754991736	2.8518	0.7182	1.5791	163.40	41.15	90.47
42.258	181-19	0.752408938	2.8677	0.6858	1.5799	164.31	39.29	90.52

Таблица 10: Сравнение решения задачи быстродействия с построенным решением ($R_0 = 6.58$ тыс. км; $R_T = R_{\text{ГСО}}$ тыс. км; $n_0 = 5 \cdot 10^{-4}$; $C = 14.715$ км/с)

траектория	$m(T)$	$m_{\text{имп}}(T) - m(T)$	T,с	T, суток
решение задачи быстродействия	0.7241972	0.0412	827408	9.58
построенная структуры 181-19	0.7524089	0.0129	3244861	37.56

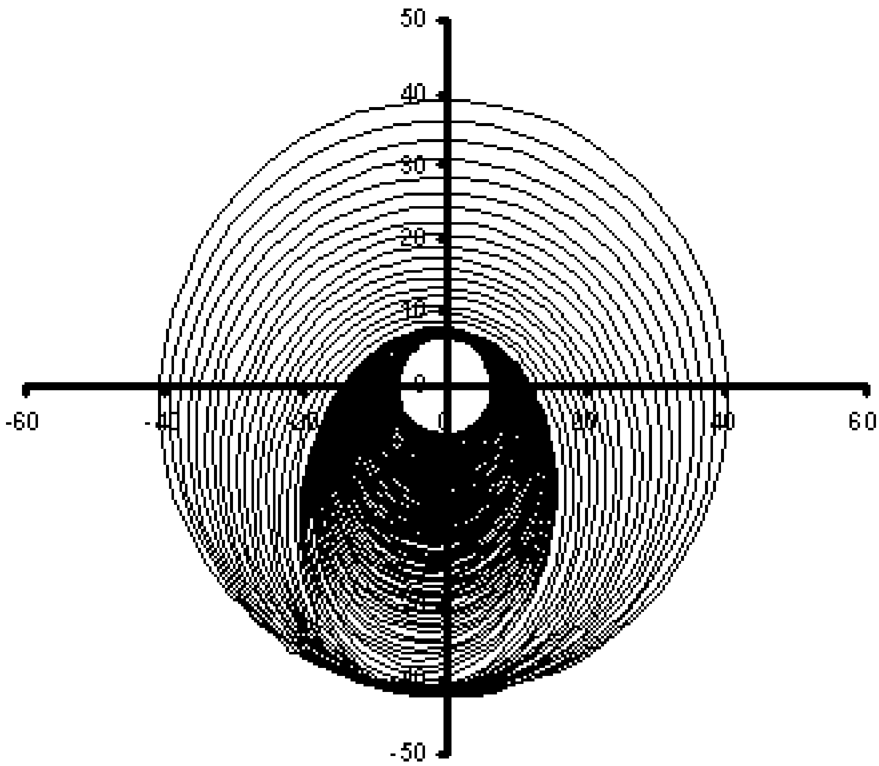

Рис. 6: Построенная траектория структуры 181-19 ($R_0 = 6.58$ тыс. км, $R_T = R_{\text{ГСО}}$)

Таблица 11: Сравнение траекторий разных структур ($R_0 = 6.58$ тыс. км; $R_T = R_{\text{ГСО}}$; $n_0 = 5 \cdot 10^{-4}$; $C = 14.715$ км/с)

структура	α	β	γ	Δ	m
174-26	2.9575	0.4801	1.5774	0.33226	0.752024
175-25	2.9447	0.5015	1.5777	0.23065	0.752107
176-24	2.9319	0.5248	1.5780	0.12410	0.752183
177-23	2.9191	0.5505	1.5783	**0.01000**	0.752251
178-22	2.9063	0.5789	1.5786	0.10724	0.752310
179-21	2.8935	0.6105	1.5790	0.23259	0.752357
180-20	2.8806	0.6458	1.5794	0.36565	0.752391
181-19	2.8677	0.6858	1.5799	0.50744	**0.752409**
182-18	2.8546	0.7314	1.5803	0.65886	0.752406
183-17	2.8412	0.7841	1.5808	0.82152	0.752377
184-16	2.8275	0.8459	1.5811	0.99735	0.752315