Алгебра и анализ
Том 15 (2003), вып. 5

ЦИКЛИЧЕСКИЕ q-ЦЕПОЧКИ ДАРБУ

© С. В. Смирнов

В работе построен дискретный q-аналог одевающей цепочки Веселова-Шабата (являющейся обобщением гармонического осциллятора). Показано, что, как и в непрерывном случае, соответствующие операторные соотношения позволяют полностью определить дискретный спектр операторов цепочки: в данном случае он состоит из нескольких q-арифметических прогрессий. В этой работе удалось реализовать циклическую q-цепочку ограниченными разностными самосопряженными операторами, причем спектр каждого из них дискретен, а собственные векторы образуют полное семейство в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых последовательностей. Кроме того, в работе приведено общее решение задачи (в явном виде) для цепочек длины 2 и доказана слабая сходимость построенного q-осциллятора к обычному гармоническому осциллятору при $q \to 1$.

§1. Введение

Хорошо известно, что алгебраическое соотношение, которому удовлетворяет гармонический осциллятор $L = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2 x^2}{4}$,

$$L + \frac{\alpha}{2} = AA^+ = A^+A + \alpha, \tag{1}$$

где $A = d/dx + \alpha x/2$, а $A^+ = -d/dx + \alpha x/2$ обозначает сопряженный к A дифференциальный оператор, позволяет найти его дискретный спектр и набор собственных функций по следующей схеме. Основное состояние ψ_0, отвечающее наименьшему собственному значению $\frac{\alpha}{2}$, находится из уравнения

$$A\psi_0 = 0,$$

Ключевые слова: гармонический осциллятор, q-осциллятор, q-цепочка Дарбу.

а остальные получаются из него применением оператора рождения A^+:

$$\psi_k = (A^+)^k \psi_0,$$
$$L\psi_k = \frac{(2k+1)\alpha}{2}\psi_k.$$

Известно, что полученные таким образом собственные функции после нормировки имеют вид

$$\psi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{2\pi}} e^{-\frac{\alpha x^2}{4}},$$
$$\psi_k(x) = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)^k \frac{1}{\sqrt{k!\alpha^k}} H_k\left(x\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)\psi_0(x),$$

где H_k — полиномы Эрмита, и образуют полную систему в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, однако последний факт не следует непосредственно из соотношения (1), поскольку оператор L не является ограниченным всюду определенным оператором в гильбертовом пространстве.

Цепочкой Дарбу называется последовательность самосопряженных дифференциальных операторов $L_1, L_2, \ldots$ на прямой, связанных преобразованиями Дарбу:

$$L_j = A_j A_j^+ - \alpha_j = A_{j-1}^+ A_{j-1}, \tag{2}$$

где $A_j = d/dx + f_j(x)$ — дифференциальные операторы первого порядка. Цепочка называется *циклической*, если для некоторого r и всех $j = 1, 2, \ldots$ выполнено $L_{j+r} = L_j$. Число r называется *периодом* (или *длиной*) данной цепочки. В частном случае $r = 1$ оператор $L_1 + \alpha/2$ является гармоническим осциллятором.

Циклическая цепочка Дарбу приводит к интегрируемой системе дифференциальных уравнений

$$(f_j + f_{j+1})' = f_{j+1}^2 - f_j^2 + \alpha_j, \tag{3}$$

где $f_j = f_{j+r}$, $\alpha_j = \alpha_{j+r}$, упоминавшейся в [1] и подробно изученной в [2]. При $\alpha = 0$, где $\alpha = \sum_{j=1}^r \alpha_j$, операторы циклической цепочки Дарбу являются конечнозонными, а при $\alpha \neq 0$ уравнения (3) сводятся к уравнениям Пенлеве

($r = 3, 4$) и их высшим аналогам [3]. В случае $r = 2$ уравнения (3) могут быть явным образом решены:

$$f_j(x) = \frac{\alpha_j - \alpha_{j+1}}{2(\alpha_j + \alpha_{j+1})x} + \frac{(\alpha_j + \alpha_{j+1})x}{4}, \quad \text{где } \alpha_{j+2} = \alpha_j. \tag{4}$$

В работе [2] показано, что при $\alpha \neq 0$ алгебраические соотношения (2), подобно случаю гармонического осциллятора, позволяют определить дискретные спектры операторов цепочки: спектр каждого L_j состоит из r арифметических прогрессий. Например, спектр L_1 имеет вид

$$k\alpha, \;\; \alpha_1 + k\alpha, \;\; (\alpha_1 + \alpha_2) + k\alpha, \;\; \dots, \;\; (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{r-1}) + k\alpha, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Однако при $r > 1$ вопрос о полноте системы собственных функций уже не является столь простым, как в случае гармонического осциллятора, поскольку нахождение их в явном виде сводится к решению уравнений (3). Если все α_j равны между собой, то эта цепочка имеет частное решение $f_j(x) = \alpha x/2r$, отвечающее нулевым начальным данным. Как показано в [2], для нечетного r при малом возмущении начальных данных и параметров α_j решение цепочки остается неособым на всей прямой, а потенциал $u_1 = f_1^2 + f_1' - \alpha_1$ оператора Шрёдингера L_1 имеет „осцилляторoподобную" асимптотику (гипотеза Вейса):

$$u_1(x) = \frac{\alpha^2 x^2}{4r^2} + O(x) \quad \text{при } x \to \pm\infty.$$

В работе [4] исследована возможность реализации соотношения Гейзенберга (1) с помощью разностного оператора первого порядка $A = a + bT$ на одномерной решетке $\mathbb{Z}$, где T — оператор сдвига, $(T\psi)(n) = \psi(n+1)$, а a и b — произвольные функции целого переменного, не обращающиеся в нуль. Как показано в [4], построить такой оператор, действующий на функциях, определенных во всех целых точках, невозможно, однако можно построить такой оператор на функциях на „полупрямой" $\mathbb{N}$. В этом случае, как и в непрерывном, оператор L является неограниченным, его коэффициенты b_n растут как $n^{1/2}$. Система собственных векторов оператора L снова оказывается полной в $\mathcal{L}_2(\mathbb{N})$, что устанавливается с помощью явного выражения их через полиномы Шарлье.

В работах [4, 6, 7] рассматривались различные реализации *q-гармонического осциллятора*, т.е. операторы L, удовлетворяющие соотношению

$$L = AA^+ - \alpha = qA^+A \tag{5}$$

для некоторых $0 < q < 1$, $\alpha > 0$ (или $q > 1$, $\alpha < 0$), где $A = a + bT$ — разностный оператор первого порядка. Дискретный спектр q-осциллятора также может быть легко найден из соотношения (5). Он представляет собой „q-арифметическую прогрессию“:

$$\lambda_k = \alpha[k]_q = \alpha\frac{1-q^k}{1-q}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и, очевидно, располагается в промежутке $[0, \frac{q\alpha}{1-q})$ (или $(0, \frac{q\alpha}{q-1})$ в случае $q > 1$), что априори не исключает возможности реализации q-осциллятора ограниченными операторами в некотором гильбертовом пространстве. Тем не менее, как отмечается в [4], оператор $L = (a+bT)(a+bT)^+ - \alpha$ для приведенной выше реализации q-осциллятора не ограничен и, по-видимому, имеет непрерывный спектр в области $(\frac{q\alpha}{1-q}, \infty)$. В работе [6] показано, что собственные состояния q-осциллятора выражаются через q-полиномы Эрмита.

В работе [8] построена принципиально другая версия q-осциллятора. Там рассматривается разностный оператор $A = aT^{-1} + bT$ на целочисленной решетке, удовлетворяющий соотношению (5). При таком выборе оператора A оказывается, что q-осциллятор L — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$, отличающийся от компактного на константу, а из этого следует, что его собственные векторы образуют полное семейство. Кроме того, L не имеет непрерывного спектра.

В нашей работе будет построена реализация q-цепочки Дарбу, т.е. q-аналога системы (2) ограниченными разностными операторами в случае четного r, будет доказана полнота системы собственных векторов операторов q-цепочки в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$ и будут исследованы спектральные свойства ее операторов. Также будут приведены явные формулы для коэффициентов операторов q-цепочки в случае $r = 2$, которые при некотором специальном выборе параметров сводятся к формулам из [8].

Результаты этой работы анонсированы в [9].

§2. q-цепочки Дарбу

Под *q-цепочкой Дарбу* мы будем понимать последовательность самосопряженных разностных операторов $L_1, L_2, \ldots$ на одномерной решетке, связанных соотношениями

$$L_j = A_jA_j^+ - \alpha_j = qA_{j-1}^+A_{j-1}, \tag{6}$$

где $A_j = a_j + b_jT$ — разностные операторы первого порядка, причем $a_j(n), b_j(n) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Без ограничения общности можно считать, что $b_j(n) > 0$

для всех j, n. Одна из важных осбенностей разностных операторов по сравнению с дифференциальными состоит в возможности различного определения понятия циклической цепочки. А именно будем говорить, что q-цепочка (6) является *циклической* с *периодом* r и *сдвигом* s, если для всех $j \geqslant 1$ выполнено

$$L_{j+r} = T^{-s} L_j T^s. \tag{7}$$

Ранее в литературе рассматривался в основном случай $s = 0$. Однако в работе [4], а также в [10], указывалась возможность „обратной“ факторизации, т.е. замены операторов $A_j = a_j + b_j T$ на операторы вида $A_j = a_j T^+ + b_j$, что фактически эквивалентно рассмотрению „прямой“ факторизации при $s = r$ (оператор L_j заменяется на $T^{-j} L_j T^j$).

В дальнейшем нам потребуются две дискретные симметрии, которыми обладают циклические цепочки вида (6), (7). Пусть разностные операторы $L_1, \ldots, L_r$ удовлетворяют соотношениям (6), (7) для некоторых $q > 0$, $q \neq 1$, $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, r$; тогда соответствие

$$L_j \mapsto \tilde{L}_j = \tilde{A}_j \tilde{A}_j^+ - \tilde{\alpha}_j = \tilde{q} \tilde{A}_{j+1}^+ \tilde{A}_{j+1}, \tag{8}$$

где $\tilde{q} = \frac{1}{q}$, $\tilde{\alpha}_j = -\frac{\alpha_j}{q}$ для всех $j = 1, \ldots, r$, сопоставляет исходной q-цепочке новую $\tilde{q}$-цепочку $\tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_r$ с тем же сдвигом (эта симметрия задается изменением направления обхода „окружности“ $\mathbb{Z}_r$). Кроме того, имеет место другая симметрия, задаваемая изменением направления „оси“ $\mathbb{Z}$:

$$L_j \mapsto \tilde{L}_j = \tilde{A}_j \tilde{A}_j^+ - \alpha_j = q \tilde{A}_{j-1}^+ \tilde{A}_{j-1}, \tag{9}$$

где $\tilde{A}_j = \tilde{a}_j + \tilde{b}_j T$, а коэффициенты определяются с помощью следующих формул:

$$\tilde{a}_j(n) = b_j(j-n), \quad \tilde{b}_j(n) = a_j(j-n) \quad \text{для всех } j, n. \tag{10}$$

Предложение 1. *Операторы циклической q-цепочки Дарбу* (6), (7) *неограничены, если $s \leqslant 0$ или $s \geqslant r$.*

Доказательство. Операторные соотношения (6) вместе с условием цикличности (7) приводят к следующей системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} a_2^2(n)+b_2^2(n)=q(a_1^2(n)+b_1^2(n-1))+\alpha_2, \\ \vdots \\ a_r^2(n)+b_r^2(n)=q(a_{r-1}^2(n)+b_{r-1}^2(n-1))+\alpha_r, \\ a_1^2(n-s)+b_1^2(n-s)=q(a_r^2(n)+b_r^2(n-1))+\alpha_1, \\ a_2(n)b_2(n-1)=qa_1(n-1)b_1(n-1), \\ \vdots \\ a_r(n)b_r(n-1)=qa_{r-1}(n-1)b_{r-1}(n-1), \\ a_1(n-s)b_1(n-s-1)=qa_r(n-1)b_r(n-1). \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим сперва случай $s\leqslant 0$; перемножая все уравнения второй группы системы (11), получаем

$$a_1(n-s)b_1(n-s-1)\prod_{j=1}^{r}a_j(n)=q^r a_1(n)b_1(n-1)\prod_{j=1}^{r}a_j(n-1). \tag{12}$$

Если $s=0$, то после сокращения множителей (12) принимает вид

$$f(n)=q^r f(n-1), \tag{13}$$

где $f(n)=\prod_{j=1}^{r}a_j(n)$. Поэтому $f(n)$ экспоненциально растет при $n\to-\infty$ (или при $n\to+\infty$ в случае $q>1$), и, следовательно, коэффициенты разностных операторов A_j неограничены. Если $s<0$, то равенство (12) следует домножить на произведение

$$a_1(n+1)a_1(n+2)\cdots a_1(n-s-1)b_1(n)b_1(n+1)\cdots b_1(n-s-2),$$

после чего оно также примет вид (13) для

$$f(n)=\prod_{i=1}^{-s}a_1(n+i)b_1(n+i-1)\prod_{j=1}^{r}a_j(n).$$

Теперь рассмотрим случай $s\geqslant r$. Симметрия (9) переводит q-цепочку с таким сдвигом в q-цепочку с неположительным сдвигом $r-s$, операторы которой, как показано выше, неограничены. Поэтому, используя формулы (10), легко заметить, что операторы исходной q-цепочки тоже неограничены. Предложение доказано.

Ограничимся теперь обсуждением циклических q-цепочек Дарбу четной длины r со сдвигом $s = r/2$ (этот подход был предложен И.А.Дынниковым). Рассмотрим другую q-цепочку длины r, но с нулевым сдвигом:

$$M_j = B_j B_j^+ - \alpha_j = q B_{j-1}^+ B_{j-1}, \quad M_{j+r} = M_j, \tag{14}$$

где

$$B_j = u_j T^{-1} + v_j T. \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что циклическая q-цепочка (14), (15) сводится к следующей системе разностных уравнений:

$$\begin{cases} u_1^2(n) + v_1^2(n) = q(u_r^2(n+1) + v_r^2(n-1)) + \alpha_1, \\ \vdots \\ u_r^2(n) + v_r^2(n) = q(u_{r-1}^2(n+1) + v_{r-1}^2(n-1)) + \alpha_r, \\ u_1(n+1)v_1(n-1) = q u_r(n) v_r(n), \\ \vdots \\ u_r(n+1)v_r(n-1) = q u_{r-1}(n) v_{r-1}(n). \end{cases} \tag{16}$$

Прямая проверка показывает, что при замене

$$\begin{aligned} u_{2i+1}(2k+1) &= a_{2i+1}(k+i), & v_{2i+1}(2k+1) &= b_{2i+1}(k+i), \\ u_{2i}(2k) &= a_{2i}(k+i-1), & v_{2i}(2k) &= b_{2i}(k+i-1) \end{aligned}$$

уравнения (11) превращаются в уравнения вида (16) ($u_j(n)$ и $v_j(n)$ определены лишь, если $j+n$ четно).

Таким образом, исследование существования решения циклической q-цепочки (6), (7) для $s = r/2$ сводится к исследованию системы разностных уравнений (16).

§3. Цепочка длины 2

Случай q-цепочек длины $r = 2s = 2$ представляет особый интерес, поскольку общее решение соответствующих уравнений (11) может быть записано в явном виде. Общее решение задачи для $r = 2$ было сообщено автору И. А. Дынниковым.

Для нахождения общего решения нам потребуется следующий технический трюк. Введем обозначения

$$\xi_n = \begin{cases} u_1^2(n+1), & \text{если } n \text{ — четно}, \\ u_2^2(n+1), & \text{если } n \text{ — нечетно}, \end{cases} \qquad \eta_n = \begin{cases} v_1^2(n), & \text{если } n \text{ — нечетно}, \\ v_2^2(n), & \text{если } n \text{ — четно}. \end{cases} \tag{17}$$

При этом недоопределенная система (16) перейдет в следующую полностью определенную систему

$$\begin{cases} \xi_{n-1} + \eta_n = q(\xi_n + \eta_{n-1}) + \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (-1)^{n-1}\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}, \\ \xi_n \eta_{n-1} = q^2 \xi_{n-1} \eta_n. \end{cases} \tag{18}$$

Легко заметить, что уравнения (18) в точности совпадают с уравнениями (16) для $r = 1$ и „мигающих" параметров $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + (-1)^{n-1}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$ (вместо α), т.е. замена (17) фактически сводит нашу цепочку длины $r = 2$ со сдвигом $s = 1$ к „мигающей" цепочке вида (14), (15). В работе [8] содержится частное решение цепочки (14), (15) для $r = 1$ (в нашей постановке это соответствует случаю $s = 1$, $r = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2$), обладающее дополнительной симметрией относительно начала координат.

Будем для определенности считать, что $0 < q < 1$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Второе уравнение (18) можно переписать в виде

$$\frac{\xi_n}{\eta_n} = q^2 \frac{\xi_{n-1}}{\eta_{n-1}}$$

и заметить, что ξ_n/η_n образует геометрическую прогрессию. Поэтому

$$\xi_n = q^{2n+2\varphi+1}\eta_n, \tag{19}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\left(\log_q(\xi_0/\eta_0) - 1\right)$ — константа, определяемая начальными данными. Выражая ξ_n из (19) и подставляя в первое из уравнений (18), после домножения на $1 - q^{2(n+\varphi)}$ получаем

$$\zeta_n = q\zeta_{n-1} + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (-1)^{n-1}\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)\left(1 - q^{2(n+\varphi)}\right), \tag{20}$$

где $\zeta_n = \eta_n \left(1 - q^{2(n+\varphi-1)}\right)\left(1 - q^{2(n+\varphi)}\right)$.

Общее решение разностного уравнения (20) задается следующей формулой:

$$\zeta_n = -kq^n + \frac{(\alpha_1+\alpha_2)(1+q^{2n+2\varphi+1})}{2(1-q)} + (-1)^{n-1}\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(1-q^{2n+2\varphi+1})}{2(1+q)},$$

где k — некоторая константа. Вводя обозначения

$$c_n = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-q} + (-1)^n\frac{\alpha_1-\alpha_2}{1+q}, \quad 2\kappa = kq^{-(\varphi+\frac{1}{2})},$$

приходим к следующему выражению для η_n:

$$\eta_n = \frac{1}{2}\frac{q^{n+\varphi+\frac{1}{2}}\left(-2\kappa + c_{n+1}q^{-(n+\varphi+\frac{1}{2})} + c_nq^{n+\varphi+\frac{1}{2}}\right)}{(1-q^{2(n+\varphi+1)})(1-q^{2(n+\varphi)})}. \tag{21}$$

Для построения решения нашей q-цепочки необходимо среди всех решений (ξ_n, η_n) системы (18) отобрать те, которые положительны во всех точках целочисленной решетки; легко видеть, что в силу (19) достаточно обеспечить положительность η_n. Рассмотрим отдельно два случая: $\varphi \notin \mathbb{Z}$ и $\varphi \in \mathbb{Z}$.

Если $\varphi \notin \mathbb{Z}$, то в интервал $(-\varphi-1, -\varphi)$ попадет ровно одна целочисленная точка n_0. Очевидно, что при $n \neq n_0$ знаменатель дроби (21) положителен, а при $n = n_0$ — отрицателен; поэтому нам необходимо выбрать константу κ таким образом, чтобы числитель дроби (21) тоже был положителеным при $n \neq n_0$ и отрицательным в точке n_0. Введем обозначение

$$f(n) = c_{n+1}q^{-(n+\varphi+\frac{1}{2})} + c_nq^{n+\varphi+\frac{1}{2}};$$

нетрудно проверить, что эта функция достигает минимума на множестве $\mathbb{Z}$ именно в точке n_0. Поэтому условие положительности η_n можно переписать следующим образом:

$$f(n_0) < 2\kappa < \min\{f(n_0-1), f(n_0+1)\}.$$

После преобразований последнее неравенство принимает вид

$$c_{[\varphi]}q^{-\theta} + c_{[\varphi]-1}q^{\theta} < 2\kappa < \min(c_{[\varphi]}q^{\theta+1} + c_{[\varphi]-1}q^{-\theta-1}, c_{[\varphi]}q^{\theta-1} + c_{[\varphi]-1}q^{-\theta+1}), \tag{22}$$

где $\theta = \varphi - [\varphi] - \frac{1}{2}$, а $[\varphi]$ обозначает целую часть числа φ.

Таким образом, при любом $\varphi \notin \mathbb{Z}$ формулы (21), (19) приводят к решению исходной цепочки, если параметр κ удовлетворяет неравенству (22).

Пусть теперь $\varphi \in \mathbb{Z}$. В этом случае числитель дроби (21) достигает минимума в полуцелой точке $-\varphi - 1/2$, а ее знаменатель обращается в нуль в целочисленных точках $-\varphi$ и $-\varphi - 1$. Поэтому для существования решения необходимо подобрать параметр κ так, чтобы и числетель этой дроби тоже обращался в нуль в точках $-\varphi$, $-\varphi - 1$. Поскольку $f(-\varphi) = f(-\varphi - 1)$, числитель дроби (21) обращается в нуль в точках $-\varphi$ и $-\varphi - 1$, если выполнено следующее условие:

$$2\kappa = f(-\varphi) = c_{\varphi-1}q^{-1/2} + c_\varphi q^{1/2};$$

значит, в этом случае решение определено на всей целочисленной решетке. Если $\varphi \in \mathbb{Z}$, то на интервале $(-\varphi - 1, -\varphi)$ нет целочисленных точек; поэтому достаточно проверить положительность выбранного решения в точках $-\varphi$ и $-\varphi - 1$, что делается прямым вычислением. Таким образом, доказано

Предложение 2. *При $r = 2 = 2s$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $0 < q < 1$ общее решение задачи* (6), (7) *имеет вид $a_1(n) = \varepsilon\sqrt{\xi_{2n}}$, $b_1(n) = \sqrt{\eta_{2n+1}}$, $a_2(n) = \varepsilon\sqrt{\xi_{2n-1}}$, $b_2(n) = \sqrt{\eta_{2n}}$, где $\varepsilon = \pm 1$,*

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{1}{2}\frac{c_n - 2\kappa\, q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}} + c_{n+1}q^{-2n-2\varphi-1}}{(1-q^{-2(n+\varphi)})(1-q^{-2(n+\varphi+1)})}, \\ \eta_n &= \frac{1}{2}\frac{c_{n+1} - 2\kappa\, q^{n+\varphi+\frac{1}{2}} + c_n q^{2n+2\varphi+1}}{(1-q^{2(n+\varphi)})(1-q^{2(n+\varphi+1)})}, \end{aligned} \tag{23}$$

φ — произвольный параметр, а параметр κ удовлетворяет ограничениям

$$c_{[\varphi]}q^{-\theta} + c_{[\varphi]-1}q^{\theta} < 2\kappa < \min(c_{[\varphi]}q^{\theta+1} + c_{[\varphi]-1}q^{-\theta-1}, c_{[\varphi]}q^{\theta-1} + c_{[\varphi]-1}q^{-\theta+1}) \quad \text{при } \varphi \notin \mathbb{Z}$$

и $2\kappa = c_\varphi q^{\frac{1}{2}} + c_{\varphi-1}q^{-\frac{1}{2}}$, если $\varphi \in \mathbb{Z}$ (в этом случае дроби (23) *следует сократить на $(1-q^{2(n+\varphi)})$ при $n \equiv \varphi (\mathrm{mod}\, 2)$ и на $(1-q^{2(n+\varphi+1)})$ при $n \equiv \varphi + 1 (\mathrm{mod}\, 2)$), где $\theta = \varphi - [\varphi] - \frac{1}{2}$.*

Замечание 1. В случае $\varphi \in \mathbb{Z}$ формулы (23) принимают следующий вид после сокращения множителей:

$$\begin{cases} \xi_n = \frac{1}{2}\frac{c_\varphi - c_{\varphi+1}q^{-n-\varphi-1}}{(1-q^{-2(n+\varphi+1)})(1+q^{-n-\varphi})}, \\ \eta_n = \frac{1}{2}\frac{c_{\varphi+1} - c_\varphi q^{n+\varphi+1}}{(1-q^{2(n+\varphi+1)})(1+q^{n+\varphi})} \end{cases} \quad \text{при } n \equiv \varphi (\mathrm{mod}\, 2),$$

$$\begin{cases} \xi_n = \frac{1}{2}\frac{c_{\varphi+1} - c_\varphi q^{-n-\varphi}}{(1-q^{-2(n+\varphi)})(1+q^{-n-\varphi-1})}, \\ \eta_n = \frac{1}{2}\frac{c_\varphi - c_{\varphi+1}q^{n+\varphi}}{(1-q^{2(n+\varphi)})(1+q^{n+\varphi+1})} \end{cases} \quad \text{при } n \equiv \varphi + 1 (\mathrm{mod}\, 2).$$

Замечание 2. В частном случае $\alpha_1 = \alpha_2$ величина c_n не зависит от n; поэтому формулы (23) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi_n &= \frac{\alpha_1}{1-q}\frac{-\nu q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}}+1+q^{-2n-2\varphi-1}}{(1-q^{-2(n+\varphi)})(1-q^{-2(n+\varphi+1)})},\\ \eta_n &= \frac{\alpha_1}{1-q}\frac{-\nu q^{n+\varphi+\frac{1}{2}}+1+q^{2n+2\varphi+1}}{(1-q^{2(n+\varphi)})(1-q^{2(n+\varphi+1)})}\end{aligned} \tag{24}$$

для $\varphi \notin \mathbb{Z}$ и $\nu = \kappa\frac{1-q}{\alpha_1}$, удовлетворяющего ограничениям

$$q^{-\theta}+q^{\theta} < \nu < \min\{q^{1-\theta}+q^{\theta-1}, q^{-\theta-1}+q^{\theta+1}\}; \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\xi_n &= \frac{\alpha_1}{(1-q)(1+q^{-n-\varphi})(1+q^{-n-\varphi-1})},\\ \eta_n &= \frac{\alpha_1}{(1-q)(1+q^{n+\varphi})(1+q^{n+\varphi+1})}\end{aligned} \tag{26}$$

для $\varphi \in \mathbb{Z}$. Частное решение (26) было приведено в работе [8].

В дальнейшем нам будет удобно положить $\nu = q^{\tau} + q^{-\tau}$ и переписать формулы (24), (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\xi_n &= \frac{\alpha_1(1-q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}-\tau})(1-q^{-n-\varphi-\frac{1}{2}+\tau})}{(1-q)(1-q^{-2(n+\varphi)})(1-q^{-2(n+\varphi+1)})},\\ \eta_n &= \frac{\alpha_1(1-q^{n+\varphi+\frac{1}{2}-\tau})(1-q^{n+\varphi+\frac{1}{2}+\tau})}{(1-q)(1-q^{2(n+\varphi)})(1-q^{2(n+\varphi+1)})},\end{aligned} \tag{27}$$

где $|\theta| < \tau < \min\{|\theta-1|, |\theta+1|\}$ при $\varphi \notin \mathbb{Z}$ и $\tau = \frac{1}{2}$ при $\varphi \in \mathbb{Z}$.

Предложение 2 позволяет сделать следующие выводы об асимптотическом поведении коэффициентов операторов q-цепочки (6), (7):

$$a_1(n), a_2(n) \to 0,\ \ b_1(n) \to \sqrt{\frac{\alpha_1+q\alpha_2}{1-q^2}},\ \ b_2(n) \to \sqrt{\frac{\alpha_2+q\alpha_1}{1-q^2}} \quad \text{при } n \to +\infty, \tag{28}$$

$$a_1(n) \to \sqrt{\frac{\alpha_1+q\alpha_2}{1-q^2}},\ \ a_2(n) \to \sqrt{\frac{\alpha_2+q\alpha_1}{1-q^2}},\ \ b_1(n), b_2(n) \to 0 \quad \text{при } n \to -\infty. \tag{29}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}L_j &= A_jA_j^{+} - \alpha_j = (a_j + b_jT)(a_j + T^{-1}(b_j)T^{-1}) - \alpha_j\\ &= \left(a_jT^{-1}(b_j)\right)T^{-1} + (a_j^2 + b_j^2 - \alpha_j) + \left(T(a_j)b_j\right)T,\end{aligned} \tag{30}$$

коэффициенты при $T^{\pm 1}$ операторов L_j, где $j = 1, 2$, стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$, т.е. оператор L_j на бесконечности эквивалентен оператору умножения на константу $\frac{\alpha_j + q\alpha_{j+1}}{1-q^2}$ (здесь $j \in \mathbb{Z}_2$).

Исследуем теперь вопрос о сходимости при $q \to 1$ дискретной модели (6), (7) в случае $r = 2$, $s = 1$ к непрерывной модели (2). Пусть h — шаг решетки, $x = nh$, $T = \exp(h\frac{d}{dx})$; будем считать n вещественным, а операторы L_j — разностными на всей прямой $\mathbb{R}$.

Предложение 3. *В случае $r = 2$, $s = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2$ операторы $L_j + \frac{\alpha_j}{2}$, построенные по решениям* (27) *при $\varepsilon = -1$, $q = \exp(-\frac{\alpha}{8}h^2)$, слабо сходятся к гармоническому осциллятору:*

$$\left(L_{1,2} + \frac{\alpha_1}{2}\right)\psi(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha_1^2}{4}x^2\right)\psi(x) + o(h) \quad \text{для всех } \psi \in C^2(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Согласно (30),

$$\begin{aligned}
L_j &= \left(a_j T^{-1}(b_j)\right) T^{-1} + (a_j^2 + b_j^2) + (T(a_j)b_j)\, T \\
&= a_j(x)b_j(x-h)\exp\left(-h\frac{d}{dx}\right) + a_j^2(x) + b_j^2(x) \\
&\quad + a_j(x+h)b_j(x)\exp\left(h\frac{d}{dx}\right) + \cdots \\
&= A(x,h) + hB(x,h)\frac{d}{dx} + h^2C(x,h)\frac{d^2}{dx^2} + \cdots,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A(x,h) &= a_j^2(x) + b_j^2(x) + a_j(x+h)b_j(x) - a_j(x)b_j(x-h), \\
B(x,h) &= a_j(x+h)b_j(x) - a_j(x)b_j(x-h), \\
C(x,h) &= \frac{1}{2}\left(a_j(x+h)b_j(x) + a_j(x)b_j(x-h)\right).
\end{aligned}$$

Используя формулы (27), разложим функции a_j и b_j в ряд по h, после чего получим следующую асимптотику коэффициентов оператора L_j:

$$A(x,h) = \frac{\alpha_1^2}{4}x^2 + O(h), \quad B(x,h) = O(h), \quad C(x,h) = -\frac{1}{h^2} + O(1).$$

Предложение доказано. •

Аналогично можно показать, что и в случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$ оператор L_j сходится к

$$-\frac{d}{dx^2} + \frac{(\alpha_j + \alpha_{j+1})^2}{16}x^2 - \frac{\alpha_j}{2} - \frac{(\alpha_j - \alpha_{j+1})(\alpha_j + 3\alpha_{j+1})}{4(\alpha_j + \alpha_{j+1})^2 x^2},$$

где $\alpha_{j+2} = \alpha_j$, т.е. к оператору обычной цепочки Дарбу (2) при $r = 2$ (см. (4)).

§4. Цепочки произвольной длины

Перейдем теперь к рассмотрению циклических q-цепочек Дарбу (6), (7) произвольной четной длины r со сдвигом $s = r/2$. При $r > 2$ явное решение соответствующей системы разностных уравнений (11) неизвестно; более того, априори не ясно, существует ли это решение вообще. Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Для произвольных четного r, положительных $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $0 < q < 1$, задача* (6), (7) *при $s = r/2$ имеет r-параметрическое семейство решений. При этом для всех j оператор L_j ограничен и имеет только дискретный спектр $\{\lambda_{j,0}, \lambda_{j,1}, \dots\}$, содержащийся в промежутке $[-\alpha_j, \|L_j\|)$ и вычисляемый по схеме Дарбу:*

$$\lambda_{j,0} = 0, \quad \lambda_{j+1,k+1} = q(\lambda_{j,k} + \alpha_j), \quad \lambda_{j+r,k} = \lambda_{j,k}. \tag{31}$$

Для каждого j собственные функции операторов L_j, также вычисляемые по схеме Дарбу

$$A_{j-1}\psi_{j,0} = 0, \quad \psi_{j+1,k+1} = A_j^+\psi_{j,k}, \tag{32}$$

образуют полное семейство в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.

Для произвольных четного r, отрицательных $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $q > 1$, задача (6), (7) *при $s = r/2$ имеет r-параметрическое семейство решений. При этом для всех j оператор L_j ограничен и имеет только дискретный спектр $\{\lambda_{j,0}, \lambda_{j,1}, \dots\}$, содержащийся в промежутке $[0, \|L_j\|)$ и вычисляемый по схеме Дарбу,*

$$\lambda_{j,0} = -\alpha_j, \quad \lambda_{j-1,k+1} = \frac{\lambda_{j,k}}{q} - \alpha_{j-1}, \quad \lambda_{j-r,k} = \lambda_{j,k}.$$

Для каждого j собственные функции операторов L_j, также вычисляемые по схеме Дарбу,

$$A_j^+\psi_{j,0} = 0, \quad \psi_{j-1,k+1} = A_{j-1}\psi_{j,k},$$

образуют полное семейство в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.

Доказательство этой теоремы будет разделено на несколько предложений. Прежде всего необходимо доказать существование хотя бы одного решения задачи (6), (7), а уже затем показать, что это решение может быть возмущено. Как показано в §2, исходная q-цепочка сводится к системе разностных уравнений (16). Вводя обозначения $\xi_j(n) = u_j^2(n+1)$, $\eta_j(n) = v_j^2(n)$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \xi_j(n-1) + \eta_j(n) = q(\xi_{j-1}(n) + \eta_{j-1}(n-1)) + \alpha_j, \\ \xi_j(n)\eta_j(n-1) = q^2\xi_{j-1}(n-1)\eta_{j-1}(n), \end{cases} \tag{33}$$

где j — циклический индекс, $j \in \mathbb{Z}_r$. Таким образом, достаточно исследовать систему (33) (у которой $\xi_j(n)$ и $\eta_j(n)$ определены при всех n) и показать, что система (33) произвольной длины r имеет $2r$-параметрическое семейство положительных решений.

Замечание 3. Как показано в §2, исходная q-цепочка сводится к системе разностных уравнений на переменные $u_j(n)$, $v_j(n)$, где $j+n$ четно; соответствующие операторы B_j вида (15) действуют на решетке $2\mathbb{Z}+(j+1)(\mathrm{mod}\,2)$. Но в цепочке (14) эти операторы действуют на всей оси $\mathbb{Z}$; поэтому такая цепочка эквивалентна *двум независимым* цепочкам вида (6), (7). Это обстоятельство объясняет тот факт, что, согласно теореме 1, исходная цепочка определяется r параметрами, в то время как решение системы (33), если считать переменные $\xi_j(n)$ и $\eta_j(n)$ определенными во всех целых точках, определяется $2r$ параметрами (как будет показано ниже).

Замечание 4. Исследование свойств системы (33) для нечетного r (которое также проводится ниже) не имеет непосредственного отношения к доказательству теоремы 1; однако оно представляет самостоятельный интерес: подобно тому, как в §3 исходная цепочка длины 2 записывалась в виде „мигающей“ цепочки длины 1, произвольная цепочка вида (6), (7) длины $r = 4t+2$ может быть превращена в „мигающую“ цепочку вида (14), (15) половинной длины $2t+1$. Поэтому если $\alpha_j = \alpha_{j+2t+1}$ для всех j, то исходная цепочка эквивалентна „немигающей“ цепочке вида (14), (15), т.е. системе (33) нечетной длины. Такой выбор параметров представляет для нас особый интерес, потому что, как мы надеемся показать, в этом случае имеет место сходимость решений дискретной задачи к непрерывной (в том же смысле, в котором разностные операторы сходились к непрерывным в случае $r = 2$ — см. предложение 3).

Предложение 4. *Система разностных уравнений* (33), *где* $j \in \mathbb{Z}_r$, $0 < q < 1$, $\alpha_j > 0$, *при всех* r *имеет* $2r$*-параметрическое семейство решений, положительных во всех точках целочисленной решетки.*

Доказательство. Начнем с того, что получим явные формулы, позволяющие для каждого j выразить $(\xi_j(n), \eta_j(n))$ через $(\xi_i(n-1), \eta_i(n-1))$, $i = 1, \dots, r$. Исключая $\xi_j(n)$ из уравнений второй группы (33) и подставляя полученные выражения в уравнения первой группы, приходим к следующей линейной системе уравнений:

$$c_j \eta_j(n) - d_j \eta_{j-2}(n) = g_j, \quad \text{где } j \in \mathbb{Z}_r, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} c_j &= \eta_{j-1}(n-1), \\ d_j &= q^3 \xi_{j-2}(n-1), \\ g_j &= \eta_{j-1}(n-1)(q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) + \alpha_j). \end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, для произвольно выбранного набора начальных данных $(\xi_j(0), \eta_j(0))$, где $j = 1, \dots, r$, решение системы (33) с такими начальными данными продолжается на положительную „полуось“, если для всех натуральных n определитель матрицы линейной системы (34) отличен от нуля. Применяя формулы Крамера и записывая результат в более компактном виде, получаем следующее:

$$\eta_j(n) = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad \xi_j(n) = q^2 \frac{\xi_{j-1}(n-1)\eta_{j-1}(n)}{\eta_j(n-1)} = q^2 \frac{\xi_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-1)} \frac{\Delta_{j-1}}{\Delta}, \tag{36}$$

где

$$\Delta_j = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{g_{j-2k}}{c_{j-2k}} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{d_{j-2i}}{c_{j-2i}} \right) \left(\prod_{i=1}^{r} c_i \right), \quad \Delta = \prod_{i=1}^{r} c_i - \prod_{i=1}^{r} d_i, \tag{37}$$

если r нечетно, и

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} \frac{g_{j-2k}}{c_{j-2k}} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{d_{j-2i}}{c_{j-2i}} \right) \left(\prod_{i=1}^{r} c_i \right) - \sum_{k=1}^{\frac{r}{2}} \frac{g_{j+2k}}{d_{j+2k}} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{c_{j+2i}}{d_{j+2i}} \right) \left(\prod_{i=1}^{r} d_i \right), \\ \Delta &= \left(\prod_{i=0}^{\frac{r}{2}-1} c_{2i+1} - \prod_{i=0}^{\frac{r}{2}-1} d_{2i+1} \right) \left(\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} c_{2i} - \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} d_{2i} \right), \end{aligned} \tag{38}$$

если r четно. В формулах (36)–(38) все индексы считаются циклическими, т.е. складываются и вычитаются по модулю r, а произведения $\prod$ считаются равными единице, если нижний предел оказался больше верхнего. Заметим, что в случае четного r выражение Δ_j можно разложить на множители:

$$\Delta_j = \left(\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} c_{j+2i+1} - \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} d_{j+2i+1}\right)\left(\sum_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} \frac{g_{j-2k}}{c_{j-2k}}\left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{d_{j-2k}}{c_{j-2k}}\right)\left(\prod_{i=0}^{\frac{r}{2}-1} c_{j+2i}\right)\right),$$

т.е. выражения (38) имеют общий множитель, который сокращается в формулах (36).

Перемножение всех уравнений второй группы системы (33) дает один интеграл этой системы

$$q^{-2rn}\frac{\xi_1(n)\xi_2(n)\cdots\xi_r(n)}{\eta_1(n)\eta_2(n)\cdots\eta_r(n)} = \kappa, \tag{39}$$

где κ — константа, определяемая начальными данными:

$$\kappa = \frac{\xi_1(0)\xi_2(0)\cdots\xi_r(0)}{\eta_1(0)\eta_2(0)\cdots\eta_r(0)}.$$

Кроме того, уравнения (33) обладают симметрией $\xi_j(n) \longleftrightarrow \eta_j(-n)$; поэтому если искать симметричное решение $\xi_j(0) = \eta_j(0)$ для всех $j = 1,\dots r$, то достаточно доказать его существование и положительность лишь на „полуоси" $\mathbb{N}$. Более того, в силу (36) достаточно проверить положительность $\eta_j(n)$ для всех j (если уже известно, что $\xi_j(n-1)$ и $\eta_j(n-1)$ положительны).

Построим теперь решение системы (33), положительное на целочисленной решетке и удовлетворяющее условию $\xi_j(0) = \eta_j(0) = \rho > 0$ для всех $j = 1,\dots,r$ и некоторого ρ. Введем обозначение

$$A_j(n) = q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) + \alpha_j.$$

Рассмотрим случай нечетного r; формулы (36)–(37) можно переписать (с использованием (35) и (39)) следующим образом:

$$\eta_j(n) = \frac{1}{1-q^{2nr+r}}\sum_{k=0}^{r-1} q^{3k} h_{j,j-2k}(n)A_{j-2k}(n), \tag{40}$$

где $h_{j,k}(n)$ — некоторые произведения дробей вида $\frac{\xi_{i-1}(n-1)}{\eta_i(n-1)}$ (нахождение точных выражений для этих произведений не представляет никакой трудности, но нам эти выражения не потребуются). Отметим лишь, что

$$h_{j,j}(n) = 1, \quad h_{j,j-2} = \frac{\xi_{j-2}(n-1)}{\eta_{j-1}(n-1)}, \tag{41}$$

и $h_{j,k}$ содержит более одного сомножителя при $k \neq j, j-2$. Таким образом, достаточно доказать положительность всех $A_j(n)$.

Легко видеть, что при нашем выборе начальных данных величины

$$A_j(1) = \rho(q-1) + \alpha_j$$

положительны, если потребовать, чтобы параметр ρ удовлетворял неравенству

$$0 < \rho < \frac{\hat{\alpha}}{1-q}, \tag{42}$$

где $\hat{\alpha} = \min_j \alpha_j$. Поэтому, $\xi_j(1) > 0$, $\eta_j(1) > 0$ для всех $j = 1, \ldots, r$. Далее, пользуясь формулами (36), получаем, что

$$\begin{aligned} A_j(2) &= q\eta_{j-1}(1) - \xi_j(1) + \alpha_j = q\eta_{j-1}(1) - q^2\eta_{j-1}(1) + \alpha_j = q(1-q)\eta_{j-1}(1) + \alpha_j \\ &> \alpha_j > 0, \end{aligned}$$

т.е. $\xi_j(2)$ и $\eta_j(2)$ также положительны для всех j.

Покажем теперь, что для всех $j = 1, \ldots, r$ и для всех $n \geqslant 3$ справедливо следующее равенство:

$$q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) = q\eta_{j-1}(n-1)\frac{A_j(n-2)}{\eta_j(n-2)}.$$

Действительно, рассматривая соответствующую разность и используя уравнения (33), получаем

$$\begin{aligned} &q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) - q\frac{\eta_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-2)}(q\eta_{j-1}(n-3) - \xi_j(n-3) + \alpha_j) \\ &\quad = q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) - q\frac{\eta_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-2)}(\eta_j(n-2) - q\xi_{j-1}(n-2)) \\ &\quad = -\xi_j(n-1) + q^2\frac{\xi_{j-1}(n-2)\eta_{j-1}(n-1)}{\eta_j(n-2)} \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$A_j(n) = q\eta_{j-1}(n-1) - \xi_j(n-1) + \alpha_j = q\eta_{j-1}(n-1)\frac{A_j(n-2)}{\eta_j(n-2)} + \alpha_j > \alpha_j > 0$$

при условии, что уже доказана положительность $\eta_{j-1}(n-1)$, $\eta_j(n-2)$ и $A_j(n-1)$. Таким образом, из индуктивных соображений следует, что если начальные данные удовлетворяют условию (42), то соответствующее симметричное решение положительно на всей целочисленной решетке.

Доказательство для случая четного r идейно не отличается от приведенного выше, хотя стоит отметить некоторые существенные детали. После сокращения общего множителя в числителе и в знаменателе в формулах (36) становится невозможным использование интеграла (39). Поэтому вместо формулы (40) появляется такая

$$\eta_j(n) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\frac{r}{2}-1} q^{3k} h_{j,j-2k}(n) A_{j-2k}(n)}{1 - q^{\frac{3r}{2}} \prod\limits_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\xi_{j+2i+1}(n-1)}{\eta_{j+2i}(n-1)}}. \tag{43}$$

Таким образом, единственная разница по сравнению со случаем нечетного r состоит в том, что на каждом шагу нужно еще дополнительно проверять положительность знаменателя дроби (43). При $n = 1, 2$ (база индукции) это условие, очевидно, выполнено; если же $n > 2$, то по предположению индукции $A_j(n) > \alpha_j$, т.е. $q\eta_{j-1}(n-1) > \xi_j(n-1)$ для всех $j = 1, \dots, r$. Поэтому

$$\prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\xi_{j+2i}(n-1)}{\eta_{j+2i-1}(n-1)} < \prod_{i=1}^{\frac{r}{2}} \frac{\xi_{j+2i}(n-1)}{\frac{1}{q}\xi_{j+2i}(n-1)} = q^{\frac{r}{2}},$$

откуда следует, что знаменатель в формуле (43) положителен.

Итак, мы доказали, что при всех значениях $\alpha_j > 0$ система (33) имеет решение, положительное на всей целочисленной решетке и удовлетворяющее условию $\xi_j(0) = \eta_j(0) = \rho$, $j = 1, \dots, r$, где параметр ρ ограничен неравенством (42), т.е. нам удалось построить однопараметрическое семейство решений системы (33).

Покажем теперь, что при малом возмущении каждого решения этого семейства свойство положительности во всех точках целочисленной решетки сохранится. Действительно, шаг индукции при доказательстве положительности не зависит от выбора начальных данных. Поэтому достаточно подобрать такие начальные данные, чтобы для них выполнялись условия базы индукции: $A_j(1) > 0$, $A_j(2) > 0$ для всех $j = 1, \ldots r$. Но эти условия задают открытое множество в $\mathbb{R}^{2r}$, которое, как мы уже доказали, непусто. Таким образом, при достаточно малых возмущениях построенного выше решения его положительность при $n > 0$ сохранится. Значит, в силу симметрии системы при достаточно малых возмущениях решение будет оставаться положительным и во всех целых точках. Предложение доказано. •

Отметим, что существование $2r$-параметрического семейства положительных решений системы (33) влечет существование r-параметрического решения задачи (6), (7).

Рассмотрим отображение F_n сдвига вдоль „траекторий" системы (33),

$$
\begin{aligned}
F_n : (\xi_1(n-1), \ldots, \xi_r(n-1); \eta_1(n-1), \ldots, \eta_r(n-1)) \\
\mapsto (\xi_1(n), \ldots, \xi_r(n), \eta_1(n), \ldots, \eta_r(n)),
\end{aligned}
\tag{44}
$$

определенное на множестве

$$
\Big\{(\xi_1(n-1), \ldots, \xi_r(n-1), \eta_1(n-1), \ldots, \eta_r(n-1)) \\
\Big| \prod_{j=1}^{r} \eta_j(n-1) - q^{3r} \prod_{j=1}^{r} \xi_j(n-1) \neq 0 \Big\}.
$$

Отображение F_n не зависит от n (см. явные формулы (36)–(38)); поэтому будем опускать зависимость от n у F_n и у координат: вместо $\xi_j(n-1)$ и $\eta_j(n-1)$ будем писать ξ_j и η_j соответственно.

Предложение 5. *В области $\mathcal{D} = \{\eta_j \neq 0 \mid j = 1, \ldots, r\}$ отображение F имеет единственную неподвижную точку*

$$
N = \Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r}, \frac{\alpha_1 + q\alpha_r + \cdots + q^{r-1}\alpha_2}{1-q^r}, \frac{\alpha_2 + q\alpha_1 + \cdots + q^{r-1}\alpha_3}{1-q^r}, \ldots, \\
\frac{\alpha_r + q\alpha_{r-1} + \cdots + q^{r-1}\alpha_1}{1-q^r}\Big),
$$

причем эта точка является притягивающей.

В области $\mathcal{E} = \{\xi_j \neq 0 \mid j = 1, \ldots, r\}$ отображение F имеет единственную неподвижную точку

$$S = \left(\frac{\alpha_1 + q\alpha_r + \cdots + q^{r-1}\alpha_1}{1 - q^r}, \frac{\alpha_2 + q\alpha_1 + \cdots + q^{r-1}\alpha_r}{1 - q^r}, \ldots, \right.$$
$$\left. \frac{\alpha_r + q\alpha_{r-1} + \cdots + q^{r-1}\alpha_1}{1 - q^r}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r}\right),$$

причем эта точка является отталкивающей.

Доказательство. Предположим, что $(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_r)$ — неподвижная точка отображения F в области $\mathcal{D}$ и возьмем ее в качестве начальной. Тогда функция (39) постоянна при итерациях отображения F, что возможно лишь, если $\kappa = 0$. Это, в свою очередь, влечет равенство нулю по крайней одного из ξ_j; без ограничения общности можно считать, что $\xi_1 = 0$. Рассматривая вторую группу уравнений системы (33), немедленно заключаем, что $\xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_r = 0$. Подставим теперь это в оставшиеся уравнения (33) и получим следующую линейную систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -q \\ -q & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -q & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix};$$

решая ее, приходим к искомым формулам для координат неподвижной точки N.

Докажем теперь, что эта неподвижная точка — притягивающая. Для этого потребуется вычислить якобиан отображения F в точке N. Пусть сперва r нечетно; тогда все слагаемые в формуле (40), кроме первых двух, не внесут никакого вклада в частные производные в точке N, поскольку содержат ξ_j в степени, большей единицы. Теперь нетрудно, воспользовавшись формулами (41), выписать матрицу Якоби отображения F в точке N и убедиться в том, что ее характеристический многочлен имеет следующий вид:

$$\chi(\lambda) = (\lambda^r - q^{2r})(\lambda^r - q^r). \tag{45}$$

Таким образом, матрица Якоби $dF\,|_N$ имеет следующие собственные значения:

$$q\varepsilon_1,\ q\varepsilon_2,\ \ldots,\ q\varepsilon_r,\ q^2\varepsilon_1,\ q^2\varepsilon_2,\ \ldots,\ q^2\varepsilon_r,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_r$ — корни степени r из единицы. Случай четного r рассматривается аналогично: хотя явные формулы (38), (43) и отличаются от формул (37), (40), после отбрасывания „несущественных" слагаемых (т.е. слагаемых, которые не вносят вклад в коэффициенты матрицы Якоби в точке N) остается то же самое, что и в случае нечетного r. Поэтому характеристический многочлен в этом случае тоже имеет вид (45).

В качестве нормы конечномерного линейного оператора можно взять максимум модуля его собственных значений, если его матрица диагонализуема; поэтому в силу непрерывности нормы в некоторой окрестности точки N имеет место неравенство $\|dF\| \leqslant p < 1$. Таким образом, для всех точек X, достаточно близких к точке N, справедлива оценка

$$\|F(X) - F(N)\| = \|dF\,|_Y\| \cdot \|X - N\| \leqslant p\|X - N\| < \|X - N\|,$$

где Y — некоторая промежуточная точка на отрезке, соединяющем точки X и N. Таким образом, точка N — притягивающая.

При симметрии $\xi_j(n) \longleftrightarrow \eta_j(-n)$ области $\mathcal{D}$ соответствует область $\mathcal{E}$; поэтому область $\mathcal{E}$ содержит единственную неподвижную точку S, симметричную точке N. Точка S является отталкивающей, поскольку N — притягивающая точка. Предложение доказано. •

Предположим теперь, что

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r. \tag{46}$$

Легко видеть, что решение системы (33), отвечающее начальным данным

$$\xi_1(0) = \cdots = \xi_r(0), \quad \eta_1(0) = \cdots = \eta_r(0), \tag{47}$$

обладает следующим свойством:

$$\xi(n) = \xi_1(n) = \cdots = \xi_r(n), \;\; \eta(n) = \eta_1(n) = \cdots = \eta_r(n) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z};$$

при этом $\xi(n)$ и $\eta(n)$ удовлетворяют системе (18) (при $\alpha_1 = \alpha_2$) и потому имеют асимптотику (28), (29). Таким образом, для любых начальных данных вида (47), таких, что отвечающее им решение (см. §3) положительно во всех точках целочисленной решетки, это решение стремится к неподвижной точке N при $n \to +\infty$ и к неподвижной точке S при

$n \to -\infty$. Поскольку эти неподвижные точки — притягивающая и отталкивающая соответственно, а отображение (44) непрерывно вместе со своим обратным внутри каждого из криволинейных треугольников, задаваемых условиями (25), и непрерывно зависит от параметров α_j, малое возмущение начальных данных (47) и параметров (46) не изменит асимптотики решения, т.е. при $n \to \pm\infty$ решение будет стремиться к неподвижным точкам, соответствующим возмущенным параметрам α_j. Поэтому в силу непрерывности при достаточно малом возмущении начальных данных (47) и параметров (46) решение будет оставаться положительным. Таким образом, для любого четного r при малом возмущении параметров (46) можно построить операторы $L_1, \ldots, L_r$, удовлетворяющие периодической цепочке (6), (7), и такие, что их коэффициенты при $T^{\pm 1}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$, а сами эти операторы эквивалентны операторам умножения на константу при $n \to \infty$.

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что такое асимптотическое поведение коэффициентов операторов цепочки сохраняется не только при малых возмущениях параметров α_j, но и для произвольных положительных значений этих параметров, т.е. нам необходимо доказать, что для произвольного набора положительных чисел α_j найдутся такие начальные данные, что соответствующее им решение будет положительным во всех целочисленных точках и будет задавать решение q-цепочки (6), (7) с „правильным" асимптотическим поведение коэффициентов.

Зафиксируем некоторые стартовые значения параметров вида $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r$ и начальные данные $\xi_1(0) = \cdots = \xi_r(r) = \eta_1(0) = \cdots = \eta_r(0)$, удовлетворяющие условию (42); соответствующее решение будет положительным и будет иметь нужную асимптотику. Начнем теперь изменять значения параметров α_j так, чтобы никакое из них не уменьшалось; при этом решение будет попрежнему оставаться положительным. Легко видеть, что точки в пространстве параметров, которым соответствует положительное решение с „правильной" асимптотикой, образуют открытое множество; пусть $\mathcal{A}$ — связная компонента этого множества, содержащая „стартовую" точку $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r$. Предположим, что, увеличивая параметры α_j таким образом, мы вышли на границу $\mathcal{A}$, т.е. обнаружили некоторый предельный набор параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, для которого наше решение с зафиксированными начальными данными не имеет „правильной" асимптотики и докажем, что такая ситуация невозможна.

Предложение 6. *Дискретный спектр оператора L_j циклической q-цепочки* (33) *в интервале* $[0, \frac{\omega_j}{1-q^r})$ *имеет вид*

$$\omega_j \frac{1-q^{kr}}{1-q^r}, \quad q^{kr} q\alpha_{j-1} + \omega_j \frac{1-q^{kr}}{1-q^r}, \quad \dots, \quad q^{kr} \sum_{i=1}^{r-1} q^i \alpha_{j-i} + \omega_j \frac{1-q^{kr}}{1-q^r}, \\ k = 0, 1, \dots, \tag{48}$$

где

$$\omega_j = q^r \alpha_j + q^{r-1} \alpha_{j+1} + \dots + q\alpha_{j-1},$$

а j — циклический индекс. Если все операторы q-цепочки ограничены, то (48) *— весь дискретный спектр L_j.*

Доказательство. Пусть $\psi_{j,0}$ — основное состояние оператора L_j: $A_{j-1}\psi_{j,0} = 0$. Тогда из соотношений (33) немедленно вытекает, что $L_j \psi_{j,0} = 0$ для всех j, т.е. 0 является точкой спектра всех операторов q-цепочки.

Легко заметить, что если $L_j \psi = \lambda \psi$, то вектор $A_j^+ \psi$ является собственным для оператора L_{j+1} и соответствует собственному значению $q(\lambda + \alpha_j)$. Поэтому, действуя по схеме (32), получаем набор собственных значений (31). Переписывание этих формул в явном виде приводит к (48).

Покажем теперь, что спектр оператора L_j в интервале $[0, \frac{\omega_j}{1-q^r})$ исчерпывается набором q-арифметических прогрессий (48). Пусть $L_j \psi = \lambda \psi$ для некоторых λ, j; тогда непосредственно из соотношений q-цепочки следует, что $q\|A_{j-1}\psi\|^2 = \lambda \|\psi\|^2$, т.е. λ — неотрицательно, причем собственному значению $\lambda = 0$ соответствует лишь основное состояние. Кроме того, легко видеть, что либо $\lambda = 0$, либо вектор $A_{j-1}\psi$ является собственным для оператора L_{j-1}, соответствующим собственному значению $\frac{\lambda}{q} - \alpha_{j-1}$. Поэтому

$$L_j(A_j \dots A_{j-2} A_{j-1} \psi) = \frac{\lambda - \omega_j}{q^r} (A_j \dots A_{j-2} A_{j-1} \psi).$$

Многократное применение этого оператора дает следующую серию собственных значений:

$$\frac{\lambda - \omega_j \frac{1-q^{kr}}{1-q^r}}{q^{kr}}. \tag{49}$$

Если $\lambda \in [0, \frac{\omega_j}{1-q^r})$, то эта последовательность стремится к $-\infty$, что противоречит неотрицательности всех собственных значений. Таким образом, эта последовательность должна в некоторый момент оборваться, т.е. очередное применение оператора $A_j \dots A_{j-2}A_{j-1}$ даст нулевой вектор, что возможно лишь в случае попадания в основное состояние. Отсюда следует, что λ содержится в (48).

Пусть $\lambda > \frac{\omega_j}{1-q^r}$; тогда последовательность (49) монотонно возрастает и стремится к $+\infty$. Поэтому она не может оборваться, и применение оператора $A_j \dots A_{j-2}A_{j-1}$ дает серию собственных значений, стремящихся к $+\infty$. Таким образом, если операторы цепочки (6), (7) ограничены, то набор (48) представляет собой весь дискретный спектр оператора L_j. Предложение доказано. •

Предложение 7. *Если $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathcal{A}$, то соответствующие операторы $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$ компактны.*

Доказательство. Наличие „правильной“ асимптотики у решения системы (33) свидетельствует о том, что коэффициенты при $T^{\pm 1}$ соответствующих операторов L_j стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$. Поэтому все коэффициенты „сдвинутого“ оператора $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$ стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$. А это означает, что оператор $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$ можно приблизить последовательностью конечномерных разностных операторов вида $c_{j,m}T^{-1} + d_{j,m} + f_{j,m}T$, где $c_{j,m}(n) = d_{j,m}(n) = f_{j,m}(n) = 0$ при $|n| > m$. Значит, операторы $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$ компактны. Предложение доказано. •

Следствие 1. *В условиях предложения 7 собственные векторы каждого из операторов L_j образуют полное семейство в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.*

Следствие 2. *В условиях предложения 7 норма оператора L_j равна $\frac{\omega_j}{1-q^r}$.*

Первое из следствий получается применением теоремы Гильберта–Шмидта к самосопряженному компактному оператору $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$, а второе немедленно вытекает из первого, поскольку оператор L_j диагонализуем в базисе из собственных векторов, и, следовательно, его норма равна супремуму модулей собственных значений.

Пусть точка $\mathrm{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ находится на границе множества $\mathcal{A}$. Выберем последовательность точек $\{\mathrm{a}_m\}$ из $\mathcal{A}$, сходящуюся к этой предельной точке, и такую, что все координаты монотонно возрастают. Обозначим через $L_j(\mathrm{a})$ и $L_j(\mathrm{a}_m)$ операторы q-цепочки, построенные по параметрам a и a_m соответственно. Очевидно, что $\|L_j(\mathrm{a}_m)\| < \frac{\omega_j}{1-q^r}$ для всех j, m; поэтому норма предельного оператора тоже не превосходит $\frac{\omega_j}{1-q^r}$. Но согласно предложению 6 справедливо обратное неравенство. Таким образом, $\|L_j(\mathrm{a})\| = \frac{\omega_j}{1-q^r}$ для всех $j = 1, \dots, r$.

Нетрудно показать, что последовательность операторов $L_j(\mathrm{a}_m)$ слабо сходится к оператору $L_j(\mathrm{a})$ для всех j (поскольку уже известно, что $L_j(\mathrm{a})$ — ограниченные операторы). Отсюда следует, что спектр предельного оператора $L_j(\mathrm{a})$ дискретен и, согласно предложению 6, имеет вид (48). Поэтому предельный „сдвинутый" оператор $L_j(\mathrm{a}) - \frac{\omega_j(\mathrm{a})}{1-q^r}$ тоже компактен.

Очевидно, что коэффициенты компактного разностного оператора обязаны стремиться к нулю при $n \to \pm\infty$. Поэтому наличие интеграла (39) позволяет утверждать, что $a_j(n) \to 0$ при $n \to +\infty$ и $b_j(n) \to 0$ при $n \to -\infty$. А отсюда следует, что коэффициенты предельного оператора имеют „правильную асимптотику", т.е. $\mathrm{a} \in \mathcal{A}$. Таким образом, множество $\mathcal{A}$ одновременно открыто и замкнуто в положительной части пространства параметров $\mathbb{R}^r_+$. Значит, $\mathcal{A} = \mathbb{R}^r_+$.

Итак, мы показали, что для произвольного набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ положительных параметров существует решение системы (33), положительное во всех точках целочисленной решетки и обладающее „правильной" асимптотикой при $n \to \pm\infty$. Согласно предложению 7, соответствующие „сдвинутые" операторы $L_j - \frac{\omega_j}{1-q^r}$ компактны; поэтому их спектры дискретны, а собственные значения образуют полные семейства в $\mathcal{L}_2(\mathbb{Z})$.

Использование симметрии (8) немедленно сводит случай $q > 1$, $\alpha_j < 0$ к уже разобранному выше. Это завершает доказательство теоремы.

В заключение мне бы хотелось поблагодарить И. А. Дынникова за постановку задачи, помощь при ее решении и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Шабат А. Б., Ямилов Р. И., *Симметрии нелинейных цепочек*, Алгебра и анализ **2** (1990), №2, 183–208.

[2] Веселов А. П., Шабат А. Б., *Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера*, Функц. анал. и его прил. **27** (1993), №2, 1–21.

[3] Adler V. E., *Nonlinear chains and Painlevé equations*, Phys. D **73** (1994), 335–351.

[4] Novikov S. P., Taimanov I. A., *Difference analogs of the harmonic oscillator*, Appendix II in [5], Solitons, Geometry, and Topology: on the Crossroad, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 126–130.

[5] Novikov S. P., Veselov A. P., *Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations*, Solitons, Geometry, and Topology: on the Crossroad (V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, eds.), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 109–132.

[6] Атакишиев Н. М., Суслов С. К., *Разностные аналоги гармонического осциллятора*, Теор. и мат. физ. **85** (1990), №1, 64–73.

[7] Spiridonov V., Vinet L., Zhedanov A., *Difference Schrödinger operators with linear and exponential discrete spectra*, Lett. Math. Phys. **29** (1993), 67–73.

[8] Atakishiev N., Frank A., Wolf K., *A simple difference realization of the Heisenberg q-algebra*, J. Math. Phys. **35** (1994), 3253–3260.

[9] Дынников И. А., Смирнов С. В., *Точно решаемые циклические q-цепочки Дарбу*, Успехи мат. наук **57** (2002), №6, 183–184.

[10] Новиков С. П., Дынников И. А., *Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях*, Успехи мат. наук **52** (1997), №5, 175–234.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
Россия, 119992, Москва, Воробьевы Горы
E-mail: sergey@svsmir.mccme.ru

Поступило 31 июля 2002 г.